УДК 519.85

С.В. БОЙКО

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ СТРАХОВАНИИ ИНВЕСТИЦИЙ ПРИ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ КАТАСТРОФИЧЕСКИХ РИСКАХ

Моделируются различные долговременные стратегии инвестирования при ограничении на максимальный размер фонда самострахования объектов в условиях повторяющихся катастрофических рисков. Показано, что такое ограничение существенно влияет на вероятностное распределение конечной прибыли. Результаты моделирования представлены в виде вероятностного распределения чистой прибыли в конце планового горизонта.

Постановки задач оптимального размещении и страховании инвестиций при повторяющихся катастрофических рисках обсуждаются в [1–4]. В частности, моделируются различные долговременные стратегии инвестирования в совокупность коммерческих объектов, в условиях повторяющихся катастрофических рисков [4]. Повторяющиеся катастрофы представлены в виде дерева сценариев. В качестве мер защиты инвестиций используются страхование и географическая диверсификация. Результаты моделирования представлены в виде вероятностного распределения чистой прибыли в конце планового горизонта. В настоящей работе развиваются результаты при введении ограничения на максимальный размер фонда самострахования объектов инвестирования, показано, что такое ограничение существенно влияет на вероятностное распределение конечной прибыли, поэтому актуальной проблемой является выбор размера фонда самострахования [4]. Предлагается методология решения данной проблемы, которая иллюстрируется на численном примере.

Также развиваются динамические модели инвестиционных решений, обобщающие статические инвестиционные модели при катастрофических рисках из [1], одномерные динамические модели из [2] и многомерные динамические модели из [4]. Предполагается, что инвестиции поэтапно вкладываются в объекты, которые после завершения строительства, приносят доход. Полученный доход используется для достройки объектов, на пополнение страхового фонда до некоторого планового уровня и выплату дивидендов. Однако, до или после ввода в строй объекта может случиться катастрофа, которая частично или полностью выводит группу объектов из строя, и инвестор вынужден определить порядок восстановления повреждённых объектов из средств страхового фонда. Если фонд самострахования исчерпан и нет объектов, приносящих доход, то происходит безвозвратная потеря инвестиций. Этого можно избежать, если строить объекты в более безопасных районах, но при этом теряется эффективность. Задача состоит в достижении некоторого заданного уровня прибыли при минимизации риска безвозвратной потери инвестиций, или максимизации уровня прибыли при ограничениях на риск. Оптимизируемые переменные – план распределения инвестиций и уровень фонда самострахования. Работа продолжает исследования и использует методологию [4]. Основное отличие состоит в ограничении размера фонда страхования инвестиций. Такое ограничение существенно влияет на распределение прибыли в конце планового горизонта.

Детерминированная динамическая модель инвестиций с разрывной функцией доходности. Пусть имеется n объектов для потенциального инвестирования, которые обозначим индексом $i=1,...,n$. Инвестиции осуществляются поэтапно в единицу времени $t=1,2,...$

Поскольку наличных средств в начальный этап t_0 для построения всех объектов недостаточно, то плановый горизонт задачи можно разделить на два периода: период строительства и период получения прибыли.

Обозначим $A_t=\{i,j,k,...\}$ – множество построенных объектов на момент t, где $i,j,k,...$ – индексы построенных объектов. В период строительства все доступные средства расходуются на поддержание в исправном состоянии уже построенных объектов, для чего создаётся фонд самострахования s_t, и, по возможности, на построение новых объектов. Величина фонда самострахования $s(A_t)$ зависит от текущего набора построенных объектов, их месторасположения и их устойчивости к паводкам. В случае паводкового сценария в первую очередь восстанавливаются все построенные объекты, затем восстанавливается фонд самострахования до планового уровня $s_t \geq s(A_t)$ и, только потом рассматривается возможность построения новых объектов за счёт оставшихся средств $s_t - s(A_t)$.

После завершения строительства на случай катастрофических сценариев в фонде самострахования оставляется фиксированная сумма $S=s(A)$, $A=\{1,...,n\}$, а остальная прибыль y_t изымается из оборота (например, используется для выплаты дивидендов и т.п.). После катастрофического события в первую очередь восстанавливаются все объекты, затем полный плановый объем S фонда самострахования и только потом поступающие средства будут направлены на выплату дивидендов (на счёт прибыли y_t).

В начальный момент из имеющихся средств s строится множество объектов $A^{(0)}$, в которые вкладываются инвестиции в количествах x_{i0}. Одновременно с началом строительства, формируется страховой фонд $s_0 \geq s\left(A^{(0)}\right)$. С завершением строительства объекта i в фонд самострахования s_0 добавляется сумма $s\left(x_i\right)$, которая зависит от месторасположения объекта i и его устойчивости к паводкам. Таким образом, средства начального фонда делятся на три части: инвестиции в объекты, фонд самострахования и остаток:

$$s=x\left(A^{(0)}\right)+s_0=x\left(A^{(0)}\right)+s\left(A^{(0)}\right)+\left(s_0-s\left(A^{(0)}\right)\right)=\sum_{i\in A^{(0)}} x_{i0}+\sum_{i\in A^{(0)}} s(x_{i0})+\left(s_0-s\left(A^{(0)}\right)\right).$$

На этапе t вкладываются инвестиции в количествах u_{it}. Существуют технологические ограничения по объемам осваиваемых средств в единицу времени:

$$u_{it} \leq a_{it}. \tag{1}$$

Обозначим x_{it} суммарные инвестиции в объект i после окончания этапа t:

$$x_{it} = x_{i(t-1)} + u_{it} = x_{i0} + \sum\nolimits_{\tau=1}^{t} u_{i\tau}. \tag{2}$$

По мере завершения строительства объект i начинает приносить доход в единицу времени $r_i(x)$, который зависит от вложенных средств x. В частности, если объект начинает приносить фиксированный c_i доход только после полного завершения строительства, т.е. вложения средств в количестве C_i, то соответствующая функция $r_i(x)$ является разрывной:

$$r_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < C_i, \\ c_i & \text{если} \quad x \geq C_i. \end{cases} \tag{3}$$

Если A_{t-1} – множество объектов, построенных к этапу $(t-1)$, а на этапе строится множество объектов $A^{(t)}$, то размер фонда самострахования к началу этапа t будет определяться неравенством

$$s_t \geq s\left(A_t\right)=s\left(A_{t-1}\cup A^{(t)}\right)=s\left(A_{t-1}\right)+ s\left(A^{(t)}\right)=\sum_{i\in A_{t-1}} s\left(x_i\right)+\sum_{i\in A^{(t)}} s\left(x_i\right),\ \text{где } s\left(x_i\right)\geq 0,\ \forall i.$$

На этапе строительства (первые несколько лет) средства s_t, формируются из депозитных процентов $100\beta_t$ прибыли от фонда самострахования $\beta_t s_{t-1}$ и прибыли от действующих объектов $\sum_{i\in A_{t-1}} r_i\left(x_{i(t-1)}\right)$, за вычетом затрат на ремонт повреждённых $\sum_{i\in A_{t-1}} u_{it}$ и строительство новых объектов $\sum_{i\in A^{(t)}} x_{it}$, т.е.

$$s_t = (1+\beta_t)s_{t-1} - \sum_{i\in A_{t-1}} u_{it} + \sum_{i\in A_{t-1}} r_i\left(x_{i(t-1)}\right) - \sum_{i\in A^{(t)}} x_{it} \quad t = 1,2,\ldots,T. \tag{4}$$

Инвестиции в новые объекты в каждый период t осуществляются из наличных к концу этапа $(t-1)$ средств остатка $s_t - s\left(A_{t-1}\right)$, таким образом:

$$\sum_{i \in A^{(t)}} x_{it} + s\left(A^{(t)}\right) \leq s_t - s\left(A_{t-1}\right). \tag{5}$$

На этапе строительства с ростом инвестиций в объекты, расположенные в зонах повышенного риска, одновременно пропорционально растёт размер страхового фонда. С завершением этапа строительства устанавливается максимальный размер фонда самострахования $s_t = s\left(A\right)$, а вырученные в момент t средства $y^{(t)}$ идут в счет чистой прибыли по мере поступления. В случае катастрофы, после восстановления всех объектов, фонд самострахования пополняется до планового уровня $s\left(A\right)$ и только потом поступающие средства будут направлены на выплату дивидендов y_t.

$$s_t = \left(1+\beta_t\right) s_{t-1} - \sum_{i=1}^{n} u_{it} + \sum_{i=1}^{n} r_i\left(x_{i(t-1)}\right), \tag{6}$$

$$y^{(t)} = s_t - s\left(A\right), \tag{7}$$

$$0 \leq s_t \leq s\left(A\right), \tag{8}$$

$$y_t = \left(1+\beta_t\right) y_{t-1} + y^{(t)}. \tag{9}$$

Целью строительства объектов может быть получение максимального дохода в конце планового горизонта T.

$$P_T = \beta_T \left(s_T + y_T\right) + \sum_{i=1}^{n} r_i(x_{iT}) \to \max_{\{x_{it}, y_t, s_t, i=1,\ldots,n; \tau=1,\ldots,T\}}. \tag{10}$$

Таким образом, получаем дискретную задачу оптимального управления с целевым функционалом (10), уравнениями движения (2), (4) капитала $\left(s_t \geq 0, x_{it} \geq 0\right)$ с ограничениями (1), (5) на управления $\left\{u_{i\tau} \geq 0\right\}$ первого этапа и уравнениями движения (6), (7), (9) капитала $\left(y^{(t)} \geq 0\right)$ с ограничениями (1), (8) на управления $\left\{u_{i\tau} \geq 0\right\}$ второго этапа. Легко видеть, что этапы различаются движением капитала: на первом остаток средств $s_t - s\left(A_{t-1}\right)$ вкладывается в строительство новых объектов, на втором – идёт в счет чистой прибыли y_t. Отметим, что в данной постановке задачи оптимального управления уравнения движения свободного капитала (4) и (6) содержат нелинейные и, возможно, разрывные функции $r_i(x)$.

Моделирование катастрофических сценариев и управление ими рассмотрены в [4].

Динамические стохастические многоэтапные модели принятия инвестиционных решений. Пусть известно начальное состояние $\left(x_{i\omega^0}, s_{\omega^0}\right)$, $i = 1,\ldots,n$ системы. Динамика по времени $t = 0,1,\ldots$ системы строящихся объектов и денежного фонда при каждом сценарии $\omega^t = \left(\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(t)}\right)$ описывается на первом этапе соотношениями:

$$x_{i\omega^t} = \alpha_{i\omega_t} x_{i\omega^{t-1}} + u_{i\omega^t}, \tag{11}$$

$$s_{\omega^t} = (1+\beta_t) s_{\omega^{t-1}} - \sum_{i \in A_{\omega^t - 1}} u_{i\omega^t} + \sum_{i \in A_{\omega^t - 1}} r_i \left(\alpha_{i\omega_t} x_{i\omega^{t-1}}\right) - \sum_{i \in A^{\left(\omega^t\right)}} x_{i\omega^t}, \tag{12}$$

$$\sum_{i \in A^{\left(\omega^t\right)}} x_{i\omega^t} + s\left(A^{\left(\omega^t\right)}\right) \le s_{\omega^t} - s\left(A_{\omega^{t-1}}\right), \tag{13}$$

$$0 \le u_{i\omega^t} \le a_{i\omega^t}. \tag{14}$$

на втором этапе:

$$s_{\omega^t} = \left(1+\beta_{\omega^t}\right) s_{\omega^t - 1} - \sum\nolimits_{i=1}^{n} u_{i\omega^t} + \sum\nolimits_{i=1}^{n} r_i \left(x_{i\left(\omega^t - 1\right)}\right), \tag{15}$$

$$y^{\left(\omega^t\right)} = s_{\omega^t} - s\left(A\right), \tag{16}$$

$$0 \le s_{\omega^t} \le s\left(A\right), \tag{17}$$

$$y_{\omega^t} = \left(1+\beta_{\omega^t}\right) y_{\omega^t - 1} + y^{\left(\omega^t\right)}. \tag{18}$$

К моменту T в случае реализации сценария $\omega^T = \left(\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(T)}\right)$ состояние системы описывается показателями $s_{\omega^T}, y_{\omega^T}, x_{i\omega^T}, i = 1, \ldots, n$ и уровнем доходности

$$R_{\omega^T} = \beta_T \left(s_{T\omega^T} + y_{T\omega^T}\right) + \sum\nolimits_{i=1}^{n} r_i \left(x_{i\omega^T}\right).$$

Задача максимизации ожидаемого дохода для горизонта T имеет вид

$$F_T = \sum\nolimits_{\omega^T \in \Omega^T} p_{\omega^T} \left(\beta_T \left(s_{T\omega^T} + y_{T\omega^T}\right) + \sum\nolimits_{i=1}^{n} r_i \left(x_{i\omega^T}\right)\right) \to \max_{\left\{x_{i\omega^t}, s_{\omega^t}, y_{\omega^t},\ i=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T\right\}} \tag{19}$$

при ограничениях (11)–(18) для каждого i, t и ω^t.

Данная задача является исключительно сложной. Как и в детерминированном случае она может быть сведена к смешанной дискретно-непрерывной постановке. Размерность этой задачи может быть огромной. Практически ее можно решить только приближенно, путем рационального ограниченного перебора допустимых решений [4].

Постановка (11)–(19) не учитывает рисков недополучения прибыли и (катастрофического) риска потери бизнеса, поэтому ограничения (11)–(19) следует дополнить ограничением на вероятность безвозвратной потери инвестиций:

$$P_* = \sum\nolimits_{t=1}^{T} P\left\{\omega^t : x_{i\omega^t} < C_i \, \forall i\right\} \le \gamma. \tag{20}$$

Для случая одного объекта, восстанавливаемого из фонда самострахования, для нахождения вероятности (не) потери бизнеса (инвестиций) можно применять методы страховой математики Норкина [2].

Инвестора может интересовать не средняя прибыль в конце планового горизонта, а достижение некоторого уровня прибыли Y за время T. Поэтому, целесообразнее поставить задачу максимизации вероятности превышения конечной прибылью $y_{T\omega^T}$ заданного уровня Y. Такая постановка впервые была предложена Roy [5] и Bawa [6]. Таким образом, получаем задачу:

$$P\{ y_{T\omega^T} \geq Y \} \rightarrow \max_{\left\{ x_{i\omega^t}, y_{t\omega^t}, u_{i\omega^t}, i=1,\dots,n; t=1,\dots,T \right\}} \tag{21}$$

при ограничениях (11)–(19) для каждого i, t и ω^t, и при условии (20).

В работе [4] рассмотрены принципы зонирования и страхования инвестиций, алгоритм нахождения стратегии, описаны технические детали генерирования первоначальных данных, оборота средств, построения объектов.

Так же в [4] рассмотрено влияние размера страхового фонда на риск безвозвратной потери инвестиций, описаны принципы сравнения двух стратегий, построена эффективная граница и найдена наиболее близкая к ней стратегия для случая неограниченного страхового фонда.

Определение функции страхового фонда. При страховании разных планов инвестор может страховаться от паводка определённого уровня. Для любого плана g можно найти пять сумм страхования точки $s_1(g)$, $s_2(g)$, $s_3(g)$, $s_4(g)$, $s_5(g)$ от ущерба пяти паводков разной интенсивности. Два различных плана g и h целесообразно сравнивать попарно при одинаковых уровнях страхования в указанных точках, когда разные планы застрахованы на разные суммы, но от одной и той же интенсивности паводка, например, пару $s_2(g)$ и $s_2(h)$. Если инвестор хочет застраховать план g на сумму $0{,}5 s_1(g)$, то для второго плана ему нужно выбрать сумму $0{,}5 s_1(h)$, так как, она соответствует такому же уровню страхования. При желании инвестора застраховать план g на сумму $s^{(1)}$ такую, что $s_1(g) < s^{(1)} < s_2(g)$, можно найти $a_1 > 1$ и $a_2 < 1$, что $s^{(1)} = a_1 s_1(g) = a_2 s_2(g)$. Но для плана h: $a_1 s_1(h) \neq a_2 s_2(h)$. Возникает вопрос: какую из двух сумм $a_1 s_1(h)$ или $a_2 s_2(h)$ выбрать для плана h? Поскольку $s_1(g) < s^{(1)}$, это значит, что инвестор перестраховывается от паводка более высокого, чем первый, а паводку второго уровня соответствует сумма $s_2(g)$ следовательно, берём число a_2 и сравниваем планы g и h для сумм $a_2 s_2(g)$ и $a_2 s_2(h)$.

Выбор числа $a_2 s_2(h)$ продиктован так же следующими соображениями. Пусть $g = (1\ 0\ 0\ 0\ 0)$ и $h = (0\ 1\ 0\ 0\ 0)$. Если инвестор опасается паводка первого уровня, то первый план ему нужно страховать на сумму $s_1(g)$, для второго плана $s_1(h) = 0$, так как, второй план от паводков первого уровня не страдает. Если же инвестор хочет застраховаться на сумму $s_1(g)<s^{(1)}<s_2(g)$, то $s^{(1)}=a_1 s_1(g)=a_2 s_2(g)$, $a_1 s_1(h)=0$, $a_2 s_2(h)>0$. Легко видеть, что более «справедливое» сравнение будет планов g и h для сумм $a_2 s_2(g)$ и $a_2 s_2(h)$.

Из чего следует, что для суммы-числа $\forall s^{(2)}$ для любого плана g можно найти интервал $(0,s_1(g))$, $(s_1(g),s_2(g))$, $(s_2(g),s_3(g))$, $(s_3(g),s_4(g))$, $(s_4(g),s_5(g))$ которому оно принадлежит. Например, $s^{(2)}\in(s_{n-1}(g),s_n(g))$, найти числа $\{a_k\}$,что $s^{(2)}=a_k s_k(g)$, $k\geq n$ и любой план g можно сравнить с планом h с помощью любой из пар $(a_k s_k(g),a_k s_k(h))$, $k\geq n$.

Сравнение двух планов при ограниченном и неограниченном страховых фондов. Из табл. 1 легко видеть, что введение ограничения величины фонда самострахования, после завершения строительства, значительно увеличивает вероятность разорения и ухудшает распределения вероятностей прибыли. Несмотря на то, что некоторые распределения близки, следует учитывать тот факт, что для неограниченного фонда все объекты исправны, что нельзя утверждать для случая ограниченного фонда. Все суммы ограниченного фонда на этапе строительства определяются как доли функции $s_3(g):(s_2(g)<200.000<s_3(g))$.

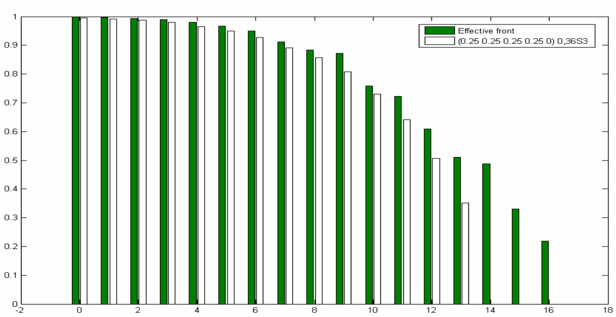
ТАБЛИЦА 1. Распределение вероятностей прибыли через 20 лет при увеличении суммы страхования для плана инвестирования $g=(1\ 0\ 0\ 0\ 0)$ при ограниченном f_1 и неограниченном f_2 фонде

Прибыль	Сумма страхования							
	50		100		150		200	
	План							
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
$P\{y_{20}>1.500.000\}$	0,236	0,228	**0,218**	**0,218**	0,218	0,218	**0**	**0**
$P\{y_{20}>1.200.000\}$	0,463	0,496	**0,460**	**0,458**	0,435	0,426	**0,407**	**0,374**
$P\{y_{20}>900.000\}$	0,634	0,688	**0,681**	**0,688**	0,673	0,662	**0,640**	**0,630**
$P\{y_{20}>600.000\}$	0,752	0,816	**0,818**	**0,835**	0,829	0,833	**0,830**	**0,829**
$P\{y_{20}>300.000\}$	0,824	0,884	**0,897**	**0,911**	0,913	0,923	**0,929**	**0,929**
P_*	0,119	0,054	**0,051**	**0,035**	0,038	0,021	**0,019**	**0,015**

Построение эффективной границы для случая ограниченного фонда самострахования. Принципы построения эффективной задачи и поиска стратегии, наиболее близкой к эффективной границе, рассматривались в [4]. Из табл. 2 найдена и показана на рисунке стратегия $G = \{(0.25\ 0.25\ 0.25\ 0.25\ 0), 0,36 s_3\}$ – наиболее близкая к эффективной границе, для которой вероятность разорения γ не превышает 0,005. Единичное деление на рисунке по оси абсцисс соответствует прибыли в 100 тыс. Делению в 0 по оси абсцисс соответствуют сценарии, при которых не наступил крах бизнеса. По оси ординат отложены вероятности. Минимальная сумма фонда самострахования вне зависимости от значения функции равна 25 тыс. В табл. 2 выделены жирным шрифтом стратегии, для которых вероятность разорения γ не превышает 0,005.

ТАБЛИЦА 2. Значения функции расстояния до эффективной границы для различных планов и уровней страхования при $\lambda_i = (h - i + 1)/h$, где h – максимум доходов (в единицах по 100 тысяч) для самого прибыльного плана

План	Функция страхования							
	$0,18 s_3$		$0,36 s_3$		$0,55 s_3$		$0,73 s_3$	
	Сумма	Расст.	Сумма	Расст.	Сумма	Расст.	Сумма	Расст.
(1 0 0 0 0)	50000	1,45520	100000	0,96704	150000	0,95407	200000	0,98371
(0.5 0.5 0 0 0)	42000	0,65416	83000	0,49715	125000	0,44397	166000	0,48973
(0.33 0.33 0.33 0 0)	35000	0,37960	71000	0,36068	106000	0,34183	141000	0,46203
(0 1 0 0 0)	36000	0,51893	72000	0,39591	107000	0,36932	143000	0,41046
(0 0.5 0.5 0 0)	28000	0,29789	56000	0,25620	84000	**0,36613**	111000	**0,39404**
(0.25 0.25 0.25 0.25 0)	29000	0,35151	59000	**0,34177**	88000	**0,40020**	117000	**0,41790**
(0 0 1 0 0)	25000	0,59479	38000	0,55854	56000	0,54046	75000	0,51762
(0 0.33 0.33 0.33 0)	25000	**0,39058**	40000	**0,35801**	60000	**0,48603**	80000	**0,51560**



Рисунок

Заключение. На ограниченном переборе стратегий и сравнении их с эффективной границей показано, что ограничение на фонд самострахования существенно влияет на вероятностное распределение конечной прибыли и значительно увеличивает вероятность разорения. Самая близкая стратегия $F = \{(0\ 0.5\ 0.5\ 0\ 0), 0{,}36 s_3\}$ к эффективной границе при ограничении на фонд самострахования не удовлетворяет условию на безвозвратные потери инвестиций $\gamma < 0{,}005$.

С.В. Бойко

ПРО ОПТИМАЛЬНЕ СТРАХУВАННЯ ІНВЕСТИЦІЙ ЗА КАТАСТРОФІЧНИХ РИЗИКІВ, ЩО ПОВТОРЮЮТЬСЯ

Моделюються різноманітні довготермінові стратегії інвестування з обмеженням на максимальний розмір фонду самострахування за умов катастрофічних ризиків, що повторюються. Показано, що таке обмеження суттєво впливає на імовірнісний розподіл кінцевого прибутку. Результати моделювання представлені у вигляді імовірнісного розподілу чистого прибутку в кінці планового горизонту.

S.V. Boyko

ABOUT OPTIMAL PROTECTION OF INVESTMENT UNDER CATASTROPHIC PERIODICAL RISKS

Different permanent strategies of investment in conditions of periodical catastrophic risks with limited of maximum size of fund of self-insurance are modelled. This limitation have an influence essentially on probable distribution of the ending profit are showed. The results of modelling are presented in the form of the probable distribution of the profit at the end planned horizon.

1. *Норкин В.И.* Об измерении и профилировании катастрофических рисков // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 6. – С. 80–94.
2. *Норкин В.И.* О самостраховании инвестора в условиях повторяющихся катастрофических рисков // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 3. – С. 90–104.
3. *Кирилюк В.С., Норкин В.И., Домрачев В.Н.* Подход непараметрических индексов для оценивания субъектов финансового рынка по соотношению доходность-риск на примере коммерческих банков // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 6. – С. 120–131.
4. *Бойко С.В.* Динамическая модель инвестиций при катастрофических рисках // Компьютерная математика. – 2008. – № 1. – С. 12–21.
5. *Roy A.D.* Safety-first and the holding of assets // Econometrica. – 1952. – **20**. – P. 431–449.
6. *Bawa V.S.* Safety first, stochastic dominance, and optimal portfolio choice // J. of Financial and Quantitative Analysis. – 1978. – N 13. – P. 255–271.

Получено 20.03.2008