ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.003
UDC 517.95, 519.21

Е.Я. Хруслов[1], **Л.А. Хилькова**[2]

[1] Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков
[2] Институт химических технологий Восточноукраинского национального университета им. Владимира Даля, Рубежное
E-mail: Khruslov@ilt.harkov.ua, LarisaHilkova@gmail.com

Нелинейная задача Робена в областях с мелкозернистой случайной границей

Представлено академиком НАН Украины Е.Я. Хрусловым

Рассматривается краевая задача для уравнения стационарной диффузии в области $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon$, дополнительной большому числу мелких зёрен B_i^ε ($i = 1, \ldots, N^\varepsilon$), на поверхностях которых задано нелинейное граничное условие типа Робена. Предполагается, что эти зёрна являются мелкими шариками, случайно распределёнными в фиксированной области $\Omega \in R^3$ и имеющими случайные радиусы. Функция распределения $f^\varepsilon(x, r)$ центров $x^{i\varepsilon}$ и радиусов r_i^ε шаров зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$ так, что среднее расстояние между ближайшими центрами имеет порядок $O(\varepsilon)$, а средний радиус — порядок $O(\varepsilon^\alpha)$ ($\alpha > 2$). Доказано, что при $\varepsilon \to 0$ случайное решение задачи $u^\varepsilon(x)$ по вероятности сходится в метрике $L^2(\Omega)$ к неслучайной функции $u(x)$, для которой получено усреднённое уравнение.

Ключевые слова: *усреднение, стационарная диффузия, краевое условие Робена, случайное распределение.*

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^3 и в ней распределено большое количество мелких включений B_i^ε, $i = 1, \ldots, N^\varepsilon$, в форме шаров $B(x^{i\varepsilon}, r_i^\varepsilon)$ радиусов r_i^ε с центрами в точках $x^{i\varepsilon}$. Будем предполагать, что система шаров $\{B_i^\varepsilon, i = 1, \ldots, N^\varepsilon\}$ зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$ так, что при $\forall\varepsilon$ шары не пересекаются друг с другом и с внешней границей $\partial\Omega$, а при $\varepsilon \to 0$ число шаров возрастает: $N^\varepsilon \sim \dfrac{|\Omega|}{\varepsilon^3}$, среднее расстояние между ближайшими шарами имеет порядок $O(\varepsilon)$, а средний радиус шаров — порядок $O(\varepsilon^\alpha)$, $\alpha > 2$.

В области $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon$ рассмотрим краевую задачу для уравнения Пуассона с нелинейным граничным условием типа Робена на границе шаров $S_i^\varepsilon = \partial B_i^\varepsilon$:

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon(x) = F(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon(x)}{\partial n} + \varepsilon^\beta \sigma(x^{i\varepsilon}, u^\varepsilon) = 0, \quad x \in S_i^\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, N^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа в R^3; n — единичная нормаль к границе $S^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} S_i^\varepsilon$, внешняя по отношению к области Ω^ε; числовой параметр $\beta \geqslant 3 - 2\alpha$; функции $f(x) : \Omega \to R^1$ и $\sigma(x, u) : \Omega \times R^1 \to R^1$ заданы и удовлетворяют условиям: $f(x) \in L^2(\Omega)$, $\sigma(x, u) \in C(\Omega, C^1(R^1))$ и $\forall x \in \Omega : \sigma(x, 0) = 0$, $0 < k_1 \leqslant \frac{\partial}{\partial u}\sigma(x, u) \leqslant k_2(1 + |u|^\tau)$, где $0 \leqslant \tau < 1$.

Задача (1) описывает процесс стационарной диффузии частиц в перфорированной области Ω^ε, сопровождаемый поглощением на поверхности зёрен B_i^ε, $i = 1, \ldots, N^\varepsilon$. В математической литературе задачу (1) часто называют нелинейной задачей Робена, а области вида $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon$ — областями с мелкозернистой границей [1].

Обозначим через $H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$ пространство функций из $H^1(\Omega^\varepsilon)$, равных нулю на внешней границе $\partial\Omega$ области Ω^ε.

Обобщенным решением задачи (1) называется функция $u^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$, удовлетворяющая следующему интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)\, dx + \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \varepsilon^\beta \int_{S_i^\varepsilon} \sigma(x^{i\varepsilon}, u^\varepsilon) v^\varepsilon dS - \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon dx = 0$$

для любой функции $v^\varepsilon(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$. Здесь $S_i^\varepsilon = \partial B_i^\varepsilon$ — поверхность шара B_i^ε.

Справедлива следующая теорема.

Теорема **1**. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует единственное обобщённое решение задачи* (1). *Если функции* $f(x)$, $\sigma(x, u)$ *и граница* $\partial\Omega$ *достаточно гладкие* ($f(x) \in C^1(\Omega)$, $\sigma(x, u) \in C(\Omega, C^1(\Omega \times R^1))$, $\partial\Omega \in C^1$)*, то это обобщённое решение будет классическим.*

В данной работе изучается асимптотическое поведение $u^\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$, когда расположение шаров B_i^ε и их радиусы r_i^ε случайные. А именно: мы предполагаем, что положение центров $x^{i\varepsilon}$ шаров и величины их радиусов r_i^ε определяются набором n-частичных функций распределения [2]

$$f_n^\varepsilon(x^1, x^2, \ldots, x^n;\ \ r_1, r_2, \ldots, r_n) : (\Omega)^n \times [0, \infty)^n \to [0, \infty),\ n = 1, 2, \ldots, N^\varepsilon, \tag{2}$$

так, что вероятность нахождения центров и радиусов данной группы n шаров в интервалах $(x^i, x^i + dx^i)$, $(r_i, r_i + dr_i)$ $i = 1, \ldots, n$ равна

$$f_n^\varepsilon(x^1, x^2, \ldots, x^n;\ \ r_1, r_2, \ldots, r_n)\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n dr_1 dr_2 \ldots dr_n.$$

Эти функции удовлетворяют условиям симметрии, согласования и нормировки, вытекающим из их вероятностного смысла [3]:

$$f_n^{\varepsilon}(x^1,\dots,x^k,\dots,x^{\ell},\dots,x^n;\quad r_1,\dots,r_k,\dots r_{\ell},\dots,r_n)=$$
$$=f_n^{\varepsilon}(x^1,\dots,x^{\ell},\dots,x^k,\dots,x^n;\quad r_1,\dots,r_{\ell},\dots,r_k,\dots,r_n),$$
$$\int_{\Omega}\int_0^{\infty} f_n^{\varepsilon}(x^1,\dots,x^n;\quad r_1,\dots,r_n)\,dx^n dr_n = f_{n-1}^{\varepsilon}(x^1,\dots,x^{n-1};\quad r_1,\dots,r_{n-1}),\ n=2,\dots,N^{\varepsilon},$$
$$\int_{\Omega}\int_0^{\infty}\dots\int_{\Omega}\int_0^{\infty} f_n^{\varepsilon}(x^1,\dots,x^n;\quad r_1,\dots,r_n)\,dx^1 dr_1\dots dx^n dr_n=1,\ n=1,\dots,N^{\varepsilon}.$$

Поскольку шары не должны пересекаться друг с другом и с границей $\partial\Omega$, то эти функции должны также удовлетворять условию

$$f_n^{\varepsilon}(x^1,\dots,x^n;\quad r_1,\dots,r_n)=0,$$

если для некоторых $i\neq j\quad (i,j=1,\dots,n)\left|x^{i\varepsilon}-x^{j\varepsilon}\right|<r_i+r_j$ или для некоторого $i=1,\dots,n$: $\operatorname{dist}(x^{i\varepsilon},\partial\Omega)\leqslant r_i$.

Одночастичную и двухчастичную функции распределения f_1^{ε} и f_2^{ε} выберем такими, чтобы для них выполнялись следующие условия:

$$b_1)\ \ f_1^{\varepsilon}(x;r)=\varepsilon^{-\alpha}f(x;\varepsilon^{-\alpha}r),$$

где параметр $\alpha>2$, $f(x;\ \ r)\in L^{\infty}(\Omega\times[0,\infty))$ — неотрицательная функция с компактным носителем $\Omega'\times[a_0,A_0]$ в $\Omega\times[0,\infty)$ $(0<a_0<A_0<\infty)$, нормированная на 1 в $L^1(\Omega\times[0,\infty))$;

$$b_2)\ \ f_2^{\varepsilon}(x^1,x^2;\,r_1,r_2)=f_1^{\varepsilon}(x^1;\,r_1)\cdot f_1^{\varepsilon}(x^2;\,r_2)+\phi^{\varepsilon}(x^1,x^2;\,r_1,r_2),$$

где функция $\phi^{\varepsilon}(x^1,x^2;\,r_1,r_2)=-f_1^{\varepsilon}(x^1;\,r_1)\cdot f_1^{\varepsilon}(x^2;\,r_2)$ при $\left|x^{i\varepsilon}-x^{j\varepsilon}\right|<r_i+r_j$ и при $\varepsilon<<1$ в среднем мала так, что при $\forall\tau_1,\tau_2\geqslant 0$

$$\int_{\Omega}\int_0^{\infty}\dots\int_{\Omega}\int_0^{\infty} r_1^{\tau_1}r_2^{\tau_2}\left|\varphi^{\varepsilon}(x^1,x^2;\quad r_1,r_2)\right|dx^1dr_1dx^2dr_2<C\varepsilon^{\alpha(\tau_1+\tau_2+3)}.$$

Замечание 1. Из условия b_1 следует, что с вероятностью 1 шары B_i^{ε} имеют радиусы, удовлетворяющие неравенству $a_0\varepsilon^{\alpha}\leqslant r_i^{\varepsilon}\leqslant A_0\varepsilon^{\alpha}\ \ (\alpha>2)$, и не пересекаются с границей $\partial\Omega$. В силу условия b_2 шары B_i^{ε} с вероятностью 1 не пересекаются друг с другом и располагаются на расстояниях, больших чем $2A_0\varepsilon^{\alpha}$, и они распределены почти независимо. Таким образом условие b_2 является аналогом условия ослабленной корреляции [3].

При $\forall\varepsilon>0$ функции распределения (2) порождают вероятностную меру P^{ε} на вероятностном пространстве $G^{\varepsilon}=\{G^{\varepsilon},\Sigma^{\varepsilon},P^{\varepsilon}\}$, точки $\omega^{\varepsilon}\in G^{\varepsilon}$ которого взаимно однозначно сопоставляются случайным областям Ω^{ε}. Здесь Σ^{ε} — σ-алгебра P^{ε}-измеримых подмножеств в G^{ε} [2, 4].

Рассмотрим в случайной области Ω^{ε} краевую задачу (1). Обобщённое решение этой задачи $u^{\varepsilon}(x)$ зависит от точки ω^{ε} вероятностного пространства G^{ε}, т.е. является случайной функцией $u^{\varepsilon}(x)=u^{\varepsilon}(x,\omega^{\varepsilon})$. Её измеримость относительно σ-алгебры Σ^{ε} следует из того, что продолженное нулём на множество $\Omega \setminus \Omega^{\varepsilon}$ решение $u^{\varepsilon}(x)$ при $\forall \varepsilon > 0$ в метрике $L^2(\Omega)$ непрерывно зависит от координат центров и радиусов шаров B_i^{ε}, $i = 1, \ldots, N^{\varepsilon}$.

При сделанных выше предположениях относительно функций распределения $f_n^{\varepsilon}(x^1, \ldots, x^n; r_1, \ldots, r_n)$, $n = 1, \ldots, N^{\varepsilon}$, случайное решение $u^{\varepsilon}(x, \omega^{\varepsilon})$ задачи (1), продолженное нулём на $\Omega \setminus \Omega^{\varepsilon}$, при $\varepsilon \to 0$ сходится в метрике $L^2(\Omega)$ по вероятности к неслучайной функции $u(x) \in H^1(\Omega)$, т. е. $\forall \delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P^{\varepsilon} \left\{ \omega^{\varepsilon} \in G^{\varepsilon} : \int_{\Omega} \left| u(x, \omega^{\varepsilon}) - u(x) \right|^2 dx < \delta \right\} = 1. \tag{3}$$

При этом предельная функция является обобщенным решением следующей усреднённой задачи:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + C_u(x, u) = F(x), x \in \Omega, \\ u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

где $C_u(x, u) = \dfrac{\partial}{\partial u} C(x, u)$ и функция $C(x, u)$ характеризует эффективное поглощение мелкозернистой границы S^{ε} области Ω^{ε}.

Функции $C(x, u) > 0$ зависят от параметров $(\alpha, \beta) \in \Lambda = \{2 < \alpha \leqslant 3, \beta \geqslant 3 - 2\alpha\} \cup \{\alpha > 3, -\infty < \beta < +\infty\}$ (рис. 1), характеризующих размеры шаров B_i^{ε} и интенсивность поглощения на их поверхности S_i^{ε}.

Обозначим через $\ell_1, \ell_2, \lambda_0$ участки границы области Λ такие, что $\ell_1 = \{2 < \alpha < 3, \beta = 3 - 2\alpha\}$, $\ell_2 = \{\alpha = 3, \beta < -\alpha\}$, $\lambda_0 = \{\alpha = 3, \beta = -3\}$ и введём функции зависящие от аргументов $x \in \Omega$, $u \in R^1$, $r \in [a_0, A_0]$:

$$C_{\alpha\beta}(x, u; r) = \begin{cases} 2\pi r^2 g(x, u), \quad (\alpha, \beta) \in \ell_1; \\ 2\pi r [u - V]^2 + 2\pi r^2 g(x, V), \quad (\alpha, \beta) = \lambda_0; \\ 2\pi r u^2, \quad (\alpha, \beta) \in \ell_2; \\ 0, \quad (\alpha, \beta) \in \Lambda \setminus (\ell_1 \cup \ell_2 \cup \lambda_0). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь

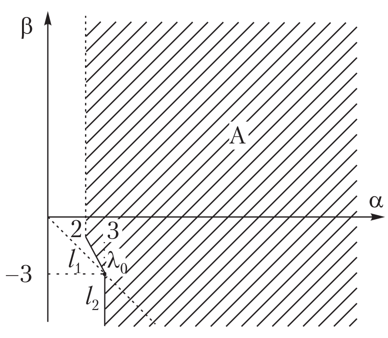
$$g(x, u) = 2\int_0^u \sigma(x, s)\, ds, \tag{6}$$

$V = V(x, u; r)$ — решение уравнения

$$V = u - r\sigma(x, V), \tag{7}$$

и $\sigma(x, s)$ — плотность по.глощения на поверхности шаров S^{ε} (см. задачу (1)). В силу свойств функции $\sigma(x, s)$ уравнение (7) имеет единственное решение.

Пространственное распределение плотности поглощения в области Ω зададим с помощью функции



Область изменения параметров

$$C(x,u)=\int_0^\infty C_{\alpha\beta}(x,u;r)f(x;r)\,dr, \tag{8}$$

где $f(x;r)$ — функция, введенная в условии b_1.

Из (5)—(8) и свойств функции $\sigma(x,s)$ следует, что

$$C(x,u)\in L^\infty(\Omega, C^2(R^1)) \text{ и } \frac{\partial^2 C(x,u)}{\partial u^2}\geqslant 0,$$

и поэтому функция $C_u(x,u)=\dfrac{\partial}{\partial u}C(x,u)$ удовлетворяет неравенству

$$((C_u(x,u_2)-C_u(x,u_1))(u_2-u_1)\geqslant 0,$$

которое гарантирует единственность решения задачи (4).

Таким образом, справедлива следующая теорема, являющаяся основным результатом этой работы.

Теорема **2.** *Пусть функции распределения* f_1^ε, f_2^ε *удовлетворяют условиям* b_1, b_2. *Тогда обобщённое решение* $u^\varepsilon(x)$ *задачи* (1), *продолженное нулём на* $\Omega\setminus\Omega^\varepsilon$, *является случайной функцией* $u(x,\omega^\varepsilon)$, *которая при* $\varepsilon\to 0$ *в метрике* $L^2(\Omega)$ *сходится по вероятности* P^ε *(в смысле* (3)*) к решению* $u(x)$ *краевой задачи* (4).

Доказательство этой теоремы проводится методом, развитым в работах [5, 6] с использованием результата работы [7].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наук. думка, 1974. 278 с.
2. Ширяев А.Н. Вероятность-1. Москва: МЦНМО, 2004. 520 с.
3. Боголюбов Н.Н. Избранные труды. В 3 т. Т. 2. Киев: Наук. думка, 1970. 522 с.
4. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: Вища шк., 1973. 408 с.
5. Berlyand L.V., Khruslov E.Ya. Ginzburg—Landau model of a liquid crystal with random inclusions. *J. Math. Phys.* 2005. **46**. 095107, 15 p.
6. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Усреднённые модели микронеоднородных сред. Киев: Наук. думка, 2005. 551 с.
7. Хилькова Л.А. Усреднение уравнения диффузии в областях с мелкозернистой границей с нелинейным граничным условием типа Робена. *Вісник Харків. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математика, прикладна математика і механіка.* 2016. **84**. С. 93—111.

Поступило в редакцию 27.05.2017

REFERENCES

1. Marchenko, V. A. & Khruslov, E. Ya. (1974). Boundary-value problems in domains with a fine-grained boundary. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
2. Shiryaev, A. N. (2004). Probability-1. Moscow: MTsNMO (in Russian).
3. Bogolyubov, N. N. (1970). Selected works. Vol. 2. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
4. Gikhman, I. I., Skorokhod, A. V. & Yadrenko, M. I. (1973). Theory of Probability and Mathematical Statistics. Kiev: Vyshcha shkola (in Russian).

5. Berlyand, L. V. & Khruslov, E. Ya., (2005). Ginzburg—Landau model of a liquid crystal with random inclusions. J. Math. Phys., 46, 095107, 15 p.
6. Marchenko, V. A. & Khruslov, E. Ya. (2005). Homogenized models of micro-inhomogeneous media. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
7. Khilkova, L. O. (2016). Homogenization of the diffusion equation in domains with the fine-grained boundary with the nonlinear boundary Robin condition. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Math., Appl. Math. and Mech., 84, pp. 93-111 (in Russian).

Received 27.05.2017

Є.Я. Хруслов [1], *Л.О. Хількова* [2]

[1] Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України, Харків
[2] Інститут хімічних технологій Східноукраїнського національного університету ім. Володимира Даля, Рубіжне
E-mail: Khruslov@ilt.harkov.ua, LarisaHilkova@gmail.com

НЕЛІНІЙНА ЗАДАЧА РОБЕНА В ОБЛАСТЯХ
З ДРІБНОЗЕРНИСТОЮ ВИПАДКОВОЮ МЕЖЕЮ

Розглядається крайова задача для рівняння стаціонарної дифузії в області $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon$, додаткової великому числу дрібних зерен B_i^ε ($i = 1, \ldots, N^\varepsilon$), на поверхні яких задана нелінійна гранична умова типу Робена. Припускається, що ці зерна є дрібними кульками, які випадково розподілені у фіксованій області $\Omega \in R^3$ і мають випадкові радіуси. Функція розподілу $f^\varepsilon(x, r)$ центрів $x^{i\varepsilon}$ і радіусів r_i^ε куль залежить від малого параметра $\varepsilon > 0$ так, що середня відстань між найближчими центрами має порядок $O(\varepsilon)$, а середній радіус — порядок $O(\varepsilon^\alpha)$ $(\alpha > 2)$. Доведено, що при $\varepsilon \to 0$ випадковий розв'язок задачі $u^\varepsilon(x)$ за ймовірністю збігається в метриці $L^2(\Omega)$ до невипадкової функції $u(x)$, для якої отримано усереднене рівняння.

Ключові слова: *усереднення, стаціонарна дифузія, крайова умова Робена, випадковий розподіл.*

E.Ya. Khruslov [1], *L.A. Khilkova* [2]

[1] B.I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NAS of Ukraine, Kharkiv
[2] Institute of Chemical Technologies of the Volodymyr Dahl East Ukrainian National University, Rubizhne
E-mail: Khruslov@ilt.harkov.ua, LarisaHilkova@gmail.com

ROBIN'S NONLINEAR PROBLEM IN DOMAINS
WITH A FINE-GRAINED RANDOM BOUNDARY

We consider the boundary-value problem for the stationary diffusion equation in the domain $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} B_i^\varepsilon$, which is additional to the large number of fine grains B_i^ε ($i = 1, \ldots, N^\varepsilon$). The Robin's nonlinear boundary condition is given on the grain surfaces. We assume that these grains are small balls, which are randomly distributed in a fixed domain $\Omega \in R^3$ and have random radii. The distribution function $f^\varepsilon(x, r)$ of the centers $x^{i\varepsilon}$ and of the radii r_i^ε of the balls depends on the small parameter $\varepsilon > 0$ so that a mean distance between the nearest centers is $O(\varepsilon)$, and the mean radius is $O(\varepsilon^\alpha)$ $(\alpha > 2)$. It is proved that, as $\varepsilon \to 0$, the random solution of the problem $u^\varepsilon(x)$ converges in probability in the metric of the space $L^2(\Omega)$ to the nonrandom function $u(x)$, for which a homogenized equation is constructed.

Keywords: *homogenization, stationary diffusion, Robin's boundary condition, random distribution.*