ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.08.027
УДК 534.22-18

В.Н. Олійник

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ
E-mail: v_oliynik@yahoo.com

Дисперсія хвиль у системі пружних стержнів, періодично підкріплених гнучкими елементами

Представлено академіком НАН України В.Т. Грінченком

Досліджено хвильові властивості періодичної структури, утвореної двома паралельними нескінченними пружними стержнями, підкріпленими періодично розташованими шарнірно опертими гнучкими балками. Для випадків синфазного і протифазного поздовжнього руху стержнів методом Флоке одержані дисперсійні рівняння та визначена фазова швидкість гармонічної хвилі , яка може поширюватись у розглянутій системі. Показано, що такій хвилі притаманна значна дисперсія, обумовлена збудженням згинних мод поперечних балок у відповідних частотних діапазонах.

Ключові слова: *фазова швидкість, дисперсія, пружна періодична структура, згинні коливання, метод Флоке.*

Періодичні пружні структури з розташованих регулярним чином ідентичних елементів — традиційний об’єкт теоретичних і прикладних досліджень у різних галузях фізики [1, 2]. Вони набули широкого застосування, насамперед, в електроніці й гідроакустиці [3, 4]. Нерідко періодичну будову мають металеві ферми мостів, баштових кранів, опори антен телекомунікаційних систем тощо. Розуміння особливостей поширення хвиль у таких конструкціях важливе для пояснення їхніх динамічних і міцнісних характеристик.

Дослідження хвильових властивостей структур з періодично повторюваних акусто- чи гідропружних елементів дає можливість встановити аналогії між їхньою поведінкою й поведінкою пористих середовищ, які складаються з пружної матриці, заповненої рідиною або газом. Такий підхід видається доволі багатообіцяючим при трактуванні природи хвиль, які поширюються у паренхіматозних біологічних тканинах на низьких частотах [5].

Один із найпростіших і водночас змістовних з фізичної точки зору прикладів періодичних пружних структур — системи багатократно підкріплених паралельних стержнів. Їхній аналіз у ряді випадків дозволяє одержати точні аналітичні вирази для дисперсійних рівнянь і дає змогу зробити важливі модельні оцінки можливих значень фазових швидкостей і діапазонів поширення хвиль [6—8].

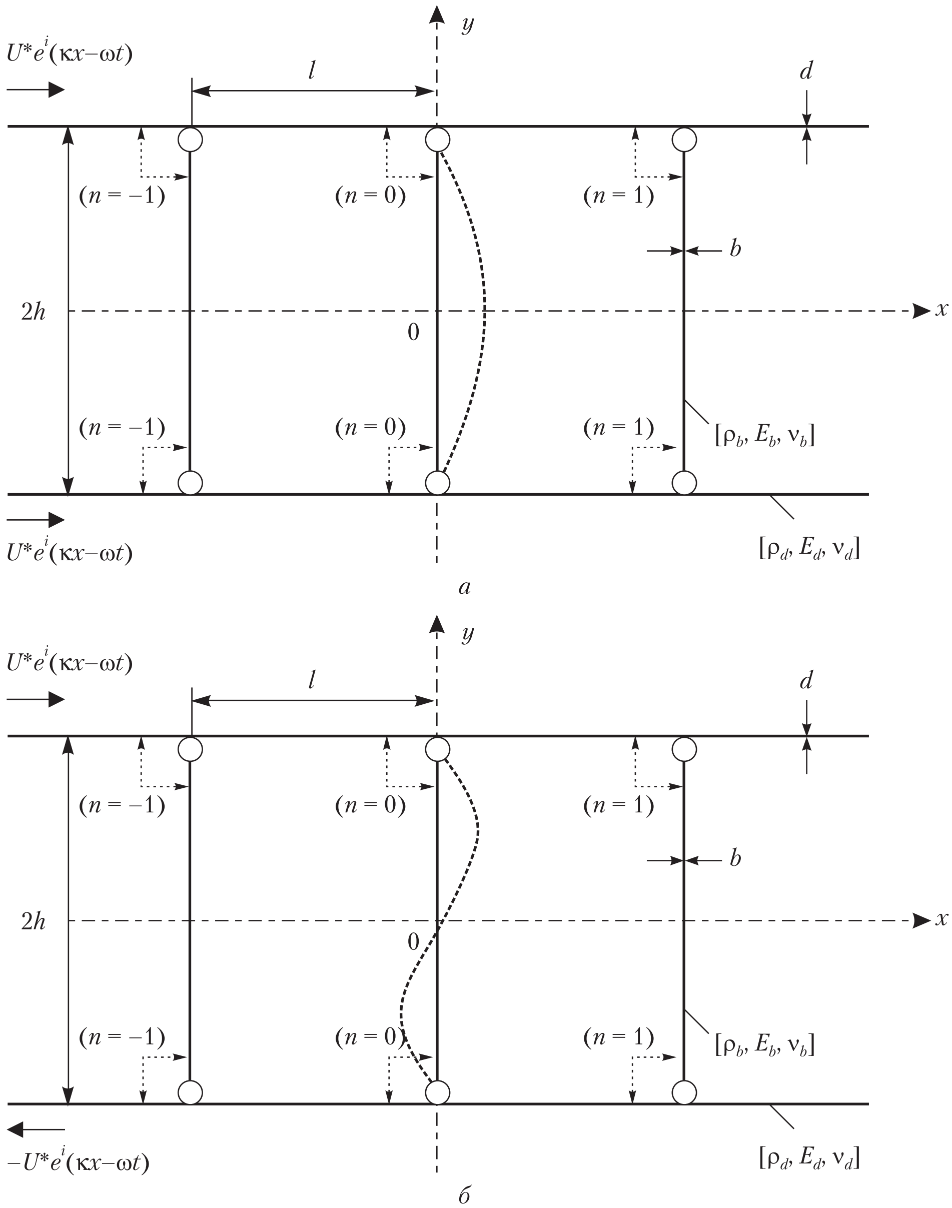

Рис. 1. Модельна періодична структура: *а* — при симетричному збудженні; *б* — при антисиметричному збудженні

Зауважимо, що при розгляді періодичних ґраток з тонкостінних елементів природно враховувати можливість поперечного деформування останніх. Воно може призводити до істотної зміни хвилевідних властивостей таких структур за рахунок інтенсивного збудження додаткових внутрішніх ступенів вільності. Спробу такого аналізу було зроблено в публікації [5], проте використана при цьому математична постановка граничної задачі потребує певного уточнення. Виходячи з цих міркувань, у цьому дослідженні пропонується розв’язок більш простої, чисто пружної задачі про поширення хвиль у системі підкріплених гнучкими балками стержнів без урахування наявності акустичного середовища.

Постановка задачі та її розв'язання. У двовимірній постановці розглянемо поширення гармонічної хвилі з циклічною частотою ω в системі двох нескінченних паралельних стержнів товщини d, періодично з кроком l підкріплених шарнірно спертими перпендикулярними балками товщини b і ширини $2h$. Для визначеності вважаємо, що хвиля біжить зліва направо вздовж осі x. Виділимо два випадки: симетричний, коли обидва стержні коливаються синфазно (див. рис. 1, *а*) і антисиметричний, коли нижній стержень коливається у протифазі до верхнього (див. рис. 1, *б*).

Впорядкуємо позначення, приписавши кожній з балок певний номер: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ При цьому вважатимемо, що між $(n-1)$-ою і n-ою балками розташовано n-й відрізок стержня.

У загальному випадку слід шукати умови існування біжучої хвилі у формі $U^* e^{i(\kappa x - \omega t)}$. Тут $\kappa = \omega / c$ — хвильове число, а c — її фазова швидкість. Ми постулюємо лінійність системи, тому амплітудний множник U^* можна покласти рівним одиниці. Оскільки йдеться про процес, що встановився, зміна усіх фізичних полів у часі має вигляд $e^{-i\omega t}$, що традиційно дозволяє відкидати експоненційний часовий множник, працюючи надалі з амплітудними величинами.

Вважаємо, що матеріалу стержнів притаманні густина, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона $\rho_d, E_d,$ і ν_d, а балкам — $\rho_d, E_d,$ і ν_d відповідно.

Нехай стержні здійснюють виключно поздовжні коливання, яким у випадку планарної деформації відповідає рівняння руху:

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} + k_d^2 u_n = 0, \quad k_d = \frac{\omega}{c_d}, \quad c_d = \sqrt{\frac{E_d}{(1-\nu_d)\rho_d}}.$$

Для зміщень стержнів шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u_n(x) = U_{1n} e^{ik_d x} + U_{2n} e^{-ik_d x}.$$

Обраний характер симетрії задачі дозволяє надалі обмежитись розглядом лише зміщень верхнього стержня.

Як уже зазначалось, вертикальні перегородки є балками, здатними деформуватися на згин:

$$\frac{d^4 w_n}{dy^4} - k_b^4 w_n = 0, \quad k_b^4 = \frac{\omega^2 \rho_b b}{D_b}, \quad D_b = \frac{E_b b^3}{12(1-\nu_b^2)}.$$

Структура виразу для хвильових чисел k_b свідчить про те, що балкам, на відміну від стержнів, притаманна дисперсія, тобто залежність швидкості поширення хвилі від частоти. Це дозволяє очікувати прояву дисперсійних властивостей розглянутою системою в цілому.

Оскільки ми обмежились розглядом шарнірного закріплення балок, можна одразу записати загальний розв'язок для їхніх прогинів у вигляді:

$$w_n(y) = \begin{cases} W_n \left(\dfrac{\cos k_b y}{\cos k_b h} + \dfrac{\operatorname{ch} k_b y}{\operatorname{ch} k_b h} \right) - & \text{синфазний рух стержнів;} \\[2ex] W_n \left(\dfrac{\sin k_b y}{\sin k_b h} + \dfrac{\operatorname{sh} k_b y}{\operatorname{sh} k_b h} \right) - & \text{протифазний рух стержнів.} \end{cases}$$

Невідомі сталі у виразах для зміщень можуть бути визначені з граничних умов. У нашому випадку вони трактуються як система умов спряження кінематичних і динамічних величин у вузлах закріплення балок:

$$u_n\big|_{x=nl} = u_{n+1}\big|_{x=nl} = w_n\big|_{y=h},$$

$$\frac{2dE_d}{1-\nu_d}\left(\frac{du_n}{dx} - \frac{du_{n+1}}{dx}\right)_{x=nl} - D_b \left.\frac{d^3 w_n}{dy^3}\right|_{y=h} = 0.$$

Підставивши вирази у співвідношення і виключивши за допомогою кінематичної умови для прогину балок коефіцієнт W_n, одержимо однорідну алгебраїчну систему відносно невизначених сталих у зміщеннях стержня:

$$U_{1(n-1)} + U_{2(n-1)} - U_{1n} - U_{2n} = 0,$$

$$(1+2i\xi)U_{1(n-1)} - (1-2i\xi)U_{2(n-1)} - U_{1n} + U_{2n} = 0.$$

Легко показати, що тут

$$\xi = \xi_0 F(k_b h), \quad \xi_0 = \frac{\bar{m}_b}{4\bar{m}_d}, \quad \bar{m}_b = \rho_b hb, \quad \bar{m}_d = \rho_d ld,$$

$$F(k_b h) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{th} k_b h + \mathrm{tg} k_b h}{2k_b h} & \text{— синфазний рух стержнів;} \\ \dfrac{\mathrm{cth} k_b h - \mathrm{ctg} k_b h}{2k_b h} & \text{— протифазний рух стержнів.} \end{cases}$$

Слід зазначити, що пошук розв'язку сформульованої задачі у вигляді біжучої хвилі вздовж осі x з невідомою швидкістю c і можливою модуляцією амплітуди в поперечному напрямку y еквівалентний застосуванню метода Флоке [2, 4]. У його рамках записану систему функціональних співвідношень слід доповнити умовою періодичності фізичних полів у вузлах з номерами $(n-1)$ і n, як це було зроблено в роботах [5, 7, 8]:

$$U_{1n} = U_{1(n-1)} e^{i\kappa l} e^{-ik_d l}, \quad U_{2n} = U_{2(n-1)} e^{i\kappa l} e^{ik_d l}.$$

Така підстановка дозволяє, прирівнявши характеристичний визначник результуючої алгебраїчної системи до нуля, прийти до дисперсійного рівняння, яке визначає дозволені значення довжини хвилі на даній частоті:

$$e^{2i\kappa l} - 2e^{i\kappa l}(\cos k_d l - \xi k_d l \sin k_d l) + 1 = 0$$

Шукане значення фазової швидкості хвилі дається найменшим додатним розв'язком дисперсійного рівняння :

$$c = \frac{1}{l}\arccos(\cos k_d l - \xi k_d l \sin k_d l).$$

Аналіз результатів. Надалі вважатимемо $\rho_b = \rho_d, E_b = E_d, \nu_b = \nu_d, 2h = l, b = 2d$ У цьому випадку відношення погонних мас буде $\xi_0 = 1$, а кількість параметрів значно скорочується. При числовому аналізі задамо значення фізичних параметрів типові для середовищ з дуже низькою жорсткістю на зсув — біоматеріалів, деяких ґум і пластиків. Зокрема, нехай $\rho_b = 1100$ кг/м^3, $E_b = 2\cdot 10^5$ Па, $\nu_b = 0,49$ при характерних розмірах $2h = 4\cdot 10^{-4}$ м і $b = 5\cdot 10^{-6}$ м, притаманних, наприклад, найдрібнішим структурним елементам легеневої тканини — альвеолам. При таких параметрах система повною мірою демонструє основні риси своєї поведінки вже в області $k_d l < 1$.

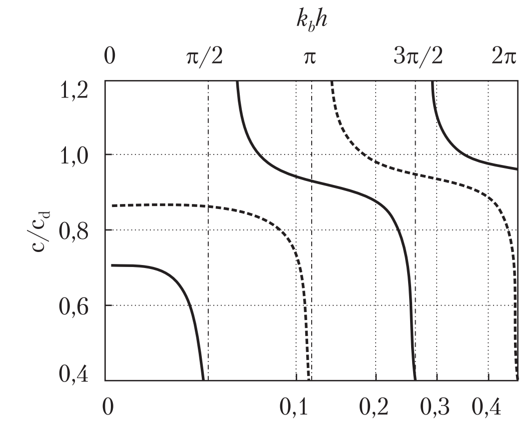

Рис. 2. Залежність фазової швидкості поширення гармонічної хвилі у модельній періодичній структурі від її хвильових чисел: неперервна — при симетричному збудженні; штрихова — при антисиметричному збудженні

На рис. 2 зображено залежності шуканої фазової швидкості поширення хвилі в системі від хвильових розмірів $k_d l$ і $k_b h$ при синфазному і протифазному збудженні стержнів (неперервна і штрихова криві відповідно).

Зауважимо, що для обох випадків спостерігається певна подібність поведінки системи. При $k_d l, k_b h << 1$ значення фазової швидкості c залишається майже сталим. Природно, що $c < c_d$, оскільки на частотах, значно нижчих за першу власну частоту, кінематично збуджувані балки деформуються слабо і коливаються практично як єдине ціле. У такому разі вони відіграють роль пасивних інерційних добавок, які збільшують ефективну масу стержнів.

Варто зазначити, що при протифазному збудженні стержнів низькочастотне значення швидкості c виявилось вищим, ніж при синфазному. Ця різниця обумовлена відмінністю типів коливань поперечних балок в обох випадках. Дійсно, при синфазному збудженні вони здійснюють зворотно-поступальні рухи і тут $\xi_0 \to 1$. Якщо ж стержні рухаються у протифазі, то балки обертаються навколо осей, що проходять через центральні перерізи, тому в цьому випадку відповідні приєднані маси будуть меншими: $\xi_0 \to 1/3$.

При наближенні хвильових розмірів системи до значень, що відповідають власним частотам балок, спостерігаються резонансні ефекти, пов'язані з інтенсивним збудженням їхніх згинних коливань. Зі структури загальних розв'язків для прогинів $w_n(y)$ випливає, що при синфазному збудженні стержнів це відбувається при $(k_w h)_{res} \approx \pi(2N+1)/2$, а при протифазному – при $(k_w h)_{res} \approx \pi N$, де N — натуральне число. При наближенні до $(k_w h)_{res}$ механічний імпеданс балки необмежено зростає. При цьому в дорезонансній смузі він має характер маси, збільшення якої призводить до гальмування системи і спадання швидкості поширення хвилі c до нуля. Одразу після резонансу імпеданс балки змінює характер і вона вже поводить себе як пружність. Завдяки цьому необмежено зростає ефективна пружність системи в цілому, що зумовлює стрибок другого для величини c. З подальшим збільшенням хвильового розміру (частоти) реактивна складова імпедансу балки знову змінює тип на масовий і все повторюється в околі наступного резонансу. При цьому в кожній наступній смузі пропускання фазова швидкість потроху зростає, асимптотично наближаючись знизу до c_d при $k_d l, k_b h \to \infty$. Таким чином, фазова швидкість досліджуваної хвилі демонструє сильну дисперсію.

Слід зауважити, що необмежене зростання імпедансу і фазової швидкості викликане ідеалізацією постановки задачі. При врахуванні механічних втрат у матеріалах балок і стержнів чи в опорах шукані хвильові числа стають комплексними, а стрибки фізичних величин при переході через резонанс – обмеженими. Окрім того, наявність механічного загасання обмежує можливість поширення хвилі вздовж напрямку x на високих частотах. Якщо ж урахувати, що реальні структури не бувають ідеально періодичними, а завжди мають локальні нерегулярності, пов'язані з варіаціями фізичних і геометричних параметрів, то слід визнати, що практичне значення має лише низькочастотна смуга пропускання — до першого резонансу балок.

Таким чином, нами показано, що в структурі, утвореній двома паралельними нескінченними пружними стержнями, періодично підкріпленими гнучкими балками, може поширюватись гармонічна хвиля з фазовою швидкістю, яка визначається комбінацією геометричних і фізичних параметрів елементів структури. Виведено дисперсійне рівняння і знайдено дозволені значення швидкості поширення хвилі при симетричному й антисиметричному збудженні стержнів. Встановлено, що фазові швидкості для обох розглянутих випадків матимуть різні значення за рахунок різниці в характері коливань балок. Визначено низькочастотні асимптотики фазової швидкості, а також особливості її поведінки в околах згинних резонансів балок. Продемонстровано, що при поширенні хвиль у таких системах спостерігається сильна дисперсія. Важливо наголосити, що дисперсійні властивості системи в цілому виявились якісно відмінними від дисперсійних властивостей її складових. Таким чином, розгляд динамічної поведінки модельних ґратчастих структур може бути корисним при аналізі й прогнозуванні механічних властивостей композитних матеріалів з пористою будовою.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Brillouin L., Parodi M. Wave propagation in periodic structures. New York: Dover, 1946. 255 p.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. Москва: Наука, 1973. 344 с.
3. Силин Р.А. Электромагнитные волны в искусственных периодических структурах. *Успехи физ. наук*. 2006. **175**. С. 562—565. doi: https://doi.org/10.3367/UFNr.0176.200605j.0562
4. Heckl M.A. Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structures. *J. Acoust. Soc. Am.* 1964. **36**, № 7. P. 1335—1343. doi: http://dx.doi.org/10.1121/1.1919206
5. Олійник В. Н. Про дисперсію хвиль деяких типів у легеневій паренхімі. *Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки*. 2015. Спецвипуск. С. 189—192.
6. Mead D.J. Free wave propagation in periodically supported, infinite beams. *J. Sound Vib*. 1970. **11**, № 2. P. 181—197. doi: https://doi.org/10.1016/S0022-460X(70)80062-1
7. Олійник В.Н. Поширення хвиль у системі двох паралельних стержнів, періодично підкріплених жорсткими поперечними перегородками і зв'язаних з акустичним середовищем. *Акуст. вісн.* 2008. **11**, № 1. С. 60—67.
8. Олійник В.Н. Антисиметричні хвилі в системі двох паралельних стержнів, періодично підкріплених жорсткими поперечними перегородками і зв'язаних з акустичним середовищем. *Акуст. вісн.* 2008. **11**, № 2. С. 36—44.

Надійшло до редакції 12.03.2017

REFERENCES

1. Brillouin, L. & Parodi, M. (1946) Wave propagation in periodic structures. New York: Dover.
2. Brekhovskikh, L. M. (1973) Waves in layered media, Moscow: Nauka (in Russian).
3. Silin, R. A. (2006). Electromagnetic waves in artificial periodic structures. Uspekhi Fiz. Nauk, 175, pp. 562-565 (in Russian). doi: https://doi.org/10.3367/UFNr.0176.200605j.0562
4. Heckl, M. A. (1964). Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structures. J. Acoust. Soc. Am., 36, No. 7, pp. 1335-1343. doi: http://dx.doi.org/10.1121/1.1919206
5. Oliynik, V. N. (2015). On the dispersion of waves of some types in pulmonary parenchyma. Visn. Taras Shevchenko Nat. Univ of Kyiv. Ser. Phys.-Math. Sci., Special iss., pp. 189-192 (in Ukrainian).
6. Mead, D. J. (1970). Free wave propagation in periodically supported, infinite beams. J. Sound Vib., 11, No. 2, pp. 181-197. doi: https://doi.org/10.1016/S0022-460X(70)80062-1

7. Oliynik, V. N. (2008). Wave propagation in the system of two parallel rods periodically supported by rigid transverse barriers and connected with an acoustic medium. Akust. Visn., 11, No. 1, pp. 60-67 (in Ukrainian).
8. Oliynik, V. N. (2008). Antisymmetric waves in the system of two parallel rods periodically supported by rigid transverse barriers and connected with an acoustic medium. Akust. Visn., 11, No. 2, pp. 36-44 (in Ukrainian).

Received 12.03.2017

В.Н. Олийнык

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
E-mail: v_oliynik@yahoo.com

ДИСПЕРСИЯ ВОЛН В СИСТЕМЕ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ,
ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ГИБКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Исследованы волновые свойства периодической структуры, образованной двумя параллельными бесконечными упругими стержнями, подкрепленными периодически расположенными шарнирно опертыми гибкими балками. Для случаев синфазного и противофазного движения стержней методом Флоке получены дисперсионные уравнения и определена фазовая скорость гармонической волны, которая может распространяться в рассматриваемой системе. Показано, что такой волне присуща значительная дисперсия, обусловленная возбуждением изгибных мод поперечных балок в соответствующих частотных диапазонах.

Ключевые слова: *фазовая скорость, дисперсия, упругая периодическая структура, изгибные колебания, метод Флоке.*

V.N. Oliynik

Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: v_oliynik@yahoo.com

THE DISPERSION OF WAVES IN A SYSTEM OF ELASTIC RODS
PERIODICALLY SUPPORTED WITH FLEXIBLE ELEMENTS

Wave properties of a periodic structure formed by two parallel infinite rods reinforced by periodically placed simply supported flexible bars are studied. In the cases of in-phase and anti-phase longitudinal motions of the rods, the dispersion equations are obtained by the Floquet method, and phase velocity values are determined for a harmonic wave propagating in the considered system. A significant dispersion is shown to be inherent to this wave due to exciting the bending modes of the bars in the corresponding frequency ranges.

Keywords: *phase velocity, dispersion, periodic elastic structure, bending vibrations, Floquet method.*