ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.04.003
УДК 517.5 + 513.83

Х.К. Дакхіл[1], Ю.Б. Зелінський[2], Б.А. Кліщук[2]

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
[2] Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: moon5385@gmail.com, zel@imath.kiev.ua, bogdanklishchuk@mail.ru

Про слабко *m*-опуклі множини

Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю.Ю. Трохимчуком

Досліджено деякі властивості слабко m-опуклих множин. Отримано оцінки для різних варіантів задачі про тінь в фіксованій точці. Побудовано приклад, що дає оцінку знизу необхідної кількості куль для створення тіні в точці, дотичної до сфери S^2 в просторі $\mathbb{R}^3$.

Ключові слова: *m-опукла множина, слабко m-опукла множина, грасманів многовид, спряжена множина, задача про тінь, 1-оболонка сім'ї множин.*

В статті досліджується задача про тінь в точці, дотичну до сфери $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Далі під m-вимірними площинами розуміємо m-вимірні афінні підпростори евклідового простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 1. Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ m-опукла відносно точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, якщо знайдеться m-вимірна площина L, така що $x \in L$ і $L \cap E = \varnothing$.

Означення 2. Скажемо, що відкрита множина $G \subset \mathbb{R}^n$ слабко m-опукла, якщо вона m-опукла відносно кожної точки $x \in \partial G$, яка належить межі множини G. Скажемо, що довільна множина $E \subset \mathbb{R}^n$ слабко m-опукла, якщо її можна апроксимувати ззовні сім'єю відкритих слабко m-опуклих множин.

Легко побудувати приклад слабко m-опуклої, але не m-опуклої множини.

Приклад 1. Нехай $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ — відкритий круг на площині xOy. Виберемо три точки на колі $S^1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ і розглянемо симплекс σ з вершинами в цих точках. Неважко переконатися, що множина $E = B \setminus \sigma$ слабко 1-опукла, але не 1-опукла.

В роботах [1—3] досліджено деякі властивості слабко m-опуклих та m-опуклих множин.

Нехай $G(n, m)$ — грасманів многовид m-вимірних площин в $\mathbb{R}^n$ [4]. Спряженою множиною E^* до множини E називається підмножина m-вимірних площин в $G(n, m)$, які не перетинають множину E.

Дослідимо деякі властивості слабко m-опуклих множин.

Твердження 1. *Якщо E_1 і E_2 відповідно слабко k-опукла і слабко m-опукла множина, $k \leqslant m$, то $E = E_1 \cap E_2$ буде слабко k-опуклою множиною.*

Теорема 1. *Якщо K — слабко m-опуклий компакт і множина K^* зв'язна, то для перерізу K довільною $(n-m)$-вимірною площиною L множина $L \setminus K \cap L$ зв'язна.*

Доведення. Як встановлено в твердженні 2 [2] множина K^* є відкритою множиною, тому будь-які дві її точки можна з'єднати неперервною дугою в K^*. Припустимо, що існує така $(n-m)$-вимірна площина L, для якої множина $L \setminus K \cap L$ незв'язна. Отже переріз є носієм деякого ненульового $(n-m-1)$-мірного циклу z [4]. Нехай точка x належить обмеженій компоненті множини $L \setminus K \cap L$. Такі точки існують внаслідок компактності K. Не порушуючи загальності, на підставі слабкої m-опуклості K, можна вважати, що через точку x можна провести m-вимірну площину l_1, яка не перетинає K. Іншу m-вимірну площину l_2 проведемо за межами деякої досить великої кулі, що містить компакт K. Якщо ми компактифікуємо простір $\mathbb{R}^n$ до сфери S^n нескінченно віддаленою точкою, то отримаємо два m-мірні цикли $w_1 = l_1 \cup (\infty)$ та $w_2 = l_2 \cup (\infty)$, з яких перший цикл зачеплений з циклом z, а другий ні. З одного боку, ці цикли не можна перевести гомотопією один в інший, яка не перетинала б цикл z, а, отже і множину $K \cap L$. З другого боку, зв'язність множини K^* забезпечує існування в K^* пари точок y_1, y_2, які задають площини l_1 і l_2 відповідно і з'єднані дугою в K^*. Точки цієї дуги задають гомотопію площини l_1 в l_2, яка не має спільних точок з множиною $K \cap L$. Отримане протиріччя доводить теорему.

В роботі [5] досліджено різні варіанти наступної задачі, яку популярно можна назвати задачею про тінь в точці.

Задача. Яка мінімальна кількість опуклих множин, які попарно не перетинаються і з деякими заданими умовами, достатня для того, щоби будь-яка пряма, що проходить через наперед задану точку, перетинала хоча б одну з цих множин?

Якщо цього досягти, то кажуть, що вибрана точка належить до 1-оболонки даної сім'ї множин.

Для набору куль різного радіуса в [5] отримана оцінка.

Теорема 2. *Для того щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geqslant 2$ належала 1-оболонці сім'ї відкритих (замкнутих) куль, які дану точку не містять і попарно не перетинаються, необхідно і достатньо n куль.*

Виявляється, що у випадку куль однакового радіуса результат відрізняється від випадку, коли кулі різних радіусів.

Теорема 3. *Довільний набір із трьох куль однакового радіуса, які попарно не перетинаються, утворює слабко 1-опуклу множину в тривимірному евклідовому просторі.*

Для набору з трьох куль в просторі $\mathbb{R}^n$ має місце твердження.

Теорема 4. *Для довільної точки простору $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{3} B_i$, де B_1, B_2, B_3 — набір з трьох куль однакового радіуса, які попарно не перетинаються і не проходять через цю точку, існує $(n-2)$-вимірна площина, що містить цю точку і не перетинає жодну з куль.*

Означення 3. Скажемо, що сім'я множин $\mathfrak{I} = \{F_\alpha\}$ задає тінь, дотичну до многовиду M в точці $x \in M$, якщо кожна пряма, дотична до многовиду M в точці $x \in M \setminus \bigcup_\alpha F_\alpha$, має непорожній перетин хоча б з однією з множин F_α, яка належить до сім'ї $\mathfrak{I}$.

Лема. *Розглянемо рівносторонній трикутник ABC в евклідовій площині $\mathbb{R}^2$. Якщо ми виберемо три круги B_i, $i = 1, 2, 3$, з центрами в вершинах цього трикутника і радіуса рівного половині висоти трикутника, то кожна пряма, що проходить через довільну точку*

$x \in \left(\bigcup_{i=1}^{3} B_i \right)^* \setminus \bigcup_{i=1}^{3} B_i$, де $\left(\bigcup_{i=1}^{3} B_i \right)^*$ — опукла оболонка множини $\bigcup_{i=1}^{3} B_i$, перетинається не менше ніж з одним із вибраних кругів.

Відмітимо, що коло, описане навколо цього трикутника, лежить в опуклій оболонці цих трьох кругів. Цей результат показує, що в тривимірному випадку для довільної точки сфери можна вибрати три кулі, які попарно дотикаються і які забезпечать тінь в усіх точках криволінійного трикутника, вирізаного на сфері цими кулями. Але, як показує наступний приклад, узгодження такої конструкції для всієї сфери вимагає додаткових міркувань.

Приклад 2. Існує набір із 14 відкритих (замкнутих) куль, що попарно не перетинаються з центрами на сфері $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, який не може забезпечити тінь, дотичну до сфери S^2 в кожній точці $x \in S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{14} B_i$.

Не порушуючи загальності, можемо припустити, що вибрана сфера S^2 з центром в початку координат радіуса одиниця. Впишемо в цю сферу куб з вершинами в точках $(x = \pm 1/\sqrt{3}, y = \pm 1/\sqrt{3}, z = \pm 1/\sqrt{3})$. Довжина ребра куба дорівнює $a = 2/\sqrt{3}$. Тепер виберемо вісім відкритих куль з центрами в вершинах куба і радіуса рівного половині ребра куба $r = 1/\sqrt{3} \approx 0{,}577$. Добавимо до цього набору шість нових відкритих куль з центрами в точках перетину променів, які виходять з початку координат і проходять через центр грані куба зі сферою S^2. Радіуси цих куль дорівнюють $r_1 = \sqrt{2 - 2/\sqrt{3}} - 1/\sqrt{3}$. Кожен з них доторкається рівно до чотирьох раніше вибраних куль. Цей набір куль двох різних радіусів покриває сферу, але, як показують обчислення, цієї системи куль не вистачає для створення тіні, дотичної до сфери S^2 в кожній точці $x \in S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{14} B_i$.

Побудований набір куль дає оцінку знизу необхідної кількості куль. Оцінка зверху залишається відкритою.

ЦИТОВАНА ДІТЕРАТУРА

1. Зелинский Ю.Б. Выпуклость. Избранные главы. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2012. 280 с.
2. Зелинский Ю.Б., Момот И.В. Об (n, m)-выпуклых множествах. *Укр. матем. журн.* 2001. **53**, № 3. С. 422—427.
3. Zelinskii Yu.B., Gretsky A.S., Momot I.V. Some results on generalized convex sets. *Classical analysis, Proceedings of 10-th intern. sympos.*, Poland, 1999. P. 113—124.
4. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Москва: Наука, 1977. 488 с.
5. *Зелинский Ю.Б*. Задача о тени для семейства множеств. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2015. **12**, № 4 С. 197—204.

Надійшло до редакції 18.01.2017

REFERENCES

1. Zelinskii, Yu. B. (2012). Convexity. Selected topics. Kiev: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine (in Russian).
2. Zelinskii, Yu. B., Momot, I. V. (2001). On the (n, m) convex sets. Ukr. Math. J., 53, No 3, pp. 422-427 (in Russian).
3. Zelinskii, Yu. B., Gretsky, A. S., Momot, I. V. Some results on generalized convex sets. Classical analysis, Proceedings of 10-th intern. sympos. Poland, 1999, pp. 113-124.
4. Rohlin, V. A., Fuks, D. B. (1977). Basic Topology Course. Moscow: Nauka (in Russian).
5. Zelinskii, Yu. B. (2015). The problem of shadow for family of sets. Zbirnyk prats' In-tu matematyky NAN Ukrainy, 12, No 4: 197-204 (in Russian).

Received 18.01.2017

Х.К. Дакхил [1], *Ю.Б. Зелинский* [2], *Б.А. Клищук* [2]

[1] Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
[2] Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: moon5385@gmail.com, zel@imath.kiev.ua, bogdanklishchuk@mail.ru

О СЛАБО m-ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ

Исследованы некоторые свойства слабо m-выпуклых множеств. Получены оценки для различных вариантов задачи о тени в фиксированной точке. Построен пример, который дает оценку снизу необходимого количества шаров для создания тени в точке, касательной к сфере S^2 в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Ключевые слова: *m-выпуклое множество, слабо m-выпуклое множество, грассманово многообразие, сопряженное множество, задача о тени, 1-оболочка семейства множеств.*

H. K. Dakhil [1], *Yu. B. Zelinskii* [2], *B. A. Klishchuk* [2]

[1] Taras Shevchenko National University of Kiev
[2] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: moon5385@gmail.com, zel@imath.kiev.ua, bogdanklishchuk@mail.ru

ON WEAKLY m-CONVEX SETS

Some properties of weakly m-convex sets are studied. Various variants of the problem of shadow are investigated. The lower bound for the number of balls that are necessary to create a shadow at a point tangential to sphere S^2 S^2 in the Euclidean space $\mathbb{R}^3$, is obtained.

Keywords: *m-convex set, weakly m-convex set, Grassmann manifold, conjugate set, problem of shadow, 1-hull of a family of sets.*