

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.03.022>

УДК 539.3

**А.М. Багно**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: alexbag2016@gmail.com

## **О квазилэмбовских волнах в системе: полупространство идеальной жидкости — упругий слой с начальными напряжениями**

*Представлено академиком НАН Украины А.Н. Гузем*

*На основании трехмерных линеаризованных уравнений теории упругости конечных деформаций для твердого тела и трехмерных линеаризованных уравнений Эйлера для идеальной сжимаемой жидкости построены дисперсионные кривые нормальных квазилэмбовских волн в гидроупругой системе в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние начальных напряжений в предварительно деформированном упругом слое, а также полупространства идеальной сжимаемой жидкости на фазовые скорости квазилэмбовских мод в гидроупругом волноводе. Числовые результаты приведены в виде графиков и дан их анализ.*

**Ключевые слова:** дисперсия волн, сжимаемый и несжимаемый упругие слои, полупространство идеальной сжимаемой жидкости, начальные напряжения.

Волны, распространяющиеся вдоль границы контакта жидкого полупространства и упругого слоя, являются в определенном смысле обобщением основательно исследованных основных типов акустических волн: Рэлея, Стоунли, Лява и Лэмба. Интерес к таким задачам связан с тем, что указанные волновые процессы являются определяющими и широко используются в таких областях, как сейсмология, акустоэлектроника, гидроакустика, дефектоскопия, нетравматические и неразрушающие ультразвуковые методы контроля и диагностики, а также и в других. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости и гидродинамики идеальной жидкости, приведены в [1, 2]. Значительное практическое использование поверхностных волн ставит задачу более полного учета реальных свойств сред. К числу таких факторов принадлежат начальные напряжения. Созданные целенаправленно, или, возникшие в результате технологических операций при изготовлении, они значительно влияют на волновые процессы. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом в телах начальных напряжений, приведены в [2–11].

В настоящей работе для исследования распространения нормальных волн в упругом слое, подверженном большим (конечным) начальным деформациям, и взаимодействующем с полупространством идеальной сжимаемой жидкости, привлекаются модели пред-

варительно напряженного тела и покоящейся идеальной сжимаемой жидкости. При этом используются трехмерные линеаризованные уравнения теории упругости конечных деформаций для упругого тела и трехмерные линеаризованные уравнения Эйлера для идеальной сжимаемой жидкости. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения упругого тела и жидкости, предложенные в работах [3–7].

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из упругого слоя, подверженного большим (конечным) начальным деформациям, и полупространства идеальной сжимаемой жидкости. Решение получим с привлечением трехмерных линеаризованных уравнений теории упругости при конечных деформациях для твердого тела и линеаризованных уравнений Эйлера для жидкости, находящейся в состоянии покоя.

Далее предположим, что изотропное нелинейно-упругое твердое тело, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, занимает объем  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 < z_2 \leq h$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  и контактирует с идеальной сжимаемой жидкостью, заполняющей полупространство:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 < z_2 \leq h$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $oz_3$ . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $oz_1z_2$ . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений движения упругого тела и жидкости при следующих динамических и кинематическом граничных условиях:

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=h} = 0; \tilde{Q}_2|_{z_2=h} = 0; \tilde{Q}_1|_{z_2=0} = 0; \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (1)$$

Здесь  $\tilde{Q}_i$  и  $\tilde{P}_i$  — составляющие напряжений, соответственно, в упругом теле и жидкости.

В дальнейшем воспользуемся представлениями общих решений, полученными в работах [3–7]. Для плоского случая общие решения будут иметь вид:

1) для упругого слоя из несжимаемого материала

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; u_2 = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \chi_1; q_i = \lambda_i^{-1}; \lambda_1 \lambda_2 = 1;$$

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \lambda_1^2 \left[ \lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 - \lambda_1 \lambda_2 q_1 q_2^{-1} (a_{12} + \mu_{12}) \right] \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \frac{\partial}{\partial z_2} \chi_1;$$

2) для упругого слоя из сжимаемого материала

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1;$$

3) для полупространства идеальной сжимаемой жидкости

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

где введенные функции  $\chi_i$  являются решениями следующих уравнений:

1) для упругого слоя из несжимаемого материала

$$\left[ \frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\lambda_2^4 q_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \frac{q_1 q_2^{-1} (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0) + q_1^{-1} q_2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) - 2\lambda_1 \lambda_2 (a_{12} + \mu_{12})}{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2} (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0) q_1 q_2^{-1}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} - \frac{\lambda_2^2 q_2^2 \rho}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^2 \partial t^2} \right] \chi_1 = 0;$$

2) для упругого слоя из сжимаемого материала

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

3) для полупространства идеальной сжимаемой жидкости

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0.$$

Выше приняты следующие обозначения:  $u_i$  — компоненты вектора перемещений упругого тела  $\mathbf{u}$ ;  $\rho$  — плотность материала упругого слоя;  $v_i$  — составляющие вектора возмущений скорости жидкости  $\mathbf{v}$ ;  $a_0$  — скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $\lambda_i$  — удлинения упругого слоя в направлениях координатных осей;  $a_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  — величины, определяемые из уравнений состояния и зависящие от вида упругого потенциала [3–7, 11];  $s_{ii}^0$  — начальные напряжения.

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений разыскиваем в классе бегущих волн

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)] \quad (j = \overline{1, 2}),$$

где  $k$  — волновое число;  $\omega$  — круговая частота;  $i^2 = -1$ .

В дальнейшем для каждой из гидроупругих систем решаем две задачи Штурма – Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также находим соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (1) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения, приравнивая определитель системы к нулю, получаем дисперсионные уравнения. Для упруго-жидкостной системы, упругий слой которой из несжимаемого материала, дисперсионное соотношение имеет вид

$$\det \left\| e_{lm}(c, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \omega h/c_s) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 5}). \quad (2)$$

Для упруго-жидкостной системы, упругий слой которой из сжимаемого материала, аналогичное уравнение будет таким

$$\det \left\| \tilde{e}_{lm}(c, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \omega h/c_s) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 5}). \quad (3)$$

В этих равенствах использованы обозначения:  $c$  — фазовая скорость нормальных волн в предварительно напряженном слое;  $h$  — толщина упругого слоя;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu/\rho$ ) — скорость волны сдвига в материале ненапряженного упругого тела;  $\mu$  — модуль сдвига материала упругого тела.

Отметим, что дисперсионные уравнения (2) и (3) не зависят от формы упругого потенциала и получены для несжимаемых и сжимаемых упругих тел, подверженных большим (конечным) начальным деформациям. Они являются наиболее общими и из них можно получить соотношения для ряда частных случаев [2–10]. Если положить  $s_{ii}^0 = 0$ , то получим равенства для основательно исследованных в рамках классической теории упругости волн Рэлея, Стоунли — Шольте и Лэмба [1].

**Числовые результаты.** В дальнейшем дисперсионные уравнения (2) и (3) решались численно. При этом расчеты проводились для трех гидроупругих систем. Первая система состояла из эластичной резины и воды. Ее механические параметры выбирались следующими: упругий слой —  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 1,2 \cdot 10^6$  Па; полупространство жидкости —  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$ . Этот гидроупругий волновод характеризуется тем, что материал упругого слоя (резина) является несжимаемым податливым и мягким. Вторая система состояла из оргстекла и воды. Она характеризовалась следующими параметрами: упругий слой —  $\rho = 1160$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 3,96 \cdot 10^9$  Па,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9$  Па; жидкое полупространство —  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$ . Материал упругого слоя этого волновода (оргстекло) является сжимаемым и относится к разряду слабо жестких. Третья система представляла собой волновод из стали марки 09Г2С и воды. При этом параметры выбирались такими: упругий слой —  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10}$  Па,  $\mu = 7,75 \cdot 10^{10}$  Па; жидкость —  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с,  $\bar{a}_0 = 0,463021$ . Этот волновод отличается тем, что материал упругого слоя (сталь), являясь сжимаемым, относится к категории сильно жестких.

Заметим, что уравнения (2) и (3) выведены без введения каких-либо дополнительных ограничений к виду функции упругого потенциала, поэтому они справедливы для упругих потенциалов произвольной формы. В данной работе при численном решении уравнения (2) для описания упругих свойств резины применялся потенциал Трелоара [4, 5, 8]. Для оргстекла и стали использовался трехинвариантный потенциал Мурнагана [11]. При рассмотрении конкретных примеров и численного решения уравнения (3) учитывалось то обстоятельство, что оргстекло и сталь, не разрушаясь, не допускают больших деформаций и поэтому коэффициенты уравнений состояния  $a_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  определялись в рамках линейного акустического приближения [11]. Кроме того, при решении предполагалось, что начальное напряженное состояние удовлетворяло соотношениям  $s_{11}^0 \neq 0$ ,  $s_{22}^0 = 0$ . Как показано в работе [3], при такой загрузке нет аналогии между задачами в линеаризованной и линейной постановках. Поэтому результаты для тел с начальными напряжениями не могут быть получены из решений соответствующих линейных задач. Результаты вычислений представлены на рис. 1–4.

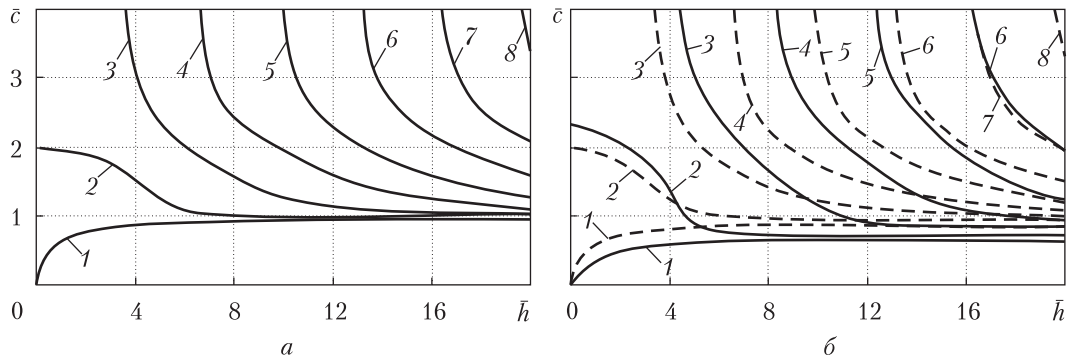


Рис. 1

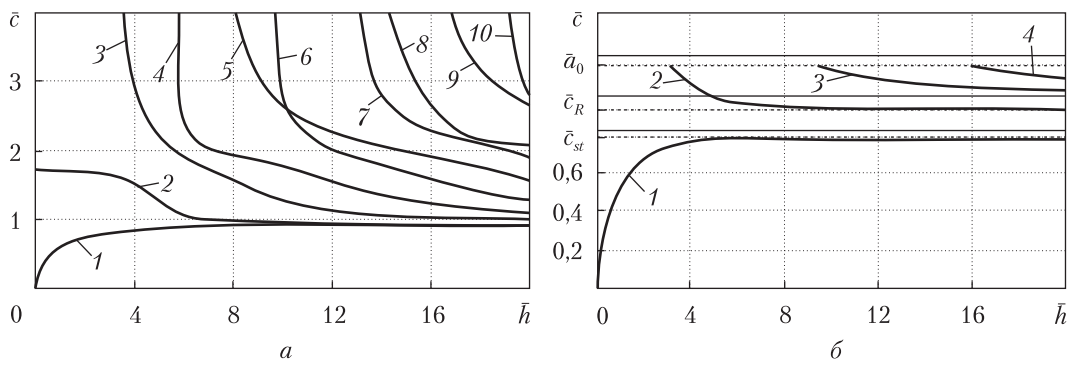


Рис. 2

На рис. 1 приведены графики, полученные для гидроупругой системы, состоящей из слоя резины (податливый материал) и воды. На рис. 1, а для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ) при отсутствии начальных деформаций ( $\lambda_1 = 1$ ).

Характер влияния предварительного сжатия ( $\lambda_1 = 0,8$ ) на фазовые скорости нормальных волн в упруго-жидкостной системе иллюстрирует рис. 1, б, где представлены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$ . Сплошные кривые получены для системы, упругий слой которой подвергнут начальному сжатию ( $\lambda_1 = 0,8$ ). Штриховыми линиями обозначены дисперсионные кривые, соответствующие гидроупругому волноводу при отсутствии начальных деформаций ( $\lambda_1 = 1$ ).

На рис. 2, а и 3, а приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из оргстекла (слабо жесткий материал) и воды. Числовые результаты, полученные численно для гидроупругого волновода, упругий слой которого из стали (сильно жесткий материал), представлены в виде графиков на рис. 3, б и 4, б. На рис. 2, а и 3, б для упругих слоев, не взаимодействующих с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  при отсутствии начальных деформаций [4, 5, 8].

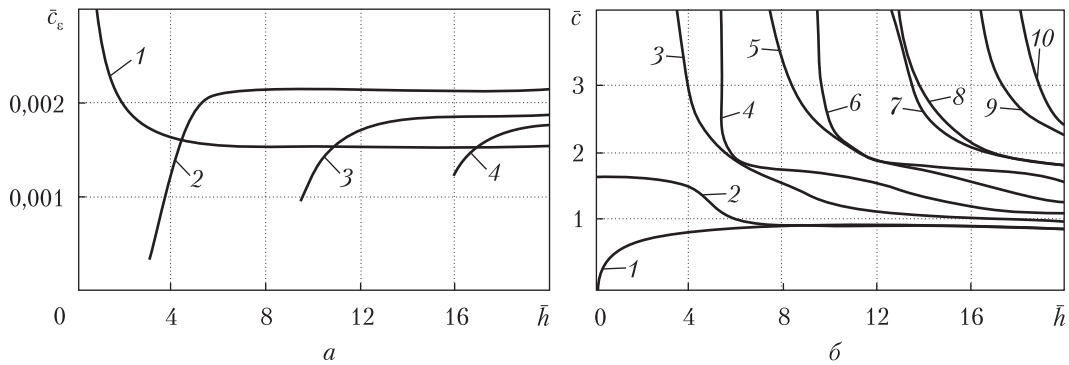


Рис. 3

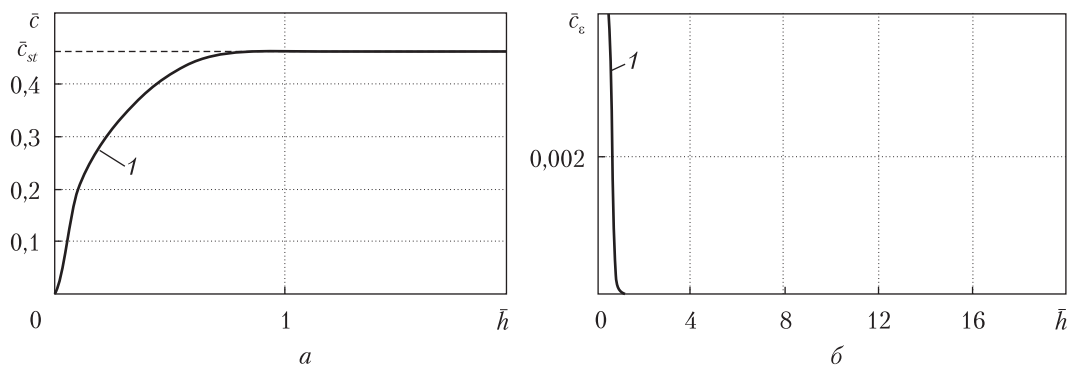


Рис. 4

Дисперсионные кривые для каждого из гидроупругих волноводов, отражающие зависимость безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$ , полученные при отсутствии начальных деформаций, приведены на рис. 2, б и 4, а.

Влияние предварительного растяжения ( $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0,004$ ) на скорости нормальных волн в каждой из упруго-жидкостных систем иллюстрируют графики на рис. 3, а и 4, б. Здесь представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей мод Лэмба  $c_\epsilon$  ( $c_\epsilon = (c_\sigma - c)/c$ ,  $c_\sigma$  — фазовая скорость мод в предварительно напряженном слое,  $\bar{c}$  — фазовая скорость нормальных волн в упругом слое при отсутствии начальных деформаций) от толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$ .

**Анализ числовых результатов.** Из графиков, представленных на рис. 1, а (податливый материал), следует, что для чисто упругого волновода, не подверженного начальному деформированию, скорости первой (нулевой антисимметричной) и второй (нулевой симметричной) мод стремятся к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$ . При этом первая мода стремится к скорости поверхностной волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9553303$ ) снизу, а скорость второй моды — соответственно к  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9553303$ ) сверху.

Графики, приведенные на рис. 1, б (податливый материал), показывают, что в гидроупругом волноводе при росте толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  скорости первых мод стремятся к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,859257$  при  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_{st} = 0,650184$

при  $\lambda_1 = 0,8$ ) снизу, а скорости вторых мод — к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955318$  при  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_R = 0,709558$  при  $\lambda_1 = 0,8$ ) сверху.

Моды более высокого порядка как в гидроупругой системе, так и в чисто упругом слое распространяются в упругом слое в его толще с фазовыми скоростями, стремящимися с увеличением толщины  $\bar{h}$  к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ .

Из графиков, приведенных на рис. 1, б, также следует, что предварительные деформации вызывают изменение частот зарождения мод Лэмба и смещение их дисперсионных кривых. Нетрудно видеть, что начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ) приводит к сдвигу критических частот и дисперсионных кривых в коротковолновую часть спектра. При этом происходит уменьшение количества распространяющихся мод Лэмба.

Из графиков, представленных на рис. 2, а (слабо жесткий материал), следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9335596$ ) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9335596$ ) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении толщины упругого слоя или частоты  $\bar{h}$  стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$  [4, 5, 8].

Графики для гидроупругой системы, приведенные на рис. 2, б (слабо жесткий материал), показывают, что при росте толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,7717101$ ) снизу, а скорость второй моды — к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933558$ ) сверху. Моды более высокого порядка распространяются в упругом слое в его толще с фазовыми скоростями, стремящимися с ростом частоты (толщины упругого слоя) к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ .

Приведенные на рис. 3, а графики позволяют заключить, что для рассматриваемого диапазона частотного спектра начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) упругого слоя из слабо жесткого материала приводит к повышению фазовых скоростей всех мод. Из графиков, представленных на рис. 3, б (сильно жесткий материал), следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя  $\bar{h}$  стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении частоты или толщины упругого слоя стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$  [1, 4, 5, 8].

Графический материал для гидроупругой системы, приведенный на рис. 4, а (сильно жесткий материал), показывает, что в этом случае существует лишь одна низшая мода, скорость которой при росте толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  стремится снизу к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,462886$ ). При этом ее скорость несколько меньше скорости волны звука в жидкой среде  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ).

Анализ графика, представленного на рис. 4, б, позволяет заключить, что начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) упругого слоя из стали оказывает значительное влияние на фазовую скорость моды 1, в основном, в окрестности частоты ее зарождения. В дальнейшем с ростом частоты влияние предварительных деформаций на скорость квазиповерхностной волны (волны типа Стоунли) ослабевает.

**Локализационные свойства низших мод в гидроупругих волноводах.** Как показано в работе [12], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого



и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны Рэлея в твердом полупространстве. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы резина (податливый материал) – вода таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 46,153442$ ) больше скорости квазирэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955318$  при  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_R = 0,709558$  при  $\lambda_1 = 0,8$ ). Согласно анализу кинематических характеристик поверхностных волн [12] это приводит к тому, что в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1, являющейся волной типа Стоунли, в упругое тело больше глубины проникновения в жидкость. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, проникает в твердое тело и локализуется, преимущественно, в приповерхностных областях как жидкости, так и упругого слоя. Скорость второй моды 2, распространяющейся в упругом слое вдоль его свободной поверхности, стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955318$  при  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_R = 0,709558$  при  $\lambda_1 = 0,8$ ) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела  $\bar{c}_s$ . При этом с ростом частоты (толщины) в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, то есть движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще [1].

В случае упруго-жидкостной системы оргстекло (слабо жесткий материал) — вода ее механические параметры таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 1,152595$ ) несколько больше скорости квазирэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933558$ ). Как отмечалось выше, анализ кинематических характеристик поверхностных волн, выполненный в работе [12], показал, что при таком соотношении механических параметров мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностных областях как жидкости, так и упругого слоя. Вторая мода распространяется в упругом слое вдоль его свободной поверхности. Моды высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще [1].

Таким образом, анализ показывает, что в двух данных упруго-жидкостных системах при  $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$  низшие моды проникают в твердое тело и также, как и моды более высокого порядка, распространяются в упругом слое. При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

В случае гидроупругой системы сталь (сильно жесткий материал) — вода ее механические параметры таковы, что скорость распространения волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ) меньше скорости квазирэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ). В связи с этим согласно результатам, полученным в работе [12] для волн Стоунли, в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 в жидкость значительно больше глубины проникновения в упругое тело. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностной области жидкого полупространства.

Таким образом, анализ показывает, что в данной упруго-жидкостной системе при  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$  мода 1 не проникает в твердое тело и распространяется вдоль границы контакта сред, главным образом, в приповерхностной области жидкости. В этом случае волноводом для рас-



пространения волны Стоунли и переноса волновой энергии служит приповерхностная область жидкого полупространства.

**Критерий существования квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах.** Проведенные отдельно расчеты и анализ числовых результатов, полученных в настоящей работе, показал, что соотношение между скоростями волны звука в жидкости и волны Рэля в твердом теле может служить критерием для определения возможности существования нормальных волн Лэмба в упругом слое, взаимодействующем с полупространством идеальной сжимаемой жидкости. Как указывалось ранее, в случае гидроупругой композиции со слоем из податливого материала (см. рис. 1), механические параметры составляющих системы таковы, что скорость волны звука в жидкости значительно больше скорости квазиповерхностной волны Рэля в твердом слое. При таком соотношении характеристик компонентов системы жидкость не препятствует обмену энергией между поверхностями упругого слоя. Вследствие этого, в упругом слое возникает полный набор незатухающих нормальных волн Лэмба, дисперсионная картина и частотный спектр которых, несмотря на ряд различий, подобен волновому процессу в упругом слое, не взаимодействующем с жидкостью.

В гидроупругой системе с упругим слоем из слабо жесткого материала (оргстекло) скорость волны звука в жидкости лишь немного превышает скорость волны Рэля. В этом случае, как видно из рис. 2, в упругом слое также возникают квазилэмбовские моды, но только такие, фазовая скорость которых меньше скорости звуковой волны. Количество этих мод, распространяющихся без радиационного демпфирования, значительно меньше числа мод Лэмба в чисто упругом слое.

При взаимодействии упругого слоя из сильно жесткого материала (сталь) с жидким полупространством скорость волны звука в жидкости значительно меньше скорости квазиповерхностной волны Рэля в упругом слое. При таком соотношении между механическими параметрами компонентов системы идеальная сжимаемая жидкость препятствует обмену энергией между поверхностями упругого слоя. В этом случае, как видно из рис. 4, в упругом слое не формируются нормальные квазилэмбовские волны. В гидроупругом волноводе возникает лишь одна низшая первая мода, которая, распространяясь без демпфирования вдоль границы контакта сред, локализуется в приповерхностной области жидкости.

В заключение отметим, что воздействие жидкости проявляется в изменении критических частот и конфигурации дисперсионных кривых, а также в смещении их в длинноволновую часть спектра. Основным критерием существования незатухающих нормальных квазилэмбовских волн и распределения их низших мод в средах является соотношение между величинами скоростей волны звука в жидкости и квазирэлеевской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя.

**Особенности влияния начальных напряжений на фазовые скорости и дисперсию нормальных волн в гидроупругих волноводах.** Как показано в работе [8], в упругом волноводе, не взаимодействующем с жидкостью, начальные растяжения вызывают изменение частот зарождения мод и смещение их дисперсионных кривых. Это приводит к тому, что в окрестности критических частот фазовые скорости мод Лэмба в предварительно деформированном слое могут быть как меньше, так и больше фазовых скоростей соответствующих мод в теле без начальных напряжений. Этим обусловлено появление в спектре упругого волновода частот (толщин), при которых начальные напряжения не оказывают влияния на фазовые

скорости ряда нормальных волн Лэмба. Отметим, что эта, качественно новая закономерность, отсутствующая в случае распространения волн в неограниченных и полуограниченных телах, впервые была обнаружена и описана в работе [8] для сжимаемого упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью.

Из рис. 1, б для системы с податливым упругим слоем, следует, что предварительные деформации вызывают изменение частот зарождения мод Лэмба и смещение их дисперсионных кривых. Как видно из рис. 1, б, начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ) (сплошные линии) приводит к сдвигу критических частот и дисперсионных кривых в коротковолновую часть спектра. При этом происходит уменьшение количества распространяющихся мод Лэмба. Из этих графиков также следует, что для всех мод Лэмба, кроме первой, существуют упругие слои определенных толщин (частот)  $\bar{h}$ , при которых фазовые скорости  $\bar{c}$  не зависят от начального сжатия  $\lambda_1$ . Как видно из графиков, эта закономерность, как уже отмечалось ранее, впервые выявленная для сжимаемых тел и описанная в работе [8], имеет более общий характер и присуща частотным спектрам упругих волноводов не только из разных материалов, но и гидроупругим волноводам.

В гидроупругой системе: оргстекло (слабо сжимаемый материал) — вода начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) приводит к изменению частот зарождения мод, к смещению их дисперсионных кривых, а также вызывает изменение их конфигурации. Как видно рис. 3, а, для рассматриваемого интервала частотного спектра начальное растяжение упругого слоя приводит к смещению характеристик волнового процесса в коротковолновую часть частотного спектра и повышению фазовых скоростей всех мод.

Как ранее указывалось, в двух данных упруго-жидкостных системах низшие моды проникают в твердое тело и также, как и моды более высокого порядка, распространяются в упругом слое. Этим объясняется влияние начальных напряжений на фазовые скорости всех мод.

График, представленный на рис. 4, б, позволяет заключить, что в случае взаимодействия упругого слоя из стали (сильно жесткий материал) с водой начальное растяжение ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) упругого слоя оказывает влияние на фазовую скорость моды 1, в основном, в окрестности частоты ее зарождения. В дальнейшем с ростом частоты (толщины упругого слоя) влияние предварительных деформаций на скорость квазиповерхностной волны (волны типа Стоунли) ослабевает. Как уже отмечалось, в данной упруго-жидкостной системе низшая мода 1, возникающая в результате взаимодействия упругого слоя с жидким полупространством, не проникает в твердое тело и распространяется без демпфирования вдоль границы контакта сред, преимущественно, в приповерхностной области жидкости. Этим объясняется незначительное влияние упругого слоя и начальных напряжений на фазовую скорость, а также дисперсию этой моды.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 288 с.
2. Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A. M. Dynamic of elastic bodies, solid particles, and fluid particles in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, № 5. 449–507.
3. Guz A.N. Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1980. **16**, № 3. P. 175–190.

4. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х томах. Киев: Наук. думка, 1986.
5. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
6. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
7. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. 428 p.
8. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1976. 104 с.
9. Babich S.Y., Guz A.N., Zhuk A.P. Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1979. **15**, № 4. P. 277–291.
10. Жук А.П. Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями. *Прикл. механика*. 1980. **16**, № 1. С. 113–116.
11. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. Киев: Наук. думка, 1977. 152 с.
12. Волькенштейн М.М., Левин В.М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела. *Акуст. журн.* 1988. **34**, № 4. С. 608–615.

Поступило в редакцию 05.07.2016

## REFERENCES

1. Viktorov, I. A. (1981). Sound surface waves in solids. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Guz, A. N., Zhuk, A. P. & Bagno, A. M. (2016). Dynamics of bodies, solid particles, and fluid particles in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.*, 52, No. 5, pp. 449-507.
3. Guz, A. N. (1980). Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Soviet Applied Mechanics*, 16, Iss. 3, pp.175-190. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00885084>.
4. Guz, A. N. (1986). Elastic waves in bodies with initial stresses. In 2 vols. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
5. Guz, A. N. (2004). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Kyiv: A.C.K. (in Russian).
6. Guz, A. N. (1998). Dynamics of compressible viscous fluid. Kyiv: A.C.K. (in Russian).
7. Guz, A. N. (2009). Dynamics of compressible viscous fluid, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
8. Guz, A. N., Zhuk A. P., & Makhort F. G. (1976). Waves in layer with initial stresses. Kyev: Naukova Dumka (in Russian).
9. Babich, S. Y., Guz, A. N. & Zhuk, A. P. (1979). Elastic waves in bodies with initial stresses. *Soviet Applied Mechanics*, 15, Iss. 4, pp. 277-291. doi: <https://doi.org/10.1007/BF00884760>.
10. Zhuk, A. P. (1980). Stoneley waves in a medium of initial stresses. *Prikl. mekhanika*, 16, No. 1, pp. 113-116 (in Russian).
11. Guz, A.N., Makhort, F.G., & Guscha, O.I. (1977). Introduction in acoustoelasticity, Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
12. Volkenshtein, M. M. & Levin, V. M. (1988). Stoneley wave structure on the boundary of a viscous liquid and solid. *Acoustic J.*, 34, No. 4, pp. 608-615 (in Russian).

Received 05.07.2016

О.М. Базно

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

## ПРО КВАЗІЛЕМБОВСЬКІ ХВИЛІ У СИСТЕМІ: ПІВПРОСТІР ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ – ПРУЖНИЙ ШАР З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для твердого тіла та тривимірних лінеаризованих рівнянь Ейлера для ідеальної стисливої рідини побудовані дисперсійні криві нормальних квазілембовських хвиль у гідропружній системі в широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив початкових напружень у попередньо деформованому пружному шарі, а також півпростору ідеальної стисливої рідини на фазові швидкості квазілембовських мод у гідропружному хвилеводі. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

**Ключові слова:** дисперсія хвиль, стисливий та нестисливий пружні шари, півпростір ідеальної стисливої рідини, початкові напруження.

*O.M. Bahno*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: alexbag2016@gmail.com

ON QUASI-LAMB WAVES IN THE SYSTEM

“IDEAL FLUID HALF-SPACE – ELASTIC LAYER WITH INITIAL STRESSES”

The dispersion curves of normal quasi-Lamb waves in a hydroelastic system are constructed over a wide range of frequencies, by using the three-dimensional linearized equations of elasticity theory of finite deformations for a solid body and the three-dimensional linearized Euler equations for an ideal compressible fluid. The influence of initial stresses in the pre-deformed elastic layer and of the half-space of an ideal compressible fluid on the phase velocities of quasi-Lamb waves in a hydroelastic waveguide is analyzed. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

**Keywords:** *dispersion of waves, compressible and incompressible elastic layers, half-space of an ideal compressible fluid, initial stresses.*