

РОЛЬ ИССЛЕДОВАНИЙ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛОПРОВОДОВ В РАЗВИТИИ ДИНАМИКИ МАШИН

Ларин А. А., канд. техн. наук, доц.

(Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»)

У статті розглядається історія досліджень крутильних коливань систем з двигунами внутрішнього згорання. Розповідається про внесок українських вчених в вирішення цієї проблеми та наводяться приклади ліквідації небезпечних коливань.

This paper deals with history of research of torsion vibrations within systems of combustion engines. The role of Ukrainian scientists in solving this problem is described and samples of undesirable vibrations elimination are shown.

Важнейшей составной частью механики является теория колебаний, история развития которой, в отличие от других разделов, освещена недостаточно. В работах [1; 2] мы уже рассматривали структуру и периодизацию этой отрасли механики. Одной из первых задач теории колебаний была задача о крутильных колебаниях валопроводов. В развитии теории колебаний дискретных систем эта задача сыграла заметную роль, что обусловлено, во-первых, важностью задачи, а, во-вторых, ее сравнительной простотой. Именно для ее решения были разработаны многие методы, применявшиеся в теории колебаний, и в ней были обнаружены новые колебательные явления.

Задача о крутильных колебаниях валопроводов силовых установок возникла на рубеже XX века с ростом скорости и мощности паровых машин, которые являются машинами циклического действия с периодически меняющимися силами. В их валопроводах стали появляться крутильные резонансные колебания, часто приводящие к усталостному разрушению. Не умея вычислить напряжений, обусловленных динамическими причинами, инженеры в сомни-

тельных случаях зачастую просто увеличивали коэффициент запаса прочности. Однако увеличение размеров не всегда ведет к уменьшению напряжений.

В статье «К вопросу о явлении резонанса в валах», опубликованной в 1905 году в известиях Санкт-Петербургского политехнического института, С.П. Тимошенко дал анализ первых работ, посвященных этому вопросу [3, с. 13-54]. Среди них он отметил статьи Г. Лоренца, Г. Фрама и Г. Мельвиля. Особенно полное исследование провел Г. Фрам, поставивший целый ряд опытов и обосновавший необходимость проверки конструкции валопровода на возможность резонанса. С появлением силовых установок с двигателями внутреннего сгорания (ДВС), имеющих большую скорость и мощность, вопрос об их колебаниях стал более остро. В основном задача сводилась к определению собственных частот и форм колебаний. Данная статья посвящена развитию методов решения этой задачи.

Первыми опасные колебания проявились именно в валах винтовых паровых машин, поскольку вал, соединяющий машину с гребным винтом, имеет дли-



ну несколько десятков метров и его жесткость мала по сравнению с валами колесных пароходов или стационарных машин. В соответствии с этим, собственные частоты их валопроводов невысокие, и в них раньше стало проявляться явление резонанса. Многочисленные аварии пароходных валов, происходившие от усталостного разрушения при резонансных колебаниях, заставили инженеров обратить внимание на вибрационные процессы. Только в Англии в период 1882 – 1885 гг. произошло 228 поломок гребных валов, причиной которых были усталость материала вследствие больших колебаний [4, с. 136]. Поломка гребного вала на корабле часто сопровождалась и поломкой паровой машины.

Крутильные колебания могут быть вызваны не только моментами сил давления в цилиндрах и сил инерции поршневых машин. Причиной их также бывают возмущение от неоднородного потока, расцентровка зубчатых передач и частичное нагружение гребного вента на волнении, что делает эту задачу актуальной и для судов с турбинными машинами.

Для исследования крутильных колебаний валопроводов поршневых машин применяются дискретные механические модели, состоящие из абсолютно твердых дисков, соединенных невесомыми упругими валами, имеющими крутильную жесткость. При наличии в системе валопровода редукторов, она приводится к одному валу, как правило, это вал двигателя. Модель имеет цепную структуру, все обобщенные координаты являются углами поворота масс. Способы ее построения достаточно хорошо изучены. До появления точных методов, реализация которых возможна только с помощью ЭВМ, определение приведенных моментов инерции дисков и крутильных жесткостей осуществлялась по эмпирическим формулам [5, с. 214-218].

Для цепной системы дифференци-

альные уравнения колебаний легко записываются в прямой форме без применения аппарата аналитической механики. В случае исследования колебаний линейной системы, использование спектральной теории позволяет даже без записи дифференциальных уравнений решать задачи определения частот и форм свободных колебаний и находить амплитуды и фазы установившихся вынужденных колебаний. Однако при числе степеней свободы выше четырех-пяти исследователь встречался с непреодолимыми на тот момент трудностями. Более подробно с задачами линейной теории колебаний дискретных систем можно ознакомиться в работах [1, с. 45-48; 6, с. 91-92]. Что касается переходных режимов, то даже для системы с одной степенью свободы задача простым численным интегрированием дифференциального уравнения решена быть не могла.

Для стационарных двигателей, имевших небольшие обороты и солидную массу, характерна только первая форма колебаний с узлом вблизи маховика [7, с. 172]. Судовые паровые машины и дизели имеют небольшие обороты и длинный гребной вал. При низкочастотном возбуждении существенное значение имеют только две первые формы крутильных колебаний, для получения которых достаточно рассматривать систему с тремя маховыми массами: приведенной массы коленчатого вала двигателя, маховика и гребного вента (см. рис. 1).

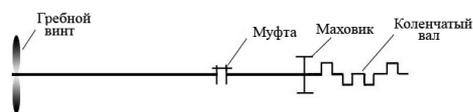


Рис. 1. Модель валопровода парового двигателя

Следует отметить, что хотя массы валов соизмеримы с массами остальных тел, их моменты инерции на два порядка меньше, и инерционными свойства-

ми валов можно пренебречь. Типичными для такой модели являются первая форма крутильных колебаний с узлом посередине гребного вала и вторая – с узлом на коленчатом валу вблизи маховика (см. рис. 2) [8, с. 158-159]. У подводных лодок, где роль маховика играет генератор с меньшим моментом инерции, узел колебаний смещается ближе к середине коленчатого вала, что представляет большую опасность [7, с. 173].

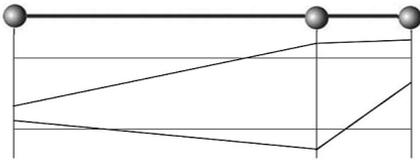


Рис. 2. Формы колебаний валопровода парохода

Длительное время основным средством борьбы с крутильными колебаниями валопроводов была отстройка системы от резонанса, что требовало только определения частот и форм свободных колебаний. Пока для исследования колебаний валопроводов паровых машин и тихоходных дизелей применялись двух- и трехмассовые модели, решение векового уравнения или системы линейных алгебраических уравнений не составляло особого труда, и основным вопросом при исследовании крутильных колебаний было определение параметров дискретной системы. Это не только подсчет крутильных жесткостей и приведенных моментов инерции самой машины, но определение сопротивления и даже учет увлекаемой винтом массы воды.

Появление быстроходных двигателей внутреннего сгорания облегченной конструкции привело к тому, что при крутильных колебаниях стали деформироваться и коленчатые валы. Это обстоятельство вынудило рассматривать системы с большим числом степеней свободы. Однако для систем пятого и более высокого порядка ре-

шение векового уравнения уже представляло серьезные затруднения. Методы, применявшиеся астрономами, не годились для проведения инженерных расчетов из-за их громоздкости, поэтому инженерами разрабатывались различные графические и численные методы расчетов. Крутильные колебания коленчатых валов проявились раньше изгибных или продольных, поскольку их частоты ниже других [9, с. 39]. Поначалу аварии происходили с авиационными двигателями не только вследствие их большей нагруженности, но и благодаря применению для изготовления их коленчатых валов легированных сталей, которые, наряду с большим временным сопротивлением разрыву, имеют относительно малую демпфирующую способность, что способствует возникновению колебаний.

Поначалу большее развитие получили звездообразные двигатели, с цилиндрами, расположенными в один или два ряда. В однорядных проявлялся только резонанс на первой собственной частоте крутильных колебаний, а в двухрядных и на более высокой – второй. Позже, наряду со звездообразными двигателями, стали выпускать рядные и V-образные, и когда число цилиндров в них было увеличено до шести и более в ряд, то в них также стали проявляться резонансные колебания, в том числе с третьей и четвертой собственными частотами с узлами на коленчатом валу [9, с. 6]. Переход от деревянных воздушных винтов к более гибким металлическим породил новую проблему – связанные крутильные колебания валопровода с изгибными колебаниями винта. Однако этот вопрос выходит за рамки данной статьи.

На первых порах крутильные колебания не приводили к разрушению коленчатых валов, однако со временем стали происходить и их поломки. В монографии [9, с. 11] описан случай, едва не приведший к катастрофе. В октябре

1927 г. был пущен в эксплуатацию дирижабль «Граф Цеппелин», ставший гордостью Германского воздушного флота. Его машинная установка состояла из пяти 12-цилиндровых четырехтактных V-образных бензиновых моторов «Майбах». Двигатели развивали максимальную мощность 550 л. с. при 1600 об/мин и номинальную 400 л. с. при 1350-1450 об/мин. Дирижабль уже совершил 22 полета, налетав при этом 50 000 км без существенных повреждений, когда в мае 1929 г. был предпринят очередной перелет из Европы в Америку. Через 7 и 12 часов после отлета из строя, вследствие поломок коленчатых валов, вышли два двигателя, что вынудило дирижабль вернуться. На обратном пути поломались еще два мотора, так что воздушный гигант добрался под защиту гавани в Тулоне на последнем двигателе, который, как позже выяснилось, также имел надлом коленчатого вала.

Поскольку до аварии двигателя отработали разное время, причину поломок следовало искать в последних переделках силовой установки. Выяснилось, что перед полетом было увеличено предварительное натяжение пружин муфт сцепления. Если до этого две первые частоты крутильной системы валопровода имели значения 1760 и 4850 кол/мин, то после указанной операции первая частота стала выше – 2030 об/мин. Для данной конструкции двигателя характерны резонансы 1,5, 3,5, 4,5 и 6-й гармоник¹. До переделки резонанс 1,5-й гармоники попадал на режим 1170 об/мин, а после нее сместился на 1360 об/мин. Ситуация усугублялась также наличием резонанса 3,5-й гармоники на режиме 1380 об/мин. Данный

¹ Половинные гармоники возникают оттого, что в двигателестроении для четырехтактных двигателей разложение в тригонометрический ряд Фурье принято относить не к периоду колебаний, который составляет у них два оборота, а к одному обороту.

случай показал опасность крутильных колебаний валопроводов двигателей, которые могут возникнуть даже при малейших их изменениях. Это диктует необходимость проведения расчетов собственных частот не только при создании мотора, но также и при его модернизации.



Рис. 3. Дирижабль «Граф Цеппелин», фото 1930 г.

Для многоцилиндровых облегченных авиамоторов коленчатые валы уже нельзя было заменять одним твердым телом, и в моделях крутильных колебаний пришлось учитывать порядка десяти степеней свободы. Для решения задачи о свободных колебаниях таких систем были разработаны различные методы. Из их множества наибольшее распространение, в том числе и в СССР, получили методы, предложенные Гюмбелем, Хольцером и Толле для цепных неразветвленных систем. Эти методы схожи по существу, но различаются по форме. Графические методы Гюмбеля и Хольцера проще в реализации, но неудобны при расчете длинных валов [9, с. 63]. Метод остатков, предложенный в 1921 году Максом Толле, заключался в последовательном вычислении левой части векового уравнения для пробных собственных значений. Номер полученной в результате собственной частоты определяется по числу перемен знака формы колебаний, которое должно быть на единицу меньше номера частоты. Основным недостатком метода Толле является невозможность его применения к более сложным разветвленным систе-

мам без их предварительного преобразования. Кроме того, при его использовании невозможно заранее сказать, какое количество выкладок потребуется произвести для того, чтобы «нащупать» с достаточной точностью те зоны возможных значений частот, возле которых лежат собственные частоты крутильных колебаний [10, с. 441].

В 1930 г. инженер Коломенского паровозостроительного завода В. П. Терских предложил метод расчета крутильных колебаний, основанный на записи уравнения частот в виде непрерывной дроби [11, 12]. Метод заключается в том, что корни данного уравнения, т.е. собственные частоты, определяются последовательными пробами. При этом номер частоты определяется по количеству узлов в полученной форме колебаний. В отличие от метода Толле, метод цепных дробей пригоден и для разветвленных систем.

Указанные методы послужили основой для создания методов расчетов колебаний систем более общего вида, в которых кручение сочетается с изгибом и растяжением-сжатием. Так из матричной формы метода Толле вышел метод начальных параметров. А в 1940 г. М. Био предложил метод динамических жесткостей, являющийся обобщением метода цепных дробей на многосвязные системы [13].

Расчетами крутильных колебаний занимались и представители харьковской школы механики. Метод последовательных приближений формами колебаний И. М. Бабакова и метод А. М. Данилевского, основанный на приведении определителя векового уравнения к форме Фробениуса, предложенные ими для расчета собственных частот линейных крутильных систем, описаны в статье [6, с. 92-95]. К сожалению, несмотря на свою эффективность, они не нашли широкого применения в расчетной практике заводских КБ.

Поскольку сам факт попадания собственной частоты в рабочую зону еще не означает, что проявится явление резо-

нанса, особенно не для основных гармоник колебаний, важнейшим вопросом становится расчет вынужденных колебаний, а точнее определение напряжений кручения в валах при работе двигателя. Для их расчета В. П. Терских предлагает метод набегающих моментов, по сути являющийся квазистатическим расчетом, т.е. расчетом усилий от моментов сил давления газов и сил инерции, без учета колебаний вала [14, с. 23]. Этот подход дает вполне приемлемые результаты для нерезонансных режимов колебаний, однако, значения напряжений всегда занижены.

В практике расчета резонансных амплитуд широкое распространение получили энергетические методы, основанные на том, что при установившихся колебаниях энергия, сообщенная системе возмущающими силами, равна энергии, рассеянной демпфирующими сопротивлениями. Наиболее распространенными энергетическими методами были методы, предложенные Видлером и Льюисом. В их работах приведены примеры вычисления амплитуд вынужденных колебаний в валопроводах дизелей и данные о величине сопротивления гребного винта, генератора, цилиндров двигателя и внутреннего трения [15, с. 139]. Точность результатов здесь определяется точностью составления энергетического уравнения, и поэтому большое внимание уделяется экспериментальному определению демпфирующих сопротивлений и получению формул, достаточно хорошо отражающих количественные значения работы демпфирующих сил.

В методе энергетического баланса Видлера принимается, что форма установившихся резонансных колебаний совпадает с формой свободных колебаний системы без учета сопротивления, соответствующего данной резонансной частоте. Этот метод получил в свое время широкое распространение в расчетной практике благодаря своей простоте и универсальности. Однако он пригоден только для случая гармониче-

ского возбуждения и дает большие ошибки, если, вопреки предположению, действительная форма вынужденных колебаний существенно отличается от собственной формы.

Способ Льюиса основан на том предположении, что наибольшая часть рассеиваемой энергии приходится на упругий гистерезис. Но метод Льюиса дает хорошие результаты при расчетах коленчатых валов тяжелых тихоходных дизелей, изготовленных из мягкой стали. Для быстроходных же двигателей, коленчатые валы которых выполнены из легированных сталей и имеют меньшее рассеивание энергии при колебаниях, этот способ не подходит. Таким образом, расчеты вынужденных колебаний находились на достаточно примитивном уровне, а их результаты носили весьма условный характер.

Что касается учета имеющихся в конструкции валопровода нелинейностей, то расчеты нелинейных колебаний проводились в основном для упрощенных систем с одной степенью свободы, что для быстроходных двигателей было неприемлемо, ввиду того, что узел колебаний образовывался на коленчатом валу. Методы расчета крутильных колебаний нелинейных систем получили развитие на основе асимптотических методов нелинейной динамики в трудах ее основоположников Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, которые не только разработали новый эффективный способ построения резонансных кривых для многомассовых систем, но и практически осуществили расчеты.

Следует отметить, что расчеты колебаний проводились в основном для авиационных и судовых силовых установок, поскольку в авиационной и судостроительной промышленности была более высокая культура расчетов на динамическую прочность. Так, например, первое подробное исследование колебаний танковых трансмиссий было проведено в СССР только в 1948 г. [16, с. 29-31]. Но с переходом авиации на газотурбинные двигатели многие спе-

циалисты в области крутильных колебаний занялись проблемами наземной техники. Среди этих объектов наибольший интерес представляют тепло-возные и танковые силовые установки.

В 1960-е гг. в практику расчетов стало входить применение ЭВМ. Однако возможности машин были еще очень ограничены, поэтому длительное время определение собственных частот и форм колебаний проводилось с помощью различных методов, разработанных в прошлые годы. В частности, метод Терских применялся для проведения расчетов и с помощью ЭВМ, однако в ходе расчета могло потребоваться вмешательство оператора, так как уравнение в форме цепной дроби представляет собой разрывную функцию частоты [17, с. 107].

Большой вклад в компьютерную реализацию этого метода внес академик А. П. Филиппов. В монографии [18, с. 435-437] он описывает применение программы расчета собственных частот по методу Терских для разветвленной системы с 96 степенями свободы. Такая высокая для того времени размерность рассматриваемой системы делала метод цепных дробей конкурентоспособным и после распространения методов матричной алгебры. Однако программа А. П. Филиппова требует в процессе счета вмешательства оператора, что на заре компьютерной техники было очень существенным недостатком.

Дальнейшее развитие вычислительной техники позволило решить полную проблему собственных значений и собственных векторов с помощью итерационных методов, что, хотя и не сразу, позволило отказаться от всех частных методов расчета. Так, в 1952 г. нашел, наконец, применение метод вращений Якоби. Однако его достаточно высокая трудоемкость заставила математиков искать новые алгоритмы. В статье [17, с. 108] профессор Харьковского политехнического института Л. И. Штейнвольф обосновал применение для расчета собственных

частот и форм крутильных колебаний QR-алгоритма, основанного на преобразовании матрицы к треугольной форме. Для решения задачи о вынужденных колебаниях, требующей решения систем линейных алгебраических уравнений, успешно применялся метод исключения Гаусса.

Группа силовых установок, возглавляемая Л. И. Штейнвольфом, внесла большой вклад в развитие методов расчетов крутильных колебаний. В 1960-е гг. этот коллектив занимался динамическими расчетами колебаний тепловозных силовых установок. Исследования проводились для тепловозов и дизелей, производившихся на Харьковском заводе транспортного машиностроения им. В. А. Малышева и Луганском тепловозостроительном заводе им. Октябрьской революции и были первыми в СССР исследованиями колебаний тепловозных силовых установок [19, с. 4]. Эти установки являются наиболее сложными установками с ДВС, так как кроме генератора содержат еще несколько потребителей – вспомогательных механизмов, необходимых для нормальной эксплуатации двигателя и самого тепловоза. Основным видом колебаний в тепловозных установках являются крутильные колебания, причем переходные процессы в механических передачах тепловозов значительно многообразнее и опаснее установившихся вынужденных колебаний.

Среди исследуемых группой Л. И. Штейнвольфа тепловозов были и основные магистральные тепловозы Советского Союза – ТЭЗ с дизелем 2Д100 и ТЭ10, оснащенные дизелем 10Д100. В результате комплекса мероприятий, куда входили и расчеты крутильных колебаний, за период с 1964 по октябрь 1968 гг. была решена важнейшая народнохозяйственная задача – срок службы дизелей типа Д100 повышен на 100% и достиг 20 000 часов работы до капитального ремонта [20, л. 108-109]. Результаты работы нашли отражение в докторской диссертации, защищенной Львом Израилевичем в 1967 г. [21].

Накопленный опыт был применен при расчетах колебаний трансмиссий и приводов вспомогательных механизмов танковых силовых установок, выполненных в 1970-е гг. В них нашли широкое развитие методы расчетов нелинейных крутильных колебаний, в том числе алгоритмы и программы, основанные на применении интегральных уравнений и итерационного метода Ньютона-Канторовича. Затем этот подход был развит для решения задач оптимизации и синтеза по динамическим характеристикам и исследования переходных режимов в нелинейных крутильных системах [19, с. 5]. Однако их изучение это тема для отдельного исследования.

Поскольку для ЭВМ 1970-х годов были еще существенные ограничения по быстродействию и по объему памяти, при решении задач синтеза или оптимизации колебательных систем, где задача анализа решается многократно, исследователю приходилось уменьшать порядок системы, выделяя в ней только часть спектра собственных частот [6, с. 96-97].

Дальнейшее развитие вычислительной техники уже в 1980-х гг. сняло все ограничения по числу степеней свободы рассматриваемых дискретных моделей. Наиболее трудоемкой операцией при вводе исходных данных стало заполнение вручную матриц инерции и жесткости системы уравнений. Поэтому, с начала 1970-х годов, Л. И. Штейнвольф совместно с В. Н. Митиным начали разрабатывать методы автоматизированного построения систем уравнений, основанного на применении так называемых структурных матриц, которые нашли воплощение к концу 1970-х годов вначале для систем цепной структуры, а затем получили дальнейшее развитие. Исследования, начавшиеся с создания автоматизированного составления средствами ЭВМ уравнений колебаний в приведенных системах, нашли продолжение при создании программного комплекса «КИ-ДИМ», имеющего важное прикладное значение. Данный комплекс, являю-

щийся дальнейшим развитием идеи структурных матриц, основан на применении специально созданной системы компьютерной алгебры. Он позволяет автоматизировать процессы построения математических моделей и отыскания решений задач кинематики, статики и динамики для широкого класса дискретных механических систем сложной структуры, в том числе с нестационарными и неголономными связями [19, с. 5-6; 22]. Современное

состояние теории колебаний и применяемых для их расчетов средств не требует выделения расчетов крутильных колебаний в отдельный класс задач.

Исследования крутильных колебаний валопроводов, таким образом, имеют важнейшее историческое значение, так как они не только позволили повысить надежность и долговечность двигателей, но и сыграли важную роль в развитии теории колебаний.

Список литературы

1. Ларин А. А. Становление теории колебаний механических систем: исторический обзор // Дослідження з історії техніки 36. наукових праць. – К.: НТУУ «КПІ», 2006. – Вип. 8. – С. 41-50

2. Ларин А. А. Периодизация развития теории механических колебаний // Історія Української науки на межі тисячоліть, Київ, 2008, вип. 33, С. 134-143.

3. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Наука, 1975. – 704 с.

4. Вайнберг Д. В., Писаренко Г. С. Механические колебания и их роль в технике. – М.: Физматгиз, 1958. – 232 с.

5. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с.

6. Ларин А. А. Развитие методов расчета крутильных колебаний в Харьковском политехническом институте с 1930 по 1970 годы // Вестник НТУ «ХПИ» Динамика и прочность машин, Харьков, 2007, вып. 22, С. 90-98.

7. Шаталов К. Т. Экспериментальные исследования крутильных колебаний валов // Динамика и прочность коленчатых валов. – М–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 170-247

8. Житомирский В. К. Механические колебания и практика их устранения. – М.: Машиностроение, 1966 – 176 с.

9. Гопп Ю. А. Демпферы крутильных колебаний коленчатых валов быстроходных двигателей. – Харьков.: Гостехиздат, 1938. – 272 с.

10. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.

11. Терских В. П. К расчету крутильных колебаний // Вестник инженеров и техников, 1930, №12. – С. 429-433

12. Терских В. П. К расчету крутильных колебаний // Вестник инженеров и техников, 1931, №7. – С. 306-312

13. Biot M. Coupled Oscillations of Aircraft Engine-propeller Systems, Journal of the aeronautical sciences, vol. 7, № 9, pp. 376-382, July 1940. (Journ. of Aeron. Sciences)

14. Терских В. П. Уточненный расчет коленчатого вала на кручение // Динамика и прочность коленчатых валов. – М–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 5-48

15. Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле. М.: ОНТИ, 1934. – 344 с.

16. Ларин А. О. З історії створення танкового дизеля В-2. Дослідження крутильних коливань трансмісії. // Питання історії науки і техніки 2009 № 2. – С. 83-89

17. Штейнвольф Л. И. Об алгоритмах расчета свободных крутильных колебаний на ЭЦВМ // Динамика и прочность машин. – 1967. – Вып. 6. С. 106-109

18. Филиппов А. П. Колебания механических систем. – К.: Наукова думка, 1965. – 716 с.

19. Ларин А. А. О творческом наследии Льва Израилевича Штейнвольфа – ученого и педагога // Вестник НТУ «ХПИ» Динамика и прочность машин, Харьков, 2006, вып. 21.– С. 3-6

20. Фонды Центрального Государственного Архива общественных объединений Украины, ф. 1, оп. 25, ед. хр. 82

21. Штейнвольф Л. И. Динамика механических передач силовых установок тепловозов дис. ... докт. техн. наук.– Харьков, 1966.– 655 с.

22. Андреев Ю. М., Ларин А. О. Морачковский О. К. Система компьютерной алгебры для досліджень механіки машин. // Машинознавство, 2005, №7 (95). С. 3-8.