ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.02.003
УДК 517.95

О.М. Бугрій

Львівський національний університет ім. Івана Франка
E-mail: ol_buhrii@i.ua

Мішана задача для подвійно нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності

Представлено членом-кореспондентом НАН України Б.Й. Пташником

Розглянуто мішану задачу для подвійно нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності, збурених генератором стрибкоподібного процесу, які пов'язані з теорією ціноутворення європейських опціонів. Доведено теорему існування її розв'язку.

Ключові слова: *подвійно нелінійне параболічне рівняння, інтегро-диференціальне рівняння, змінний показник нелінійності, стрибкоподібно-дифузійний процес, європейський опціон.*

Нехай $n\in\mathbb{N}$, $T>0$ — деякі числа, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — обмежена область класу $C^{0,1}$ (див. [1, с. 48]), $\partial\Omega$ — межа Ω, $Q_{0,T}=\Omega\times(0,T)$, $\Sigma_{0,T}=\partial\Omega\times(0,T)$, $\Omega_\tau=\{(x,t)\,|\,x\in\Omega, t=\tau\}$, $\tau\in[0,T]$.

Розглянемо задачу: знайти функцію $u: Q_{0,T}\to\mathbb{R}$ таку, що

$$|u|^{r(x)-2}u_t+u_t-a\Delta u+g(x,t)|u|^{q(x)-2}u+ \\ +\phi\left(\int\limits_\Omega Z(x,t,y)(\tilde u(x+y,t)-\tilde u(x,t))\,dy\right)=f(x,t),\quad (x,t)\in Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$u\big|_{\Sigma_{0,T}}=0, \tag{2}$$

$$u\big|_{t=0}=u_0(x),\quad x\in\Omega, \tag{3}$$

де $a>0$ — задане число, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа, r, g, q, ϕ, Z, f, u_0 — задані функції, $\tilde u$ — продовження функції u нулем на $(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)\times(0,T)$. Ввівши позначення

$$(\mathcal{R}u)(x,t):=\frac{1}{r(x)-1}|u(x,t)|^{r(x)-2}u(x,t),\quad (x,t)\in Q_{0,T}, \tag{4}$$

$$(Gu)(x,t):=g(x,t)|u(x,t)|^{q(x)-2}u(x,t),\quad (x,t)\in Q_{0,T}, \tag{5}$$

$$(Eu)(x,t) := \int\limits_{\Omega} Z(x,t,y)(\tilde{u}(x+y,t)-\tilde{u}(x,t))\,dy, \quad (x,t)\in Q_{0,T}, \tag{6}$$

рівняння (1) можна записати у вигляді

$$(\mathcal{R}u)_t + u_t - a\Delta u + Gu + \phi(Eu) = f(x,t), \quad (x,t)\in Q_{0,T}. \tag{1$'$}$$

Рівняння (1) називають подвійно нелінійним, а функції r, q — (змінними) показниками нелінійності цього рівняння. Задачі для рівнянь типу (1) мають велике прикладне значення, зокрема, у фінансовій математиці. Наприклад, лінійний аналог (1) виникає в моделі Мертона [2], яка описує біржові коливання вартості опціонів. У цьому випадку оператор E є генератором стрибкоподібного процесу і відповідає за миттєві зміни ціни акції, які відбуваються, наприклад, під час неочікуваної терористичної атаки, стихійного лиха, отримання компанією великого державного замовлення тощо.

Параболічні рівняння зі змінними показниками нелінійності без інтегральних членів досліджено в [3, 4]. Задачі для нелінійних параболічних рівнянь зі сталими показниками нелінійності та інтегральним членом іншого ніж (6) вигляду вивчалися в [5, 6], а для рівнянь зі змінними показниками нелінійності та інтегральними членами іншого ніж (6) вигляду — в [7].

У роботі [8] автором розпочато вивчення мішаної задачі для нелінійного рівняння

$$u_t - a\Delta(|u|^{\gamma-2}u) + Gu + \phi(Eu) = f(x,t), \quad (x,t)\in Q_{0,T}. \tag{7}$$

При $\gamma\in[2,3)$ у [8] доведено існування узагальненого розв'язку задачі (7), (2), (3). Задачу Коші для рівняння типу (7) з $q(x)\equiv 2, \phi(s)=s$ досліджено в праці [9] при $\gamma=2$, а в праці [10] — при $\gamma=3$.

У цій роботі досліджується мішана задача для подвійно нелінійних рівнянь зі змінними показниками нелінійності $(r(x), q(x)\not\equiv \mathrm{const})$ та нелінійними інтегральними членами. Така задача розглядається, мабуть, вперше.

Формулювання основного результату. Спершу введемо потрібні нам далі позначення. Нехай $\mathbb{Z}_k = \{m\in\mathbb{Z} \mid m\geqslant k\}, k\in\mathbb{Z}$. Норму в банаховому просторі B позначимо через $\|\cdot;B\|$. Через Lip ($\mathbb{R}$) позначимо множину функцій, які визначені на $\mathbb{R}$ і там задовольняють умову Ліпшиця (див. [11, с. 29]). Нехай $N\in\mathbb{N}; G$ — вимірна множина в $\mathbb{R}^N$; $\mathcal{M}(G)$ — множина всіх вимірних за Лебегом функцій $v: G\to\mathbb{R}$ (див. [12, с. 120]); $L^p(G)$, де $p\in[1,\infty]$, — простір Лебега (див. [1, с. 37]),

$$\mathcal{B}_+(G) := \{q\in L^\infty(G) \mid \operatorname*{ess\,inf}_{y\in G} q(y) > 0\}.$$

Для кожної функції $q\in\mathcal{B}_+(G)$ через q_0, q^0 визначимо числа

$$q_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{y\in G} q(y), \; q^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{y\in G} q(y), \tag{8}$$

а через S_q — функцію

$$S_q(s) := \max\{s^{q_0}, s^{q^0}\}, \quad s\geqslant 0. \tag{9}$$

Якщо $q \in \mathcal{B}_+(G)$ і $q_0 > 1$, то визначимо $q' \in \mathcal{B}_+(G)$ так: $q'(y) := \dfrac{q(y)}{q(y)-1}$ (тобто $\dfrac{1}{q(y)} + \dfrac{1}{q'(y)} = 1$) майже для всіх $y \in G$ (очевидно, що $q_0' > 1$).

Нехай $q \in \mathcal{B}_+(G)$ і $q_0 \geqslant 1$. Узагальненим простором Лебега $L^{q(y)}(G)$ називають лінійний простір функцій $v \in \mathcal{M}(G)$, для яких виконується нерівність $\rho_q(v;\, G) := \int\limits_G |v(y)|^{q(y)}\, dy < +\infty$ з нормою

$$\|v; L^{q(y)}(G)\| := \inf\{\lambda > 0 \,|\, \rho_q(v/\lambda; G) \leqslant 1\}.$$

Коли $q_0 > 1$, то $L^{q(x)}(G)$ є рефлексивним сепарабельним банаховим простором (див. [13, с. 599, 600, 604]).

Нехай G — область, $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$, B — банахів простір. Розглядатимемо простори $W^{m,p}(G)$ і $W_0^{m,p}(G)$ (див. [1, с. 44]); $H^m(G) := W^{m,2}(G)$, $H_0^m(G) := W_0^{m,2}(G)$; $L^p(0,T;B)$ (див. [1, с. 155]); $W^{m,p}(0,T;B)$ (див. [14, с. 286]); $H^m(0,T;B) := W^{m,2}(0,T;B)$.

Нехай $m \in \mathbb{N}$, $q \in \mathcal{B}_+(G)$ і $q_0 \geqslant 1$. Узагальненим простором Соболєва $W^{m,q(y)}(G)$ називатимемо підпростір простору $L^{q(y)}$(G), складений з функцій, узагальнені похідні (в сенсі Соболєва) включно до порядку m яких існують і належать до $L^{q(y)}(G)$. Якщо $m \in \mathbb{N}$, $q_0 > 1$, то $W^{m,q(y)}(G)$ є рефлексивним сепарабельним банаховим простором (див. [13, с. 604]).

Нехай $C_0^1(Q_{0,T})$ — множина неперервно диференційованих фінітних на $Q_{0,T}$ функцій, $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, $\nabla u \, \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} + \ldots + u_{x_n} v_{x_n}$. Припустимо, що виконуються такі умови:

S: $r, q \in \mathcal{B}_+(\Omega)$, $\dfrac{3}{2} < r_0 \leqslant r^0 < 2$, $q_0 > 2$, і якщо $n \in \mathbb{Z}_2$, то $q^0 \leqslant 2 + \dfrac{2}{n-1}$;

G: $g \in \mathcal{B}_+(Q_{0,T})$, $g_t \in L^\infty(Q_{0,T})$;

E: $Z \in L^\infty(Q_{0,T} \times \Omega)$;

Ф: $\phi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$, $\phi(0) = 0$;

F: $f \in L^2(Q_{0,T})$;

U: $u_0 \in H^2(\Omega) \bigcap H_0^1(\Omega)$.

Означення. Функцію $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1)—(3), якщо $u_t \in L^2(Q_{0,T})$, $\mathcal{R}u \in L^{r'(x)}(Q_{0,T})$, $Gu \in L^{q'(x)}(Q_{0,T})$, $Eu \in L^2(Q_{0,T})$, u задовольняє умови (2), (3) і

$$\int\limits_{Q_{0,T}} [-\mathcal{R}u\, v_t + u_t\, v + a \nabla u \nabla v + G u\, v + \phi(Eu) v - f v]\, dxdt = 0 \qquad (10)$$

для всіх $v \in C_0^1(Q_{0,T})$.

Теорема. *Нехай* $\partial\Omega \in C^4$, *виконуються умови* **S–U.** *Тоді задача* (1) — (3) *має узагальнений розв'язок u і цей розв'язок характеризується такими додатковими властивостями:* $\mathcal{R}u, Gu \in L^2(Q_{0,T})$, $|u|^{\frac{r(x)}{2}-1} u \in H^1(0,T; L^2(\Omega))$.

Обґрунтування основного результату. Аналогічно як в [15] доводимо таку лему.

Лема 1. *Якщо* $r \in \mathcal{B}_+(\Omega)$ і $r_0 > 1$ (*відповідно,* $g \in L^\infty(Q_{0,T})$, $q \in \mathcal{B}_+(\Omega)$ і $q_0 > 1$), *то визначений в* (4) (*відповідно, в* (5)) *оператор Немицького* $\mathcal{R} : L^{r(x)}(Q_{0,T}) \to L^{r'(x)}(Q_{0,T})$ (*відповідно,* $G : L^{q(x)}(Q_{0,T}) \to L^{q'(x)}(Q_{0,T})$) *є обмеженим і неперервним.*

Доведення нижченаведеної леми можна знайти в [8].

Лема 2. *При виконанні умови* **E** *визначений формулою* (6) *інтегральний оператор* $E : L^2(Q_{0,T}) \to L^2(Q_{0,T})$ *є лінійним неперервним оператором і задовольняє оцінку*

$$\| Eu;\ L^2(Q_{0,T})\| \leqslant C_1 \|u; L^2(Q_{0,T})\|,\ u \in L^2(Q_{0,T}), \tag{11}$$

де $C_1 > 0$ — *стала, яка не залежить від* u.

Для доведення теореми використаємо метод еліптичної регуляризації.

Крок 1. Для кожного $\varepsilon > 0$ розглянемо допоміжну задачу Діріхле—Неймана

$$-\varepsilon u_{tt}^\varepsilon + (\mathcal{R}u^\varepsilon)_t + u_t^\varepsilon - a\Delta u^\varepsilon + G u^\varepsilon + \phi(Eu^\varepsilon) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{12}$$

$$u^\varepsilon|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \quad u^\varepsilon|_{\Omega_0} = u_0, \quad u_t^\varepsilon|_{\Omega_T} = 0. \tag{13}$$

За допомогою методу Гальоркіна доводимо існування узагальненого розв'язку u^ε задачі (12), (13) з властивостями $u^\varepsilon \in H^2(Q_{0,T}) \cap H^1(0,T; H_0^1(\Omega))$, $\mathcal{R}u^\varepsilon \in H^1(0,T; L^2(\Omega))$, $Gu^\varepsilon \in L^2(Q_{0,T})$, $\phi(Eu^\varepsilon) \in L^2(Q_{0,T})$, u^ε задовольняє (12) майже скрізь в $Q_{0,T}$.

Крок 2. Отримаємо оцінки першого типу для u^ε. Введемо допоміжну функцію: $D(x,t) := \left(1 - \dfrac{t}{T}\right)^2 u_0(x)$, $(x,t) \in \overline{Q_{0,T}}$. При виконанні умов **S** і **U** маємо, що $D \in H^2(Q_{0,T}) \subset$ $\subset C([0,T]; L^{r(x)}(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega))$,

$$D|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \quad D|_{t=0} = u_0, \quad D|_{t=T} = 0, \quad D_t|_{t=T} = 0. \tag{14}$$

Домножимо (12) на $u^\varepsilon - D$ та зінтегруємо за $Q_{0,T}$. З отриманої рівності випливає оцінка

$$\varepsilon \int\limits_{Q_{0,T}} \left|u_t^\varepsilon\right|^2 dxdt + \int\limits_{Q_{0,T}} \left[|\nabla u^\varepsilon|^2 + |u^\varepsilon|^{q(x)} + |u^\varepsilon|^2 + |u^\varepsilon|^{r(x)} \right] dxdt \leqslant C_2. \tag{15}$$

З (15) і леми 1 матимемо, що

$$\| \mathcal{R}u^\varepsilon;\ L^{r'(x)}(Q_{0,T})\| \leqslant C_3, \quad \|Gu^\varepsilon; L^{q'(x)}(Q_{0,T})\| \leqslant C_4. \tag{16}$$

З умови **Φ** і оцінок (11), (15) випливає, що

$$\| \phi(Eu^\varepsilon);\ L^2(Q_{0,T})\| \leqslant C_5 \| u^\varepsilon; L^2(Q_{0,T})\| \leqslant C_6. \tag{17}$$

Тут $C_2, \ldots, C_6 > 0$ — сталі, які не залежать від ε.

Оцінки (15)—(17) дають можливість зробити висновок про існування такої послідовності $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, що $\varepsilon_j \underset{j\to\infty}{\to} 0$,

$$u^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\to} u \text{ слабко в } L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{r(x)}(Q_{0,T}) \cap L^{q(x)}(Q_{0,T}), \tag{18}$$

$$\mathcal{R}u^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\to} \mathcal{X}_1 \text{ слабко в } L^{r'(x)}(Q_{0,T}), \tag{19}$$

$$Gu^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\to} \mathcal{X}_2 \text{ слабко в } L^{q'(x)}(Q_{0,T}), \tag{20}$$

$$\phi(Eu^{\varepsilon_j}) \underset{j\to\infty}{\to} \mathcal{X}_3 \text{ слабко в } L^2(Q_{0,T}), \tag{21}$$

$$\sqrt{\varepsilon_j}\, u_t^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\to} \mathcal{X}_4 \text{ слабко в } L^2(Q_{0,T}). \tag{22}$$

Крок 3. Отримаємо оцінки другого типу для u^ε. За умови **S** маємо таке:

$$\left|u^\varepsilon\right|^{\frac{r(x)}{2}-1} u^\varepsilon \in H^1(0,T;L^2(\Omega)),\ (|u^\varepsilon|^{\frac{r(x)}{2}-1}u^\varepsilon)_t = \frac{r(x)}{2}|u^\varepsilon|^{\frac{r(x)}{2}-1}u_t^\varepsilon. \tag{23}$$

$$\left|u^\varepsilon\right|^{q(x)} \in W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega)),\ (|u^\varepsilon|^{q(x)})_t = q(x)|u^\varepsilon|^{q(x)-2}u^\varepsilon u_t^\varepsilon. \tag{24}$$

Оскільки (12) виконується майже скрізь в $Q_{0,T}$, то домноживши цю рівність на функцію $u_t^\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ і зінтегрувавши за $Q_{0,T}$, після нескладних перетворень отримаємо оцінку

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left[|u^\varepsilon|^{r(x)-2}|u_t^\varepsilon|^2 + |u_t^\varepsilon|^2\right] dxdt \leqslant C_7. \tag{25}$$

Тому з (23) випливає, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left|(|u^\varepsilon|^{\frac{r(x)}{2}-1}u^\varepsilon)_t\right|^2 dxdt \leqslant \frac{|r^0|^2}{4} \int\limits_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^{r(x)-2}|u_t^\varepsilon|^2\, dxdt \leqslant C_8\,. \tag{26}$$

Тут $C_7, C_8 > 0$ — сталі, які не залежать від ε. З оцінок (15), (25), (26) випливає, що

$$|u^{\varepsilon_j}|^{\frac{r(x)}{2}-1}u^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\to} \mathcal{X}_5 \text{ слабко в } H^1(0,T;L^2(\Omega)), \tag{27}$$

$$u^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\to} u \text{ слабко в } H^1(Q_{0,T}), \tag{28}$$

З (28), теореми Реллiха—Кондрашова (див. лему 1.28 [1, с. 47]) і з леми 1.18 [1, с. 39] отримаємо, що

$$u^{\varepsilon_j} \underset{j\to\infty}{\to} u \text{ сильно в } L^2(Q_{0,T}) \text{ та майже скрізь в } Q_{0,T}. \tag{29}$$

Тому $\mathcal{X}_1 = \mathcal{R}u$, $\mathcal{X}_2 = Gu$, $\mathcal{X}_5 = |u|^{\frac{r(x)}{2}-1}u$. З умови **Ф**, неперервності оператора E і збіжності (29) випливає рівність $\mathcal{X}_3 = \phi(Eu)$.

Візьмемо в (12) $\varepsilon = \varepsilon_j$, домножимо отриману рівність на $v \in C_0^1(Q_{0,T})$, зінтегруємо за $(x,t) \in Q_{0,T}$, зінтегруємо частинами і спрямуємо $j \to \infty$. У результаті отримаємо (10). Оскільки функції $\{u^{\varepsilon_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ задовольняють умови (13), то зі збіжності (28) робимо висновок про те, що функція u задовольняє (2) і (3). Отже, u — узагальнений розв'язок задачі (1)—(3).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. Москва: Мир, 1978. 336 с.
2. Merton R.C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *J. Financ. Econ.* 1976. **3**. P. 125—144.

3. Бокало Т.М., Бугрій О.М. Подвійно нелінійні параболічні рівняння зі змінними показниками нелінійності. *Укр. мат. журн.* 2011. **63**, вип. 5. С. 612—628.
4. Antontsev S., Shmarev S. Evolution PDEs with nonstandard growth conditions. Existence, uniqueness, localization, blow-up. Paris: Atlantis Press, 2015. 409 p. (Atlantis Studies in Differential Equations; Vol. 4).
5. Souplet Ph. Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source. *J. Differ. Equat.* 1999. **153**. P. 374—406.
6. Бокало М., Дмитрів В. Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь в анізотропних просторах. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2001. Вип. 59. С. 84—101.
7. Pinasco J.P. Blow-up for parabolic and hyperbolic problems with variable exponents. *Nonlinear Analysis*. 2009. **71.** P. 1094—1099.
8. Бугрій О., Бугрій М. Про існування в узагальнених просторах Соболєва розв'язків мішаних задач для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, пов'язаних з європейським опціоном. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2016. Вип. 81. С. 61—84.
9. Briani M., Natalini R., Russo G. Implicit-explicit numerical schemes for jump-diffusion processes. *Calcolo*. 2007. **44**, Iss. 1. P. 33—57.
10. Cifani S., Jakobsen E.R., Karlsen K.H. The discontinuous Galerkin method for fractional degenerate convection-diffusion equations. *BIT*. 2011. **51**, Iss. 4. P. 809—844.
11. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. 2-е изд. Москва: Наука, 1973. 576 с.
12. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Т. 1: Общая теория. Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. 896 с.
13. Kovacik O., Rakosnik J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$. *Czech. Math. J.* 1991. **41,** Iss. 116. P. 592—618.
14. Evans L.C. Partial differential equations. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. 662 p. (Graduate Studies in Mathematics; Vol. 19).
15. Galewski M. On the continuity of the Nemytskij operator between the spaces $L^{p_1(x)}$ and $L^{p_2(x)}$. *Georgian Math. J.* 2006. **13**, Iss. 2. P. 261—265.

Надійшло до редакції 09.09.2016

REFERENCES

1. Gajewski, H., Groger, K., Zacharias, K. (1978). Nonlinear operator equations and operator differential equations. Moscow: Mir (in Russian).
2. Merton, R. C. (1976). J. Finan. Econ., 3, pp.125-144.
3. Bokalo, T. M., Buhrii, O. M. (2011). Ukr. Math. J., 63, Iss. 5, pp. 612-628 (in Ukrainian).
4. Antontsev, S., Shmarev, S. (2015). Evolution PDEs with nonstandard growth conditions, Existence, uniqueness, localization, blow-up, Atlantis Studies in Differential Equations, Vol. 4. Paris: Atlantis Press.
5. Souplet, Ph. (1999). J. Differ. Equat., 153, pp. 374-406.
6. Bokalo, M., Dmytriv, V. (2001). Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math., Iss. 59, pp. 84-101 (in Ukrainian).
7. Pinasco, J. P. (2009). Nonlinear Analysis, 71, pp. 1094-1099.
8. Buhrii, O., Buhrii, M. (2016). Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math., Iss. 81, pp. 61-84.
9. Briani, M., Natalini, R., Russo, G. (2007). Calcolo, 44, Iss. 1, pp. 33-57.
10. Cifani, S., Jakobsen, E. R., Karlsen, K. H. (2011). BIT, 51, Iss. 4, pp. 809-844.
11. Ladyzhenskaya, O. A., Uraltseva, N. N. (1973). Linear and quasilinear elliptic equations. Moscow: Nauka (in Russian).
12. Dunford, N., Schwartz, J. T. (1962). Linear Operators, Pt. I: General Theory. Moscow: Izd-vo Inostr. lit. (in Russian).
13. Kovacik, O., Rakosnik, J. (1991). Czech. Math. J., 41 Iss.116, pp. 592-618.
14. Evans, L. C. (1998). Partial differential equations, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19. Providence, RI: Amer. Math. Soc.,
15. Galewski, M. (2006). Georgian Math. J., 13, Iss. 2, pp. 261-265.

Received 09.09.2016

О.Н. Бугрий

Львовский национальный университет им. Ивана Франко
E-mail: ol_buhrii@i.ua

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВАЖДЫ НЕЛИНЕЙНЫХ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Рассмотрена смешанная задача для дважды нелинейных параболических уравнений с переменными показателями нелинейности, возмущённых генератором скачкообразного процесса, которые возникают в теории ценообразования европейских опционов. Доказана теорема существования её решения.

Ключевые слова: *дважды нелинейное параболическое уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, переменный показатель нелинейности, скачкообразно-диффузионный процесс, европейский опцион.*

O.M. Buhrii

Ivan Franko National University of Lviv
E-mail: ol_buhrii@i.ua

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DOUBLY NONLINEAR
INTEGRO- DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE
EXPONENTS OF NONLINEARITY

We consider the initial-boundary value problem for doubly nonlinear parabolic equations with variable exponents of nonlinearity perturbed by a generator of the jump process arising from the theory of European options. The existence theorem for the problem is proved.

Keywords: *doubly nonlinear parabolic equation, integro-differential equation, variable exponent of nonlinearity, jump-diffusion process, European option.*