

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.12.012>

УДК 517.929.2

М.Ф. Городній, І.В. Гончар

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

E-mail: goncharinna@ukr.net

Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом

(Представлено академіком НАН України М.О. Перестюком)

Досліджується питання про існування єдиного обмеженого розв'язку одного різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом у скінченновимірному банаховому просторі.

Ключові слова: різницеве рівняння, скінченновимірний простір, лінійний оператор, обмежений розв'язок.

Нехай X — скінченновимірний комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; A, B — лінійні оператори в X ; I — одиничний оператор в X .

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+1} = A_n x_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

у якому $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — шукана послідовність елементів простору X , $A_n = A, n \geq 1, A_n = B, n \leq 0$.

Наша мета — отримати необхідні і достатні умови на оператори A, B , при виконанні яких справджується така умова.

Умова 1. Для довільної обмеженої в X послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі X .

Аналогічне питання досліджувалося, зокрема, в [1–3] для різницевого рівняння зі сталими і в [2, 4–6] зі змінними операторними коефіцієнтами. У [6, с. 250] доведено, що для різницевого рівняння

$$x_{n+1} = T_n x_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

умова існування єдиного обмеженого розв'язку еквівалентна умові дискретної дихотомії для послідовності операторів $\{T_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Останню умову важко перевіряти. Інший підхід до дослідження питання про існування єдиного обмеженого розв'язку рівняння (2) запропоновано в [2, с. 25]. Цей підхід розвивається і використовується в даній роботі.

© М.Ф. Городній, І.В. Гончар, 2016

Допоміжні твердження. Покладемо $Q_-^0 = \{z \in X \mid \sup_{n \geq 1} \|A^n z\| < \infty\}$, $Q_+^0 = \{z \in X \mid \text{існує послідовність } \{a(v, 0, z), v \leq 0\} \text{ така, що } a(0, 0, z) = z, Ba(v, 0, z) = a(v+1, 0, z), v \leq -1; \sup_{v \leq 0} \|a(v, 0, z)\| < \infty\}$.

Якщо $y_0 = y_+^0 \in Q_+^0$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq 0$, то послідовність $\{\dots, -a(-2, 0, y_+^0), \underbrace{-a(-1, 0, y_+^0)}_0, \bar{0}, \bar{0}, \dots\}$ є відповідним послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмеженим розв'язком рівняння (1). Тому виконуються така лема.

Лема 1. Якщо виконується умова 1, то для кожного $z \in Q_+^0$ існує єдина послідовність $\{a(v, 0, z), v \leq 0\}$.

Лема 2. Якщо виконується умова 1, то $X = Q_-^0 + Q_+^0$, тобто X є прямою сумою Q_-^0 та Q_+^0 .

Доведення. Зафіксуємо $u \in X$ і доведемо, що знайдуться такі $\alpha \in Q_-^0$, $\beta \in Q_+^0$, що $u = \alpha + \beta$. Розглянемо рівняння

$$u_{n+1} = Au_n, n \geq 1; \quad u_1 = Bu_0 + u; \quad u_{n+1} = Bu_n, n \leq -1.$$

За умовою 1 воно має єдиний обмежений розв'язок $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Тоді $u_1 \in Q_-^0$, оскільки $u_2 = Au_1$, $u_3 = A^2u_1, \dots, u_{n+1} = A^n u_1, \dots$ — обмежена послідовність. Також $u_0 \in Q_+^0$, тому що $u_0 = Bu_{-1}$, $u_{-1} = Bu_{-2}, \dots$, а отже, для u_0 маємо, що $a(0, 0, u_0) = u_{-1}$, $a(-1, 0, u_0) = u_{-2}$ і т. д. Тому і $Bu_0 \in Q_+^0$. Отже, $u = \alpha + \beta$, де $\alpha = u_1$, $\beta = -Bu_0$.

Доведемо єдиність розкладу. Якщо, від супротивного, для деякого $u \in X$ вказаний розклад не єдиний, то знайдеться $w \in Q_-^0 \cap Q_+^0$, $w \neq \bar{0}$. Але тоді послідовність $\{\dots, a(-2, 0, w), a(-1, 0, w), w, Aw, A^2w, \dots\}$ є ненульовим обмеженим розв'язком однорідного рівняння (1).
Протириччя.

Лема 3. Якщо виконується умова 1, то спектри $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ операторів A , B не перетинаються з одиничним колом $S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

Доведення. Припустимо, від супротивного, що існує $\lambda \in S \cap \sigma(A)$. Зафіксуємо власний вектор w оператора A , відповідний власному числу λ . Внаслідок умови 1 різницеве рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок, відповідний обмеженій послідовності $\bar{y}^{(1)} = \{\dots, \bar{0}, \underbrace{w}_0, \bar{0}, \dots\}$. Цей розв'язок явно визначається і записується у вигляді $\bar{x}^{(1)} = \{\dots, \bar{0}, \underbrace{w}_1, \lambda w, \lambda^2 w, \dots\}$. Аналогічно для кожного $m \geq 1$ відповідний обмеженій послідовності $\bar{y}^{(m)} = \{\dots, \bar{0}, \underbrace{w}_0, \lambda w, \dots, \lambda^{m-1} w, \bar{0}, \dots\}$ єдиний обмежений розв'язок рівняння (1) має вигляд $\bar{x}^{(m)} = \{\dots, \bar{0}, \underbrace{w}_1, 2\lambda w, 3\lambda^2 w, \dots, m\lambda^m w, m\lambda^{m+1} w, m\lambda^{m+2} w, \dots\}$.

Відзначимо, що в банаховому просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, X) = \{\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset X \mid \|\bar{x}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty\}$ різницеве рівняння (1) записується у вигляді $T\bar{x} = \bar{y}$, де $T: l_\infty \rightarrow l_\infty$ — лінійний неперервний оператор, який кожному $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_\infty$ ставить у відповідність такий елемент $T\bar{x} = \{(Tx)_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_\infty$, що $(Tx)_n = x_{n+1} - Ax_n$, $n \geq 1$, $(Tx)_n = x_{n+1} - Bx_n$, $n \leq 0$. З умови 1 і теореми Банаха про обернений оператор випливає, що T має неперервний обернений оператор T^{-1} . Але $\|T^{-1}\bar{y}^{(m)}\|_\infty = \|\bar{x}^{(m)}\|_\infty = m\|w\|$ для кожного $m \geq 1$, що суперечить обмеженості T^{-1} . Таким чином, $S \cap \sigma(A) = \emptyset$.

Аналогічно перевіряється, що $S \cap \sigma(B) = \emptyset$.

Нехай $\sigma_-(A), \sigma_-(B)$ — частини спектрів операторів A, B , які лежать всередині, а $\sigma_+(A), \sigma_+(B)$ — зовні кола S . Вважатимемо, що множини $\sigma_{\pm}(A), \sigma_{\pm}(B)$ непорожні. Зауважимо, що всі отримані нижче результати залишаються справедливими і у випадку, коли серед цих множин є порожні, з очевидними змінами в отриманих формулах.

Внаслідок леми 3 при виконанні умови 1 простір X розкладається в пряму суму інваріантних відносно A підпросторів $X = X_+(A) \dot{+} X_-(A)$ таким чином, що звуження A_-, A_+ оператора A на $X_-(A), X_+(A)$ мають спектри $\sigma_-(A), \sigma_+(A)$. Також $X = X_+(B) \dot{+} X_-(B)$ і звуження B_-, B_+ оператора B на $X_-(B), X_+(B)$ мають такі ж властивості. Відзначимо, що при цьому збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_+^{-n}\|, \sum_{n=1}^{\infty} \|A_-^n\|, \sum_{n=1}^{\infty} \|B_+^{-n}\|, \sum_{n=1}^{\infty} \|B_-^n\|. \quad (3)$$

Лема 4. Якщо $S \cap \sigma(A) = \emptyset, S \cap \sigma(B) = \emptyset$, то $Q_-^0 = X_-(A), Q_+^0 = X_+(B)$.

Доведення. Доведемо, що $Q_-^0 = X_-(A)$. Внаслідок збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_-^n\|$ послідовність $\{\|A_-^n z\|, n \geq 1\}$ обмежена для кожного $z \in X_-(A)$, а отже, $X_-(A) \subset Q_-^0$.

Також у випадку, коли $z \in X_+(A) \cap Q_-^0$, матимемо

$$\|z\| = \|A_+^{-n} A_+^n z\| \leq \|A_+^{-n}\| \cdot \sup_{k \geq 1} \|A_+^k z\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_+^{-n}\|$ збігається. Таким чином, $z = \bar{0}$ і $Q_- = X_-(A)$.

Доведемо, що $Q_+^0 = X_+(B)$. Нехай $z \in X_+(B)$. Оскільки X_+ — інваріантний простір відносно оператора B , то $a(v, 0, z) = B_+^{v-1} z$ для кожного $v \leq 0$, причому $\sup_{v \leq 0} \|B_+^{v-1} z\| < \infty$. Тому $z \in Q_+^0$. Отже, $X_+(B) \subset Q_+^0$.

Нехай $z \in X_-(B) \cap Q_+^0$. Позначимо через P_-^B, P_+^B проектори в X на $X_-(B), X_+(B)$, що відповідають зображенню $X = X_-(B) \dot{+} X_+(B)$. Тоді для кожного $v \leq 0$

$$\|z\| = \|B_-^{|v|+1} P_-^B a(v, 0, z)\| \leq \|B_-^{|v|}\| \cdot \|P_-^B\| \cdot \sup_{k \leq 1} \|a(k, 0, z)\| \rightarrow 0, \quad v \rightarrow -\infty,$$

оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|B_-^n\|$ збігається. Тому $z = \bar{0}$. Отже, $Q_+^0 = X_+(B)$.

Основні результати. Нехай $X = Q_-^0 \dot{+} Q_+^0$. Зафіксуємо обмежену послідовність $\bar{y} = \{\bar{y}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ і покладемо $\|\bar{y}\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|$. Внаслідок леми 2 елемент y_0 цієї послідовності єдиним чином зображується у вигляді $y_0 = y_0^- + y_0^+$, де $y_0^- \in Q_-^0, y_0^+ \in Q_+^0$. Позначимо через P_-^0, P_+^0 проектори в X на підпростори Q_-^0, Q_+^0 , що відповідають зображенню $X = Q_-^0 \dot{+} Q_+^0$, P_-^A, P_+^A — проектори в X на $X_-(A), X_+(A)$, що відповідають зображенню $X = X_-(A) \dot{+} X_+(A)$.

Покладемо для кожного $n \geq 1$

$$P_+^n = A^n P_+^0 A_+^{-n} P_+^A, \quad P_-^n = I - P_+^n; \quad P_-^{-n} = B^{-n} P_-^0 P_-^B, \quad P_+^{-n} = I - P_-^{-n}; \quad (4)$$

$$x_1 = P_-^0 y_0 + \sum_{v=-\infty}^{-1} P_-^0 B_-^{|v|} P_-^B y_v - \sum_{v=1}^{\infty} P_+^0 A_+^{-v} P_+^A y_v; \quad (5)$$

$$\forall n \geq 2: x_n = \sum_{k=1}^{n-1} A^{n-1-k} P_-^k y_k + \sum_{v=-\infty}^0 A^{n-1} P_-^0 B^{|v|} P_-^B y_v - \sum_{v=n}^{\infty} P_+^{n-1} A_+^{n-1-v} P_+^A y_v; \quad (6)$$

$$\forall n \leq 0: x_n = P_-^{n-1} y_{n-1} + \sum_{v=-\infty}^{n-2} P_-^{n-1} B^{|v|+n-1} P_-^B y_v - B_+^{-|n|-1} P_+^0 y_0 - \\ - B_+^{-|n|} P_+^{-1} y_{-1} - \dots - B_+^{-1} P_+^{-|n|} y_{-|n|} - \sum_{v=1}^{\infty} B_+^{n-1} P_+ A_+^{-v} P_+^A y_v. \quad (7)$$

Основні результати роботи містять нижчесформульовані твердження.

Лема 5. *Припустимо, що виконуються такі умови:*

(i) $\sigma(A) \cap S = \emptyset, \sigma(B) \cap S = \emptyset;$

(ii) $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B).$

Тоді $Q_-^0 = X_-(A), Q_+^0 = X_+(B)$ і ряди з (5)–(7) абсолютно збігаються за нормою та задають відповідний обмежений послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1). Цей розв'язок єдиний у класі всіх обмежених в X послідовностей.

Доведення. Рівності множин $Q_-^0 = X_-(A), Q_+^0 = X_+(B)$ справджуються внаслідок леми 4. Доведемо, що для визначених за допомогою (4) проєкторів послідовність $\{\|P_+^n\|, n \geq 1\}$ є обмеженою.

Справді, $P_+^0 + P_-^0 = I$, причому P_-^0 проєкує на $X_-(A)$, а отже, $P_+^n = A^n(I - P_-^0)A_+^{-n}P_+^A = P_+^A - A^n P_-^0 A_+^{-n} P_+^A$ для довільного $n \geq 1$, звідки

$$\|P_+^n\| \leq \|P_+^A\| + \|P_-^0\| \cdot \sup_{n \geq 1} \|P_+^A\| \cdot \sup_{n \geq 1} \|A_+^{-n}\|.$$

Тут $\sup_{n \geq 1} \|A_+^{-n}\| < \infty, \sup_{n \geq 1} \|P_+^A\| < \infty$ внаслідок збіжності рядів (3).

Аналогічно послідовність $\{\|P_-^n\|, n \geq 1\}$ є обмеженою.

Тому, з урахуванням (3), ряди із (5)–(7) збігаються абсолютно за нормою і послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ є обмеженою.

Безпосередньою підстановкою перевіряється, що визначена за допомогою (5)–(7) послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ є розв'язком рівняння (1), відповідним обмежений послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Доведемо єдність цього розв'язку в класі обмежених у X послідовностей. Внаслідок лінійності різницевого рівняння (1) досить перекопатися, що однорідне різниче рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad n \geq 1; \quad x_{n+1} = Bx_n, \quad n \leq 0 \quad (8)$$

має тільки нульовий обмежений розв'язок.

Перевіримо це. Нехай $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – обмежений розв'язок рівняння (8), Доведемо спочатку, що $x_1 = \bar{0}$. Справді, оскільки послідовність $\{x_1, x_2 = Ax_1, x_3 = A^2x_1, \dots\}$ обмежена, то $x_1 \in Q_-^0$. Також $x_1 \in Q_+^0$, тому що $x_1 = Bx_0, x_0 = Bx_{-1}, x_{-1} = Bx_{-2}, \dots$, причому послідовність $\{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$ обмежена. Внаслідок умови (ii) $X = Q_-^0 \dot{+} Q_+^0$, а отже, $x_1 = \bar{0}$.

Оскільки $x_1 = \bar{0}$, то $x_{n+1} = A^n x_1 = \bar{0}$ для кожного $n \geq 1$. Також відзначимо, що як і для x_1 при фіксованому $k \leq 0$ перевіряється включення $x_k \in Q_+^0 = X_+(B)$. При цьому $\bar{0} = x_1 =$

$= Bx_0 = B^2 x_{-1} = \dots = B^{|k|+1} x_k$, звідки $x_k \in X_-(B)$. Тому $x_k \in X_-(B) \cap X_+(B)$, звідки випливає, що $x_k = \bar{0}$. Таким чином, рівняння (8) має лише нульовий обмежений розв'язок.

Теорема 1. У скінченновимірному комплексному банаховому просторі X умова 1 виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (i), (ii) лемми 5.

Якщо умови (i), (ii) виконуються, то відповідний обмежений послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ різницевого рівняння (1) визначається формулами (5)–(7).

Теорема 1 є прямим наслідком лем 1–5.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Городний М.Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. матем. журн. — 1991. — **43**, № 1. — С. 42–46.
2. *Дороговец А.Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. — Киев: Вища шк., 1992. — 319 с.
3. *Ким В.С.* Об условиях существования ограниченных решений разностного уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. — 1967. — **3**, № 12. — С. 2151–2160.
4. *Баскаков А.Г., Пастухов А.И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. — 2001. — **42**, № 6. — С. 1231–1243.
5. *Слюсарчук В.Е.* Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на \mathbb{Z} функций // Матем. заметки. — 1985. — **37**, вып. 5. — С. 662–666.
6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — Москва: Мир, 1985. — 376 с.

REFERENCES

1. *Gorodnii M.F.* Ukr. Mat. J., 1991, **43**, No 1: 42-46 (in Russian).
2. *Dorogovtsev A.Ya.* Periodic and Stationary Regimes of Infinite-Dimensional Deterministic and Stochastic Dynamical Systems, Kiev: Vyscha Shkola, 1992 (in Russian).
3. *Kim V.S.* Differ. Equations, 1967, **3**, No 12: 2151-2160 (in Russian).
4. *Baskakov A.G., Pastukhov A.I.* Sib. Math. J., 2001, **42**, Iss. 6: 1026-1035.
5. *Slyusarchuk V.E.* Math. Notes, 1985, **37**, Iss. 5: 360-363.
6. *Henry D.* Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Moscow: Mir, 1985 (in Russian).

Надійшло до редакції 02.06.2016

М.Ф. Городний, И.В. Гончар

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка

E-mail: goncharinna@ukr.net

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Исследуется вопрос о существовании единственного ограниченного решения одного разностного уравнения с переменным операторным коэффициентом в конечномерном банаховом пространстве.

Ключевые слова: разностное уравнение, конечномерное пространство, линейный оператор, ограниченное решение.

M.F. Gorodnii, I.V. Gonchar

Taras Shevchenko National University of Kiev

E-mail: goncharinna@ukr.net

ON THE BOUNDED SOLUTIONS OF A DIFFERENCE EQUATION WITH VARIABLE OPERATOR COEFFICIENT

We study the problem of existence of the unique bounded solution of a difference equation with variable operator coefficient in a finite-dimensional Banach space.

Keywords: difference equation, finite-dimensional space, linear operator, bounded solution.