ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2016

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.11.005

УДК 512.544

Л.А. Курдаченко [1], І.Я. Субботін [2], В.А. Чупордя [1]

[1] Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара
[2] Національний університет, Лос-Анджелес, США
E-mail: lkurdachenko@i.ua, isubboti@nu.edu, vchupordia@gmail.com

Про деякі "мінімальні" алгебри Лейбніца

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В.П. Моторним)

Отримано детальний опис алгебр Лейбніца, усі власні підалгебри яких є алгебрами Лі, та алгебр Лейбніца, усі власні підалгебри яких є абелевими.

Ключові слова: *алгебра Лейбніца, циклічна алгебра, алгебра Лі.*

Алгебра L над полем F називається *(лівою) алгеброю Лейбніца,* якщо друга бінарна операція (комутування [,]) задовольняє тотожність Лейбніца

$$[[a,b],c]=[a,[b,c]]-[b,[a,c]] \text{ для усіх } a,b,c\in L.$$

Алгебри Лейбніца є узагальненням алгебр Лі. Дійсно, алгебра Лейбніца L є алгеброю Лі тоді і тільки тоді, коли $[a, a] = 0$ для кожного елемента $a \in L$. З огляду на це ми можемо розглядати алгебри Лейбніца як "не антикомутативний" аналог алгебр Лі.

Алгебри Лейбніца вперше з'явилися в роботах А.М. Блоха [1—3], у яких він називав їх D-алгебрами. Однак тоді його дослідження не були продовжені. Інтерес до цього об'єкта зріс після роботи Д. Лодая [4], який і ввів термін "алгебра Лейбніца" на честь Лейбніца, який розглядав "тотожність Лейбніца" для диференціювання функцій. Алгебри Лейбніца природно виникають у деяких розділах диференціальної геометрії, алгебрі гомологій, класичній алгебраїчній топології, алгебраїчній K-теорії, некомутативній геометрії та ін. Деякі роботи, що стосуються алгебр Лейбніца, присвячені вивченню гомологічних проблем [5—7]. Теорія алгебр Лейбніца розвивається досить інтенсивно, але дуже нерівномірно. З одного боку, деякі глибокі структурні теореми були отримані як аналоги відповідних результатів алгебр Лі. З іншого боку, є деякі питання, які, здавалося б, повинні розглядатися в першу чергу, навіть не починали досліджуватися. Так, автори не змогли знайти робіт, які містять загальний опис циклічних підалгебр алгебр Лейбніца. Знайдено роботи, які містили опис для деяких частинних випадків, але загального результату не було. Тому ми вважаємо доцільним заповнити цю прогалину. Буде корисним нагадати деякі важливі поняття.

Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Для непорожньої підмножини M алгебри L позначимо через $\langle M\rangle$ підалгебру алгебри L, породжену множиною M.

Нехай A та B — підпростори L, тоді через $[A, B]$ позначимо підпростір, породжений усіма елементами вигляду $[a, b]$, де $a\in A$, $b\in B$.

Алгебра Лейбніца L має ідеал, який відіграє важливу роль в її будові. Позначимо через $\mathrm{Leib}(L)$ підпростір, породжений елементами $[a, a]$, $a\in L$. Підпростір $\mathrm{Leib}(L)$ є ідеалом в L, і якщо H є таким ідеалом в L, що L/H є алгеброю Лі, то $\mathrm{Leib}(L) \leqslant H$. Ідеал $\mathrm{Leib}(L)$ називають *ядром Лейбніца алгебри L*.

Зазначимо ще одну важливу властивість елементів ядра Лейбніца:

$\big[[a, a], x\big]=0$ для довільних елементів $a, x\in L$.

Нехай L — алгебра Лейбніца. Визначимо нижній центральний ряд для L:

$$L=\gamma_1(L)\geqslant\gamma_2(L)\geqslant\ldots\geqslant\gamma_\alpha(L)\geqslant\gamma_{\alpha+1}(L)\geqslant\ldots\gamma_\delta(L),$$

де $\gamma_1(L)=L, \gamma_2(L)=[L,L]$, далі рекурсивно $\gamma_{\alpha+1}(L)=\big[L,\gamma_\alpha(L)\big]$ для усіх порядкових α і $\gamma_\lambda(L)=\bigcap_{\mu<\lambda}\gamma_\mu(L)$ для граничних λ. Останній член $\gamma_\delta(L)$ називають *нижнім гіпоцентром L*.

Таким чином, якщо k — додатне ціле число, то $\gamma_k(L)=\big[L,[L,\ldots[L,L]\ldots]\big]$ — лівонормований комутант k екземплярів L.

Алгебра Лейбніца L називається *нільпотентною*, якщо існує додатне ціле k таке, що $\gamma_k(L)=\langle 0\rangle$. Більш детально, алгебру L будемо називати *нільпотентною з класом нільпотентності c*, якщо $\gamma_{c+1}(L)=\langle 0\rangle$, але $\gamma_c(L)\neq\langle 0\rangle$. Клас нільпотентності алгебри L будемо позначати через $\mathrm{ncl}(L)$.

Визначимо лівий (відповідно правий) центр $\zeta^{\mathrm{left}}(L)$ (відповідно $\zeta^{\mathrm{right}}(L)$) алгебри Лейбніца L таким чином:

$$\zeta^{\mathrm{left}}(L)=\{x\in L \mid [x, y]=0 \text{ для усіх } y\in L\}$$

(відповідно

$$\zeta^{\mathrm{right}}(L)=\{x\in L \mid [y, x]=0 \text{ для усіх } y\in L\}).$$

Слід зазначити, що лівий центр алгебри L є ідеалом. Більш того, $\mathrm{Leib}(L)\leqslant\zeta^{\mathrm{left}}(L)$, отже, $L/\zeta^{\mathrm{left}}(L)$ є алгеброю Лі. У загальному випадку лівий та правий центри є різними, більш того, лівий центр є ідеалом на відміну від правого центру, який у загальному випадку не є ідеалом. Відповідний приклад можна знайти в роботі [8].

Центр $\zeta(L)$ *алгебри L* визначається таким чином:

$$\zeta(L)=\{x\in L \mid [x, y]=0=[y, x] \text{ для усіх } y\in L\}.$$

Центр є ідеалом в L, що, зокрема, дає змогу розглядати фактор-алгебру $L/\zeta(L)$.

Алгебру Лейбніца L називають *абелевою*, якщо $[x, y]=0$, для усіх елементів $x, y\in L$. Зазначимо, що лівий та правий центри є абелевими підалгебрами.

Визначимо верхній центральний ряд

$$\langle 0\rangle=\zeta_0(L)\leqslant\zeta_1(L)\leqslant\zeta_2(L)\leqslant\ \ldots\ \leqslant\zeta_\alpha(L)\leqslant\ \zeta_{\alpha+1}(L)\leqslant\ldots\zeta_\lambda(L)=\zeta_\infty(L)$$

алгебри Лейбніца L за такими правилами: $\zeta_1(L)=\zeta(L)$ — центр L і рекурсивно $\zeta_{\alpha+1}(L)/\zeta_\alpha(L)=\zeta\big(L/\zeta_\alpha(L)\big)$ для усіх порядкових α та $\zeta_\lambda(L)=\bigcup_{\mu<\lambda}\zeta_\mu(L)$ для граничних λ. За побудовою кожний член цього ряду є ідеалом в L. Останній член $\zeta_\infty(L)$ цього ряду називають *верхнім гіперцентром алгебри L*. Алгебра Лейбніца L називається *гіперцентральною*, якщо вона збігається з верхнім гіперцентром.

Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F і $d \in L$. Покладемо

$$\ln_1(d)=d, \quad \ln_2(d)=[d,d], \quad \ln_{k+1}(d)=\left[d,\ln_k(d)\right], \quad k \in N.$$

Ці елементи будемо називати *лівонормованими комутаторами елемента d*. Слід зазначити, що підалгебра $\langle d \rangle$ є підпростором, породженим елементами $\ln_k(d), k \in N$. Отже, маємо два природних випадки.

Елементи $d_j = \ln_j(d), j \in N$ є лінійно незалежними. Тоді підалгебра $D = \langle d \rangle$ має нижній центральний ряд

$$D = \gamma_1(D) \geqslant \gamma_2(D) \geqslant \ldots \geqslant \gamma_j(D) \geqslant \gamma_{j+1}(D) \geqslant \ldots \langle 0 \rangle$$

довжини ω і $\gamma_j(D) = \oplus_{t \geqslant j} Fd_t, j \in N$. У цьому випадку будемо говорити, що *елемент d має нескінченну глибину*.

Елементи $d_j = \ln_j(d), j \in N$ є лійнійно залежними, тоді підалгебра $D = \langle d \rangle$ має скінченну вимірність над полем F. У цьому випадку будемо говорити, що *елемент d має скінченну глибину*. Нехай k — таке найменше натуральне число, що $\ln_1(d), \ldots, \ln_k(d)$ є лінійно незалежними, але $\ln_1(d), \ldots, \ln_k(d), \ln_{k+1}(d)$ лінійно залежні. Можна показати, що у цьому разі $D = F\ln_1(d) + \ldots + F\ln_k(d)$. Зокрема, підмножина $\{\ln_1(d), \ldots, \ln_k(d)\}$ складе базис для D і $\dim_F(D) = k$. У цьому випадку будемо говорити, що *елемент d має глибину k*.

Випадок, коли елемент d має скінченну глибину, виявився більш різноманітним, що і показує нижчесформульований результат.

Теорема 1. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, $a \in L$, $D = \langle a \rangle$. Припустимо, що елемент a має скінченну глибину. Тоді D є алгеброю одного з таких типів:*

(i) $D = Fa$ — абелева, $[a, a] = 0$;

(ii) існує натуральне k таке, що $\ln_k(a) \neq 0$, але $\ln_{k+1}(a) = 0$, тобто D — нільпотентна циклічна алгебра;

(iii) $D = V \oplus U$, де V — абелевий ідеал, $V \leqslant \zeta^{\text{left}}(D)$, U — нільпотентна циклічна підалгебра, $[D, D] = V \oplus [U, U]$ є абелевим ідеалом;

(iv) $D = \zeta^{\text{left}}(D) \oplus \zeta^{\text{right}}(D)$, де $[D,D] = \zeta^{\text{left}}(D) = F\ln_2(a) + \ldots + F\ln_k(a)$, $\zeta^{\text{right}}(D) = Fc$, для деякого $c \in D$ і $[c, y] = [a, y]$, для кожного $y \in \zeta^{\text{left}}(D)$.

Інший отриманий результат стосується “мінімальних” алгебр Лейбніца, а саме таких алгебр Лейбніца, усі власні підалгебри яких є алгебрами Лі.

Теорема 2. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Припустимо, що кожна власна підалгебра алгебри L є лієвою алгеброю. Тоді L є алгеброю, одного з таких типів:*

(i) L є алгеброю Лі;

(ii) існує натуральне k таке, що $\ln_k(a) \neq 0$, але $\ln_{k+1}(a) = 0$, тобто L є нільпотентною;

(iii) $L = V \oplus U$, де V — абелевий ідеал, $V \leqslant \zeta^{\text{left}}(D)$, $U = Fu$ і $[u, u] = 0$, $V = Fv + Fv_1$ і $[u, v] = v_1$, $[u, v_1] = 0$.

Оскільки кожна абелева алгебра Лейбніца є алгеброю Лі, маємо

Наслідок. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Припустимо, що кожна власна підалгебра алгебри L є абелевою. Тоді L є алгеброю одного з таких типів:*

(i) L є алгеброю Лі, у якої кожна власна підалгебра є абелевою;

(ii) знайдеться натуральне k таке, що $ln_k(a) \neq 0$, але $ln_{k+1}(a) = 0$, тобто L є нільпотентною;

(iii) $L = V \oplus U$, *де* V *є абелевим ідеалом,* $V \leqslant \zeta^{\text{left}}(L)$, $U = Fu$ *і* $[u, u] = 0$, $V = Fv + Fv_1$ *і* $[u, v] = v_1$, $[u, v_1] = 0$.

Цей результат означає, що опис алгебр Лейбніца, усі власні підалгебри яких є абелевими, може бути застосований і на випадок алгебр Лі з такими ж обмеженнями на підалгебри. Такі алгебри Лі можуть бути або простими, або розв'язними. Розв'язні мінімальні неабелеві алгебри Лі (навіть розв'язні мінімальні алгебри Лі, які не є нільпотентними) були описані в [9—11]. Прості мінімальні неабелеві алгебри Лі досліджувалися в [12, 13], але їх повний опис залишається відкритою проблемою.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Блох А.М.* Об одном обобщении понятия алгебры Ли // Докл. АН СССР. — 1965. — **165**. — С. 471—473.
2. *Блох А.М.* Теория гомологий Картана—Эйленберга для одного обобщения класса алгебр Ли // Докл. АН СССР. — 1967. — **175**. — С. 266—268.
3. *Блох А.М.* Некоторое обобщение понятия алгебры Ли // Алгебра и теория чисел: Уч. зап. МГПИ. — 1971. — **375**. — С. 9—20.
4. *Loday J.L.* Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz // Enseign. Math. — 1993. — **39**. — P. 269—293.
5. *Loday J.L., Pirashvili T.* Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology // Math. Ann. — 1993. — **296**. — P. 139—158.
6. *Frabetti A.* Leibniz homology of dialgebras of matrices // J. Pure Appl. Algebra. — 1998. — **129**. — P. 123—141.
7. *Casas J.M., Pirashvili T.* Ten-term exact sequence of Leibniz homology // J. Algebra. — 2000. — **231**. — P. 258—264.
8. *Kurdachenko L.A., Otal J., Pypka A.A.* Relationships between the factors of canonical central series in Leibniz algebras // Europ. J. Math. — 2016. — DOI : 10.1007/s40879-016-0093-5
9. *Stitzinger E.L.* Minimal non nilpotent solvable Lie algebras. // Proc. Amer. Math. Soc. — 1971. — **28**. — P. 47—49.
10. *Гейн А.Г., Кузнецов С.В., Мухин Ю.Н.* О минимальных ненильпотентных алгебрах Ли // Мат. зап. Уральск. ун-т. — 1972. — **8**, № 3. — С. 18—27.
11. *Towers D.A.* Lie algebras all whose proper subalgebras are nilpotent // Lin. Algebra Appl. — 1980. — **32**. — P. 61—73.
12. *Farnsteiner R.* On the structure of simple — semiabelian Lie algebras // Pacific J. Math. — 1984. — **111**. — P. 287—299.
13. *Gein A.G.* Minimal noncommutative and minimal nonabelian algebras // Commun. Algebra. — 1985. — **13**. — P. 305—328.

REFERENCES

1. *Bloh A.M.* Soviet Math. Dokl., 1965, **6**: 1450—1452.
2. *Bloh A.M.* Soviet Math. Dokl., 1967, **8**: 824—826.
3. *Bloh A.M.* Algebra and number theory. Uchenye Zapiski Moskov. Gos. Pedagog. Inst., 1971, **375**: 9—20 (in Russian).
4. *Loday J.L.* Enseign. Math, 1993, **39**: 269—293.
5. *Loday J.L., Pirashvili T.* Math. Ann., 1993, **296**: 139—158.
6. *Frabetti A.* J. Pure Appl. Algebra, 1998, **129**: 123—141.
7. *Casas J.M., Pirashvili T.* J. Algebra, 2000, **231**: 258—264.
8. *Kurdachenko L.A., Otal J., Pypka A.A.* Europ. J. Math., 2016, DOI : 10.1007/s40879-016-0093-5.
9. *Stitzinger E.L.* Proc. Amer. Math. Soc., 1971, **28**: 47—49.
10. *Gein A.G., Kuznetsov S.V., Mukhin Yu.N.* Mat. Zapiski Uralsk. Gos. Univ., 1972, **8**, No 3: 18—27 (in Russian).
11. *Towers D.A.* Lin. Algebra Appl., 1980, **32**: 61—73.
12. *Farnsteiner R.* Pacific J. Math., 1984, **111**: 287—299.
13. *Gein A.G.* Commun. Algebra, 1985, **13**: 305—328.

Надійшло до редакції 10.05.2016

Л.А. Курдаченко[1], *И.Я. Субботин*[2], *В.А. Чупордя*[1]
[1] Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара
[2] Национальный университет, Лос-Анджелес, США
E-mail: lkurdachenko@i.ua, isubboti@nu.edu, vchupordia@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ “МИНИМАЛЬНЫХ” АЛГЕБРАХ ЛЕЙБНИЦА

Получено описание алгебр Лейбница, все подалгебры которых являются алгебрами Ли, и алгебр Лейбница, все собственные подалгебры которых абелевы.

Ключевые слова: *алгебра Лейбница, циклическая алгебра, алгебра Ли.*

L.A. Kurdachenko[1], *I.Ya. Subbotin*[2], *V.A. Chupordia*[1]
[1] Oles Honchar Dnipropetrovs'k National University
[2] National University, Los Angeles, USA
E-mail: lkurdachenko@i.ua, isubboti@nu.edu, vchupordia@gmail.com

ON SOME “MINIMAL” LEIBNIZ ALGEBRAS

The description of the Leibniz algebras, whose proper subalgebras are Lie algebras, and the Leibniz algebras, whose proper subalgebras are Abelian, is obtained.

Keywords: *Leibniz algebra, cyclic algebra, Lie algebra.*