http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.10.042
УДК 539.3

А.Ю. Глухов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: ndrewgl@gmail.com

Вісесиметричні хвилі в шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів

(Представлено академіком НАН України О.М. Гузем)

В рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті постановка та метод розв'язку задач про поширення вісесиметричних хвиль в шаруватих композитних нестисливих заздалегідь напружених матеріалах при проковзуванні шарів. Досліджено випадок поширення хвиль вздовж шарів. Отримано дисперсійне рівняння для квазіпоперечних хвиль та його довгохвильові наближення.

Ключевые слова: *шаруватий композитний нестисливий матеріал, початкові напруження, пружні хвилі, дисперсійне рівняння, довгохвильове наближення.*

Дослідженням динамічних процесів у тілах з початковими напруженнями, в тому числі і в шаруватих матеріалах, присвячені численні статті в періодичних виданнях [1—5 та ін.]. Їх результати також викладені в ряді монографій [6—8 та ін.] і в оглядових статтях [9, 10].

Такі дослідження є актуальними, так як в реальних пружних тілах, в тому числі й шаруватих композитних матеріалах, майже завжди існують початкові (залишкові) напруження. Природа їх різноманітна. Вони виникають при технологічних процесах створення композитних матеріалів, в елементах конструкцій в результаті технологічних операцій при їх збиранні, в земній корі внаслідок дії геостатичних і геодинамічних сил і т. д. Інколи початкові напруження створюють цілеспрямовано. Вони, взаємодіючи з динамічними напруженнями, істотно впливають на закономірності поширення пружних хвиль.

Поширення плоских хвиль у шаруватих композитних матеріалах періодичної структури з початковими напруженнями розглядалося в роботах [1—6]. В [1—3, 6] результати отримані для випадку повного контакту шарів. У статтях [4, 5] метод дослідження плоских пружних хвиль у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями, викладений в монографії [6], поширений на випадок неповного контакту шарів.

За відсутності початкових (залишкових) напружень аналогічні задачі досліджувались в [11].

У даній роботі в рамках тривимірної динамічної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями на основі зазначеного вище методу [6] проведені дослідження поширення вісесиметричних пружних хвиль в шаруватому композитному нестисливому матеріалі з початковими напруженнями при проковзуванні шарів.

1. Постановка задач і метод досліджень. Розглядається шаруватий композитний нестисливий матеріал з початковими напруженнями, який складається з шарів двох типів, що чергуються.

При дослідженні будемо застосовувати лагранжеві координати $y_n \equiv y^n$, які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з декартовими координатами, і лагранжеві координати r', θ, y_3, які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з круговими циліндричними координатами.

Декартову систему координат y_1, y_2, y_3, в початковому напружено-деформованому стані вибираємо таким чином, щоб вісь Oy_3 була спрямована по нормалі до площин розділу шарів.

Матеріали шарів вважатимемо гіперпружними ізотропними з довільною структурою пружних потенціалів; у разі трансверсально-ізотропних гіперпружних матеріалів шарів будемо вважати, що вісь ізотропії спрямована уздовж вісі Oy_3.

Вважаємо початковий напружений стан однорідним. Також приймаємо, що для кожного з шарів мають місце наступні співвідношення

$$S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}\,;\ \ \sigma_{11}^{0(j)} = \sigma_{22}^{0(j)} \neq \sigma_{33}^{0(j)}\,;$$

$$\varepsilon_{11}^{0(j)} = \varepsilon_{22}^{0(j)}\,;\ \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}\,;\ h'^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}\,;\ j = 1,2. \tag{1}$$

В (1) і нижче індексами в дужках ($j = 1,2$) позначені всі величини, що відносяться до шарів різних типів. Тут $\sigma_{tt}^{0(j)}$, $S_{tt}^{0(j)}$ то $\varepsilon_{tt}^{0(j)}$ — складові тензора узагальнених напружень, тензора узагальнених напружень Лагранжа і тензора деформацій Гріна відповідно; $h^{(j)}$ і $h'^{(j)}$ — товщини j-го шару в природному і в початковому напружено-деформованому стані відповідно; $\lambda_t^{(j)}$ — коефіцієнти видовження уздовж відповідних весей.

Як і в [6], приймаємо

$$u_{r'}^{(j)} = u_{r'}^{(j)}(r', y_3, \tau)\,;\ u_\theta^{(j)} = 0\,;\ u_3^{(j)} = u_3^{(j)}(r', y_3, \tau)\,;$$

$$u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} = p^{(j)}(r', y_3, \tau)\,. \tag{2}$$

У цьому випадку в представленні загальних розв'язків просторових динамічних лінеаризованих задач теорії пружності стосовно до загального розв'язку вісесиметричної задачі в циліндричних координатах можна прийняти

$$\Psi'^{(j)} \equiv 0\,;\ \chi'^{(j)} = \chi'^{(j)}(r', y_3, \tau)\,. \tag{3}$$

У розглянутому випадку для визначення переміщень $u^{(j)}$ і складових тензора напружень $Q'^{(j)}$ при $y_3 = \text{const}$ отримуємо вирази

$$u_{r'}^{(j)} = -\frac{\partial^2}{\partial r' \partial y_3}\chi'^{(j)}\,;\ u_3^{(j)} = \Delta_1'\chi'^{(j)}\,;\ \Delta_1' = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\,;\ \rho'(j) = \rho(j)\,;$$

$$u_4^{(j)} \equiv p^{(j)}\left[(\kappa_{1111}'^{(j)} - \kappa_{1133}'^{(j)} - k_{1313}'^{(j)})\Delta_1' + \kappa_{3113}'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \rho^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right]\frac{\partial}{\partial y_3}\chi'^{(j)}\,; \tag{4}$$

$$Q_{3r'}'^{(j)} = \left(\kappa_{1313}'^{(j)}\Delta_1' - \kappa_{3113}'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial}{\partial r'}\chi'^{(j)}\,;$$

$$Q_{33}'^{(j)} = \left[(\kappa_{1111}'^{(j)} + \kappa_{3333}'^{(j)} - 2\kappa_{1133}'^{(j)} - \kappa_{1313}'^{(j)})\,\Delta_1' + \kappa_{3113}'^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial y_3} - \rho^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right]\frac{\partial}{\partial y_3}\chi'^{(j)}\,. \tag{5}$$

Для визначення функцій $\chi'^{(j)}$ за умови (3) маємо рівняння

$$\left[\left(\Delta'_1+\xi'^{(j)2}_2\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\left(\Delta'_1+\xi'^{(j)2}_3\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)-\frac{\rho^{(j)}}{\kappa'^{(j)}_{1331}}\left(\Delta'_1+\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\chi'^{(j)}=0. \tag{6}$$

Величини $\xi'^{(j)2}_2$ і $\xi'^{(j)2}_3$ в (6) визначаються так, як і в [6]; $\rho^{(j)}$ — щільність матеріалів кожного з шарів в природному стані.

Таким чином, відповідно до викладеного, дослідження закономірностей поширення вісесиметричних пружних хвиль у шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями зводиться до побудови розв'язків рівняння (6) при задоволенні граничних умов на площинах розділу шарів і умов періодичності Флоке.

Розглянемо поширення вісесиметричної хвилі в радіальному напрямку в шаруватому композитному нестисливому матеріалі з початковими напруженнями. У цьому випадку за аналогією з [6] для визначення «істинної» фазової швидкості поширення вісесиметричних хвиль у шаруватому композитному матеріалі з початковими напруженнями приймемо

$$\chi'^{(j)}(r',y_3,\tau)=\chi'^{(j)(0)}(y_3)H_0^{(1)}(r'k)e^{-i\omega\tau};\ \ C=\omega k^{-1};\ j=1,2. \tag{7}$$

В (7) k і ω — хвильове число і кругова частота; C — "істинна" фазова швидкість вісесиметричних хвиль; $H_0^{(1)}(x)$ — функція Ханкеля нульового порядку першого роду; $\chi'^{(j)(0)}$ — амплітудна функція. Надалі індексом (0) позначені всі амплітудні величини в представленнях типу (7).

Підставляючи (7) в (4), для визначення амплітуд переміщень отримуємо такі вирази:

$$\begin{gathered}u_{r'}^{(j)(0)}=-\frac{d^2}{dy_3}\chi'^{(j)(0)}(y_3);\ u_3^{(j)(0)}=-k^2\chi'^{(j)(0)}(y_3);\\ p^{(j)0}=\left[\kappa'^{(j)}_{3113}\frac{d^2}{dy_3^2}-k^2(k'^{(j)}_{1111}-\kappa'^{(j)}_{1133}-\kappa'^{(j)}_{1313})+\omega^2\rho^{(j)}\right]\frac{d}{dy_3}\chi'^{(j)(0)}(y_3).\end{gathered} \tag{8}$$

Аналогічно, підставляючи (7) в (5), для визначення амплітуд складових тензора напружень $Q'^{(j)}$ при $y_3=\text{const}$ маємо

$$\begin{gathered}Q'^{(j)(0)}_{3r'}(y_3)=-(\kappa'^{(j)}_{3113}\frac{d^2}{dy_3^2}+k^2\kappa'^{(j)}_{1313})\chi'^{(j)(0)}(y_3);\\ Q'^{(j)(0)}_{33}(y_3)=\left[\kappa'^{(j)}_{3113}\frac{d^2}{dy_3^2}-k^2(\kappa'^{(j)}_{1111}+\kappa'^{(j)}_{3333}-2\kappa'^{(j)}_{1133}-\kappa'^{(j)}_{1313})+\omega^2\rho(j)\right]\frac{d}{dy_3}\chi'^{(j)(0)}(y_3).\end{gathered} \tag{9}$$

Підставляючи (7) в (6), отримуємо рівняння для визначення функцій $\chi'^{(j)(0)}(y_3)$

$$\left[\left(\xi'^{(j)2}_2\frac{d^2}{dy_3^2}-k^2\right)\left(\xi'^{(j)2}_3\frac{d^2}{dy_3^2}-k^2\right)+\frac{\omega^2\rho^{(j)}}{\kappa'^{(j)}_{1331}}\left(\frac{d^2}{dy_3^2}-k^2\right)\right]\chi'^{(j)(0)}(y_3)=0. \tag{10}$$

Оскільки в (7)—(10) всі співвідношення представлені через амплітудні величини, то умови на границі контакту шарів і умови періодичності також запишемо для амплітудних величин. За умови проковзування при $y_3=0$ повинні виконуватися умови:

$$u'^{(1)(0)}_3(0)=u'^{(2)(0)}_3(0);\ Q'^{(1)(0)}_{33}(0)=Q'^{(2)(0)}_{33}(0);\ Q'^{(1)(0)}_{3r'}(0)=0;\ Q'^{(2)(0)}_{3r'}(0)=0. \tag{11}$$

Відповідно до теореми Флоке також повинні ще виконуватися умови:

$$\begin{gathered}u'^{(1)(0)}_3(h^{(1)})=u'^{(2)(0)}_3(-h^{(2)});\ Q'^{(1)(0)}_{33}(h^{(1)})=Q'^{(2)(0)}_{33}(-h^{(2)});\\ Q'^{(1)(0)}_{3r'}(h^{(1)})=0;\ Q'^{(2)(0)}_{3r'}(-h^{(2)})=0.\end{gathered} \tag{12}$$

Таким чином, у даному випадку необхідно знайти розв'язок звичайного диференціального рівняння (10), що задовольняє умовам (11) і (12) з урахуванням позначень (8) і (9).

2. Хвилі вздовж нестисливих шарів. Довгохвильове (низькочастотне) наближення. За аналогією з результатами, викладеними в [6], розв'язок рівняння (10) представимо в такій формі:

$$\chi'^{(j)(0)}(y_3) = \sum_{m=1}^{4} B_m^{(j)} e^{ik\alpha_\theta^{(j)}\left[y_3+(-1)^j h'^{(j)}/2\right]};$$

$$\theta = \delta_{1m} + \delta_{2m} + 2(\delta_{3m} + \delta_{4m});\ j = 1,2. \qquad (13)$$

В (13) $\alpha_1^{(j)2}$ та $\alpha_2^{(j)2}$ — корені рівняння, яке отримуємо з (10) після перетворень у вигляді

$$\kappa'^{(j)}_{3113}\alpha^{(j)4} - \left[C^2\rho^{(j)} - \kappa'^{(j)}_{1111} - \kappa'^{(j)}_{3333} + 2(\kappa'^{(j)}_{1133} + \kappa'^{(j)}_{1313})\right]\alpha^{(j)2} - (C^2\rho^{(j)} - \kappa'^{(j)}_{1331}) = 0\,. \qquad (14)$$

Для нестисливого шаруватого композитного матеріалу з початковими напруженнями має сенс (за аналогією з результатами [6]) розглядати квазіпоперечну хвилю, яка поширюється вздовж вісі Or' і поляризована в площині $r'Oy_3$. Для такої хвилі $u_{r'}^{(j)}$ будуть Or' антисиметричні, а $u_3^{(j)}$— симетричні щодо середини відповідних шарів.

Для розглянутого випадку в представленні розв'язку у формі (13) для двох сусідніх шарів приймемо наступні залежності:

$$B_1^{(j)} = B_2^{(j)};\ B_3^{(j)} = B_4^{(j)}. \qquad (15)$$

Враховуючи позначення (8) і (9) і підставляючи (13) і (15) в умови (11) і (12), після ряду перетворень отримуємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь, з умови існування нетривіальних рішень якої слідує дисперсійне рівняння відносно $C_{Sy_3}^2 = \omega k^{-1}$ — швидкості квазіпоперечної хвилі вздовж вісі Or', поляризованої в площині $r'Oy_3$.

Для довгохвильового (низькочастотного) наближення, обмежуючись одночленною апроксимацією, отримаємо

$$C_{Sy_3}^2 = \Big\{h'^{(1)}\kappa'^{(2)}_{3113}\left[\kappa'^{(1)}_{1313}(\kappa'^{(1)}_{1111} + \kappa'^{(1)}_{3333} - \kappa'^{(1)}_{1133}) - 2\kappa'^{(1)}_{1331}\kappa'^{(1)}_{3113}\right] +$$

$$+ h'^{(2)}\kappa'^{(1)}_{3113}\left[\kappa'^{(2)}_{1313}(\kappa'^{(2)}_{1111} + \kappa'^{(2)}_{3333} - \kappa'^{(2)}_{1133}) - 2\kappa'^{(2)}_{1331}\kappa'^{(2)}_{3113}\right]\Big\} \times$$

$$\times\left[h'^{(1)}o^{(1)}\kappa'^{(2)}_{3113}(k'^{(1)}_{1313} - \kappa'^{(1)}_{3113} + h'^{(2)}o^{(2)}\kappa'^{(1)}_{3113}(\kappa'^{(2)}_{1313} - \kappa'^{(2)}_{3113}\right]^{-1}. \qquad (16)$$

Аналіз рівняння (16) свідчить, що при поширенні хвиль відбувається взаємодія між шарами композиту.

Таким чином, в даній роботі досліджено поширення вісесиметричних хвиль у шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. Розглянуто випадок поширення хвиль уздовж шарів. Отримано дисперсійне рівняння для квазіпоперечних хвиль, а також його довгохвильове наближення.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Гузь А.Н., Кхань Л.М.* Распространение волн в композитных слоистых материалах с большими начальными деформациями // Прикл. механика. — 1976. — **12**, № 1. — С. 3—11.
2. *Гузь А.Н., Ситенок Н.А., Жук А.П.* Осесимметричные упругие волны в слоистых сжимаемых композитных материалах с начальными напряжениями // Прикл. механика. — 1984. — **20**, № 7. — С. 20—30.
3. *Кхань Л.М.* Распространение волн вдоль слоев в слоистых сжимаемых материалах с начальными деформациями // Прикл. механика. — 1977. — **13**, № 9. — С. 21—26.
4. *Панасюк О.М.* Про поширення хвиль в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів // Доп. НАН України. — 2010. — № 1. — С. 65—70.

5. *Панасюк О.Н.* Распространение квазипоперечных волн в слоистых материалах с начальными напряжениями с учетом проскальзывания // Прикл. механика. — 2011. — **47**, № 3. — С. 59—66.
6. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. — Киев: А.С.К., 2004. — 672 с.
7. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. — Saarbrücken: Lambert Acad. Publ., 2015. — 468 с.
8. *Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. — Киев: Наук. думка, 1976. — 104 с.
9. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями // Прикл. механика. — 2002. — **38**, № 1. — С. 35—78.
10. *Бабич С.Ю., Гузь А.Н., Жук А.П.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями // Прикл. механика. — 1979. — **15**, № 4. — С. 3—23.
11. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. — Москва: Наука, 1973. — 344 с.

REFERENCES

1. *Guz' A.N., Khanh L.M.* Soviet Appl. Mech., 1976, **12**, Iss. 1: 1-7.
2. *Guz' A.N., Sitenok N.A., Zhuk A.P.* Soviet Appl. Mech., 1984, **20**, Iss. 7: 589-596.
3. *Khanh L.M.* Soviet Appl. Mech., 1977, **13**, Iss. 9: 868—873.
4. *Panasyuk O.M.* Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., 2010, No 1: 65-70 (in Ukrainian).
5. *Panasyuk O.N.* Int. Appl. Mech., 2011, **47**, Iss. 3: 276-283.
6. *Guz' A.N.* Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses, Kiev: A.S.K, 2004 (in Russian).
7. *Guz' A., Babich S., Glukhov Yu.* Mixed problems for elastic foundation with initial stresses, Saarbrücken: Lambert Acad. Publ., 2015 (in Russian).
8. *Guz' A.N., Zhuk A.P., Makhort F.G.* Waves in a Layer with Initial Stresses, Kiev: Nauk. Dumka, 1986 (in Russian).
9. *Guz' A.N.* Int. Appl. Mech., 2002, **38**, Iss. 1: 23-59.
10. *Babich S.Yu., Guz' A.N., Zhuk A.P.* Soviet Appl. Mech., 1979, **15**, No 4: 277-291.
11. *Brekhovskikh L.M.* Waves in layered media, Moscow: Nauka, 1973 (in Russian).

Надійшло до редакції 11.02.2016

А.Ю. Глухов

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: ndrewgl@gmail.com

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ НЕСЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛАХ С НАЧАЛЬНИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИИ СЛОЕВ

В рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальними напряженими рассмотрены постановка и метод решения задач о распространении осесимметричных волн в слоистых композитных несжимаемых предварительно напряженных материалах при проскальзывании слоев. Исследован случай распространения волн вдоль слоев. Получено дисперсионное уравнение для квазипоперечных волн и его длинноволновое приближение.

Ключевые слова: *слоистый композитный несжимаемый материал, начальные напряжения, упругие волны, дисперсионное уравнение, длинноволновое приближение.*

A.Yu. Glukhov

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: ndrewgl@gmail.com

AXISYMMETRIC WAVES IN LAMINATED COMPOSITE INCOMPRESSIBLE MATERIALS WITH INITIAL STRESSES UNDER THE SLIPPING OF LAYERS

The propagation of axisymmetric elastic waves in laminated composite incompressible materials with the slipping of layers is investigated within the framework of a linearized elasticity theory for bodies with initial stresses. The propagation of waves along the layers is considered. The dispersion equation for quasitransversal waves and its long-wave approximation are obtained.

Keywords: *laminated composite incompressible material, initial stresses, elastic waves, dispersion equation, long-wave approximation.*