http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.10.022
УДК 517.5

Р.Р. Салимов, Б.А. Клищук

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: ruslan623@yandex.ru, bogdanklishchuk@mail.ru

Экстремальная задача для площади образа круга

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю.Ю. Трохимчуком)

Рассмотрены кольцевые Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля на комплексной плоскости при p > 2. Для таких классов отображений установлены оценки снизу площади образа круга. Решена экстремальная задача о минимизации функционала площади образа круга.

Ключевые слова: *кольцевые Q-гомеоморфизмы, p-модуль семейства кривых, конденсатор, p-ёмкость конденсатора, функционал площади.*

В настоящей работе исследуются отображения, удовлетворяющие определенным верхним модульным оценкам, теория которых применима к отображениям квазиконформным в среднем (см. [1]), отображениям с конечным искажением длины (см. [2]) и отображениям с конечным искажением (см. [3]). Здесь мы ограничимся только плоским случаем.

Впервые верхняя оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии М.А. Лаврентьева [4]. В монографии [5] (см. предложение 3.7) получено уточнение неравенства Лаврентьева в терминах угловой дилатации. Также ранее в работах [3, 6] были получены верхние оценки искажения площади образа круга для кольцевых и нижних Q-гомеоморфизмов. В данной работе получены нижние оценки площади образа круга при кольцевых Q-гомеоморфизмах относительно p-модуля при $p > 2$.

Напомним некоторые определения. Пусть задано семейство Γ кривых γ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Борелевскую функцию $\rho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ называют *допустимой* для Γ, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(z)|dz| \geqslant 1$$

для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$.

Пусть $p \in (1, \infty)$. Тогда p-*модулем* семейства Γ называется величина

$$\mathcal{M}_p(\Gamma) = \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \rho^p(z)\, dxdy.$$

Для произвольных множеств E, F и G в $\mathbb{C}$, через $\Delta(E, F, G)$ обозначим семейство всех непрерывных кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, которые соединяют E и F в G, т. е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

© Р.Р. Салимов, Б.А. Клищук, 2016

Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$ и $d_0 = \mathrm{dist}\,(z_0, \partial D)$. Положим

$$\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \left\{ z \in \mathbb{C} : r_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant r_2 \right\},$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке $z_0 \in D$, если соотношение

$$\mathcal{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q(z) \eta^p \left(|z - z_0| \right) dxdy$$

выполнено для любого кольца $\mathbb{A} = \mathbb{A}\,(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1\,.$$

Ниже приведен критерий принадлежности классу кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля при $p > 2$ на плоскости.

Предложение 1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая условию $q_{z_0}(r) \neq \infty$ для п.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \mathrm{dist}\,(z_0, \partial D)$. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $z_0 \in D$ тогда и только тогда, когда для любых $0 < r_1 < r_2 < d_0$*

$$\mathcal{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leqslant \frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{1/(p-1)} q_{z_0}^{1/(p-1)}(r)} \right)^{p-1}}$$

где $S_1 = S\,(z_0, r_1)$ и $S_2 = S\,(z_0, r_2)$, $q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{S(z_0, r)} Q(z)|dz|$ — среднее интегральное значение по окружности $S\,(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Следуя работе [7], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором*. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D, если $\mathrm{A} \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to \mathbb{C}$ — непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор в D, то (fA, fC) также конденсатор в fD. Далее $f\mathcal{E} = (f\,A, fC)$.

Пусть $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор. Обозначим через $\mathcal{C}_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем. $\mathcal{W}_0\,(\mathcal{E}) = \mathcal{W}_0\,(A, C)$ — семейство неотрицательных функций таких, что: 1) $u \in \mathcal{C}_0(A)$; 2) $u\,(x) \geqslant 1$ для $x \in C$; 3) u принадлежит классу ACL и пусть

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}\,.$$

При $p \geqslant 1$ величину

$$\mathrm{cap}_p \mathcal{E} = \mathrm{cap}_p\,(A, C) = \inf_{u \in \mathcal{W}_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p \, dxdy$$

называют *p-ёмкостью* конденсатора $\mathcal{E}$.

Известно, что

$$\mathrm{cap}_p\,\mathcal{E} = \mathcal{M}_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C))$$

(см. теорему 1 в [9]).

Установленные в работе нижние оценки для образа круга обобщают известную лемму Геринга для круга $E = B\,(z_0, r)$ (см. ниже).

Лемма G. *Пусть D и D' — ограниченные области в* $\mathbb{C}$ и E — *произвольное измеримое по Борелю множество в D. Предположим, что $f : D \to D'$ — гомеоморфизм, удовлетворяющий условию*

$$\mathrm{cap}_p\, f\mathcal{E} \leqslant K\, \mathrm{cap}_p\, \mathcal{E}$$

при $p > 2$, где $\mathcal{E} = \left(B(z_0, r_2), \overline{B(z_0, r_1)}\right)$, $z_0 \in D$, $0 < r_1 \leqslant r_2 < d_0 = \mathrm{dist}\,(z_0, \partial D)$. *Тогда имеет место оценка*

$$|fE| \geqslant K^{\frac{2}{2-p}} |E|$$

(см. лемму 7 в [10] при $n = 2$).

1. Искажение площади круга. В следующей теореме установлена нижняя оценка площади образа круга для кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля при $p > 2$.

Теорема 1. *Пусть D и D' — ограниченные области в* $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ — *кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $z_0 \in D$ при $p > 2$. Тогда при всех $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \mathrm{dist}\,(z_0, \partial D)$, имеет место оценка*

$$|fB(z_0, r)| \leqslant \pi \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \left(\int\limits_0^r \frac{dt}{t^{1/(p-1)} q_{z_0}^{1/(p-1)}(t)}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}},$$

где $B\,(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| \leqslant r\}$.

Доказательство сформулированной теоремы базируется на предложении 1 и оценке (8.7) из работы [8].

В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть D и D' — ограниченные области в* $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ — *кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $z_0 \in D$ при $p > 2$.* Предположим, что функция Q *удовлетворяет условию*

$$q_{z_0}(t) \leqslant q_0 t^{-\alpha},\ q_0 \in (0, \infty),\ \alpha \in [0, \infty),$$

для $z_0 \in D$ и п. в. всех $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \mathrm{dist}\,(z_0, \partial D)$. Тогда при всех $r \in (0, d_0)$ имеет место оценка

$$|fB(z_0, r)| \geqslant \pi^{-\frac{\alpha}{p-2}} \left(\frac{p-2}{\alpha + p - 2}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} q_0^{\frac{2}{2-p}} \left|B(z_0, r)\right|^{1 + \frac{\alpha}{p-2}}.$$

Полагая $\alpha = 0$ в теореме 2, получаем следующее заключение.

Следствие 1. *Пусть D и D' — ограниченные области в* $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ — *кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке $z_0 \in D$ при $p > 2$ и $q_{z_0}(t) \leqslant q_0 < \infty$ для п. в. $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \mathrm{dist}\,(z_0, \partial D)$. Тогда имеет место оценка*

$$\left|fB(z_0, r)\right| \geqslant q_0^{\frac{2}{2-p}} \left|B(z_0, r)\right|$$

для всех $r \in (0, d_0)$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* $Q(z) \leqslant K < \infty$ *для п. в.* $z \in D$. *Тогда имеет место оценка*

$$\left|fB(z_0,r)\right| \geqslant K^{\frac{2}{2-p}} \left|B(z_0,r)\right|$$

для всех $r \in (0, d_0)$.

Замечание 1. Следствие 2 является частным случаем результата Геринга для $E = B(z_0, r)$ (см. лемму G).

2. Экстремальная задача для функционала площади. Пусть $Q : \mathbb{B} \to [0, \infty]$ — измеримая функция по Лебегу и $\mathcal{H}$ — множество всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ относительно p-модуля в точке $z_0 = 0$ при $p > 2$ с условием

$$q(t) = \frac{1}{2\pi t} \int\limits_{S_t} Q(z)\left|dz\right| \leqslant q_0 t^{-\alpha}, \ q_0 \in (0,\infty), \quad \alpha \in [0,\infty),$$

для п.в. $t \in (0,1)$.

Рассмотрим на классе $\mathcal{H}$ функционал площади $\mathbf{S}_r(f) = \left|fB_r\right|$. Ниже приведена теорема о минимизации функционала $\mathbf{S}_r(f)$.

Теорема 3. *Для всех* $r \in [0,1]$ *справедливо равенство*

$$\min_{f \in \mathcal{H}} \mathbf{S}_r(f) = \pi \left(\frac{p-2}{\alpha + p - 2}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} q_0^{\frac{2}{2-p}} r^{\frac{2(\alpha+p-2)}{p-2}}.$$

Из теоремы 2 немедленно вытекает оценка

$$\mathbf{S}_r(f) \geqslant \pi \left(\frac{p-2}{\alpha + p - 2}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} q_0^{\frac{2}{2-p}} r^{\frac{2(\alpha+p-2)}{p-2}}.$$

Построим гомеоморфизм $f_0 \in \mathcal{H}$, на котором реализуется минимум функционала $\mathbf{S}_r(f)$.

Пусть $f_0 : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$, где

$$f_0(z) = \begin{cases} q_0^{\frac{1}{2-p}} \left(\dfrac{p-2}{\alpha + p - 2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} |z|^{\frac{\alpha+p-2}{p-2}} \dfrac{z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Не трудно заметить, что оценка (1) является точной и знак равенства в ней достигается на отображении f_0.

Покажем, что отображение, определенное таким образом, является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля при $p > 2$ с функцией $Q(z) = q_0 |z|^{-\alpha}$ в точке $z_0 = 0$. Очевидно, что $q_{z_0}(t) = q_0 t^{-\alpha}$. Рассмотрим кольцо $\mathbb{A}(0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < 1$. Заметим, что отображение f_0 преобразует кольцо $\mathbb{A}(0, r_1, r_2)$ в кольцо $\tilde{\mathbb{A}}(0, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$, где

$$\tilde{r}_i = q_0^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{\alpha + p - 2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} r_i^{\frac{\alpha+p-2}{p-2}}, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим через Γ семейство всех кривых, соединяющих окружности $S(0, r_1)$ и $S(0, r_2)$ в кольце $\mathbb{A}(0, r_1, r_2)$. Тогда p-модуль семейства $f_0\Gamma$ вычисляется в явном виде (см., например, соотношение (2) на с. 177 в [10])

$$\mathcal{M}_p\left(f_0\Gamma\right)=2\pi\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1}\left(\tilde{r}_2^{\frac{p-2}{p-1}}-\tilde{r}_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Подставляя в предыдущее равенство значения $\tilde{r}_1$ и $\tilde{r}_2$, определенные выше, получаем, что

$$\mathcal{M}_p(f_0\Gamma)=2\pi\left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1}\left(\tilde{r}_2^{\frac{p-2}{p-1}}-\tilde{r}_1^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p}=2\pi q_0\left(\frac{\alpha+p-2}{p-1}\right)^{p-1}\left(r_2^{\frac{\alpha+p-2}{p-1}}-r_1^{\frac{\alpha+p-2}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Заметим, что последнее соотношение можно переписать в следующем виде:

$$\mathcal{M}_p\left(f_0\Gamma\right)=\frac{2\pi}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{1/(p-1)}q^{1/(p-1)}(t)}\right)^{p-1}},$$

где $q(t)=q_0t^{-\alpha}$.

Следовательно, в силу предложения 1, гомеоморфизм f_0 является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля при $p>2$ с функцией $Q(z)=q_0|z|^{-\alpha}$ в точке $z_0=0$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Golberg A.* Integrally quasiconformal mappings in space // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 2. — С. 53—64.
2. *Salimov R., Sevost'yanov E.* The Poletskii and Väisälä inequalities for the mappings with (p, q)-distortion // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2014. — **59**, Iss. 2. — P. 217—231.
3. *Салимов Р.Р.* Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. — 2014. — **26**, № 6. — С. 143—171.
4. *Лаврентьев М.А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. — 136 с.
5. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V.* Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane. — Zürich: European Mathematical Society, 2013. — x+205 p. — (Tracts in Mathematics, Vol. 19.).
6. *Ломако Т.В., Салимов Р.Р.* К теории экстремальных задач // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 2. — С. 264—269.
7. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1969. — **448**. — P. 1—40.
8. *Maz'ya V.* Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math. – 2003. — **338**. — P. 307—340.
9. *Шлык В.А.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. журн. — 1993. — **34**, № 6. — С. 216—221.
10. *Gehring F.W.* Lipschitz Mappings and the p-capacity of Rings in n-space // Advances in the theory of Riemann surfaces: Proc. of the 1969 Stony Brook conf., Annals of Mathematics Studies, Vol. 66. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1971. — P. 175—193.

REFERENCES

1. *Golberg A.* Zbirnyk prats' In-tu matematyky NAN Ukraine, 2010, **7**, No 2: 53-64.
2. *Salimov R., Sevost'yanov E.* Complex Variables and Elliptic Equations, 2014, **59**, Iss. 2: 217-231.
3. *Salimov R.R.* Algebra i Analiz, 2014, **26**, No 6: 143—171 (in Russian).
4. *Lavrent'ev M.A.* The variational method in boundary-value problems for systems of equations of elliptic type, Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1962 (in Russian).
5. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V.* Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane, Tracts in Mathematics, Vol. 19, Zürich: European Mathematical Society, 2013.
6. *Lomako T.V., Salimov R.R.* Zbirnyk prats' In-tu matematyky NAN Ukraine, 2010, **7**, No 2: 264-269 (in Russian).

7. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., 1969, **448**: 1-40.
8. *Maz'ya V.* Contemp. Math., 2003, **338**: 307-340.
9. *Shlyk V.A.* Sib. mat. zhurn., 1993, **34**, No 6: 216-221 (in Russian).
10. *Gehring F.W.* Advances in the theory of Riemann surfaces: Proc. of the 1969 Stony Brook conf., Annals of Mathematics Studies, Vol. 66: Princeton: Princeton Univ. Press, 1971: 175-193.

Поступило в редакцию 14.04.2016

Р.Р. Салімов, Б.А. Кліщук

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: ruslan623@yandex.ru, bogdanklishchuk@mail.ru

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛОЩІ ОБРАЗУ КРУГА

Розглянуто кільцеві Q-гомеоморфізми відносно p-модуля на комплексній площині при p > 2. Для таких класів відображень встановлено оцінки знизу площі образу круга. Розв'язано екстремальну задачу про мінімізацію функціонала площі образу круга.

Ключові слова: *кільцеві Q-гомеоморфізми, p-модуль сім'ї кривих, конденсатор, p-ємність конденсатора, функціонал площі.*

R.R. Salimov, B.A. Klishchuk

Institute of the Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: ruslan623@yandex.ru, bogdanklishchuk@mail.ru

THE EXTREMAL PROBLEM
FOR THE AREA OF AN IMAGE OF A DISC

We study the ring Q-homeomorphisms with respect to p-modulus, p > 2, in the complex plane and establish lower bounds for the area of an image of a disc. The extremal problem concerning a minimization of the area functional is solved.

Keywords: *ring Q-homeomorphisms, p-modulus of a family of curves, capacitor, p-capacitance of a capacitor, area functional.*