http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.10.010

УДК 517.988

О.Ф. Кашпур [1], В.В. Хлобистов [2]

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
[2] Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: olena.kashpur@gmail.com, olga.mail@bk.ru

До деяких питань поліноміальної інтерполяції в евклідових просторах

(Представлено академіком НАН України В.Л. Макаровим)

Одержано умови інваріантної розв'язуваності та єдиності розв'язку задачі інтерполяції функції багатьох змінних в умовах недовизначеності.

Ключові слова: *гільбертовий простір, евклідовий простір, оператор, інтерполяційний поліном, інваріантна розв'язуваність.*

Наближення функцій багатьох змінних є особливо важливим для розв'язання низки прикладних задач. Задача, що розглядається в цій статті, є частинним випадком наближення (інтерполяції) нелінійних операторів в абстрактних гільбертових просторах [1—3], але має свої суттєві особливості. В роботах [1—3] побудовано загальну теорію інтерполяції операторів у гільбертовому просторі: конструктивно подана вся множина інтерполяційних поліномів n-го степеня; розглянуто питання єдиності, збіжності інтерполяційних процесів та оцінки точності.

На практиці поширені задачі поліноміальної інтерполяції функцій багатьох змінних в умовах недовизначеності, тобто коли при розв'язанні задачі число інтерполяційних умов є меншим, ніж розмірність простору поліномів, на якому шукається розв'язок задачі в евклідовому просторі [4]. У даній роботі для задачі інтерполяції функції багатьох змінних, що розв'язується в умовах недовизначеності, одержано більш сильний результат в порівнянні з [5] за кількістю інтерполяційних вузлів. Показано, що для поставленої задачі число вузлів інтерполяції можна обрати меншим, ніж розмірність простору поліномів, на якому шукається розв'язок, при цьому задача інваріантно розв'язна та має єдиний розв'язок мінімальної норми. Задачу інтерполяції назвемо інваріантно розв'язною, якщо вона має розв'язок для довільних значень функції (оператора) у вузлах.

Постановка та розв'язання інтерполяційної задачі в гільбертовому просторі. Нехай X, Y — гільбертові простори, μ — гауссова міра на X, перший момент якої дорівнює нулю, $B(u, v)$ — кореляційний функціонал, B — кореляційний оператор цієї міри відповідно. Тоді [6, 7]

$$B(u,v) = \int_X (x,u)(x,v)\mu(dx) = (Bu, v),\ u, v, x \in X, \tag{1}$$

$(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в X. Нехай Π_n – множина операторних поліномів $P_n : X \to Y$ степеня n:

$$\Pi_n = \{P_n(x) : P_n(x) = L_0 + L_1x + \cdots + L_nx^n\},$$

де $L_0 \in Y$, $L_k(x_1, x_2, ..., x_k)$ – k-лінійна неперервна симетрична операторна форма, $L_k x^k = L_k \underbrace{(x, x, ..., x)}_{k}$. В [2] на просторі Π_n введено скалярний добуток

$$(P_n^{(1)}, P_n^{(2)}) = \sum_{k=0}^{n} \int_X \cdots \int_X (L_k^{(1)}(v_1, v_2, ..., v_k),\ L_k^{(2)}(v_1, v_2, ..., v_k))\, \mu(dv_1)\mu(dv_2)...\mu(dv_k)$$

та норму $\|P_n\| = (P_n, P_n)^{1/2}$, де $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток у просторі Y, $L_k^{(1)}, L_k^{(2)}, L_k$ — k-лінійні неперервні симетричні операторні форми поліномів $P_n^{(1)}, P_n^{(2)}, P_n \in \Pi_n$ відповідно.

Нехай задано: систему елементів $\{x_i\}_{i=1}^m \in X$, оператор $F: X \to Y$ своїми значеннями $F(Bx_i)$, $i = \overline{1,m}$. Для оператора $F(x)$ необхідно побудувати єдиний операторний поліном $P_n \in \Pi_n$, що задовольняє інтерполяційні умови

$$P_n(Bx_i) = F(Bx_i),\ i = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Інтерполяційний поліном P_n називають інтерполянтом мінімальної норми, якщо він є розв'язком екстремальної задачі

$$\|P_n\| = \min \|Q_n\|,\ Q_n \in \Pi_n^I,$$

де Π_n^I — множина поліномів степеня n з інтерполяційними умовами (2).

Позначимо:

$$\Gamma = \left\| \sum_{k=0}^{n} (Bx_i, x_j)^k \right\|_{i,j=1}^{m},$$

$0^0 = 1$, Γ^+ — псевдообернена матриця Мура—Пенроуза до матриці Γ, E — одинична матриця, $\vec{F} = \{F(Bx_i)\}_{i=1}^m$.

В [1—3] доведено, що задача операторної інтерполяції з умовами (2) розв'язна при виконанні необхідної та достатньої умови

$$(E - \Gamma\Gamma^+)\vec{F} = \vec{0}, \tag{3}$$

а її розв'язок має вигляд

$$P_n(x) = \left\langle \vec{F}, \Gamma^+ \sum_{k=0}^{n} \{(x, x_i)^k\}_{i=1}^m \right\rangle, \tag{4}$$

де

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i,\ \ \vec{a} = \{\alpha_i\}_{i=1}^m,\ \ \vec{b} = \{\beta_i\}_{i=1}^m,\ \alpha_i \in Y,\ \beta_i \in R_1,$$

при цьому $P_n(x)$ є інтерполянтом мінімальної норми на множині поліномів Π_n^I.

В [5] показано, що в гільбертовому просторі задача інтерполяції інваріантно розв'язна, тобто інтерполянт існує при будь-якому $\vec{F}$, якщо вузли інтерполяції Bx_i, $i = \overline{1,m}$, різні та виконується умова $m \leqslant n + 1$. Очевидно, що в цьому випадку на підставі (3) $\Gamma^+ = \Gamma^{-1}$.

Розв'язання інтерполяційної задачі в скінченновимірному евклідовому просторі E_k. Застосуємо наведені вище результати для цього простору. Не зменшуючи загальності міркувань, розглянемо спочатку евклідовий простір E_2 з гауссовою мірою μ. Нехай функція $f: E_2 \to R_1$ задана своїми значеннями в точках $\gamma_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1,m}$, $m \leqslant p$, де p – розмірність простору поліномів степеня n в E_2, $p = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $\gamma = (x, y)$, $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$. Тоді (1) запишемо таким чином:

$$B(u, v) = \int_{E_2} (\gamma, u)(\gamma, v)\mu(d\gamma) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_1 x + u_2 y)(v_1 x + v_2 y) g(x) g(y)\, dx dy = (u_1 v_1 + u_2 v_2) = (u, v) = (Iu, v).$$

Отже, у випадку $X = E_2$ за оператор B можна обрати одиничний оператор (матрицю) I, за вузли інтерполяції — вектори $\gamma_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1,m}$. Тоді матриця Γ набуває вигляду

$$\Gamma = \left\| \sum_{k=0}^{n} (\gamma_i, \gamma_j)^k \right\|_{i,j=1}^{m} = \left\| \sum_{k=0}^{n} (x_i x_j + y_i y_j)^k \right\|_{i,j=1}^{m} = AA',$$

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & \sqrt{2}x_1 y_1 & y_1^2 & \cdots & x_1^n & \sqrt{n}x_1^{n-1}y_1 & \cdots & \sqrt{n}x_1 y_1^{n-1} & y_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_m & y_m & x_m^2 & \sqrt{2}x_m y_m & y_m^2 & \cdots & x_m^n & \sqrt{n}x_m^{n-1}y_m & \cdots & \sqrt{n}x_m y_m^{n-1} & y_m^n \end{matrix} \right\|,$$

тобто

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (s_1, s_1) & \cdots & (s_1, s_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (s_m, s_1) & \cdots & (s_m, s_m) \end{pmatrix}, \ m \leqslant p, \tag{5}$$

є матрицею Грама, де

$$s_i = (1,\ x_i,\ y_i,\ x_i^2,\ \sqrt{2}x_i y_i,\ y_i^2,\ \ldots,\ x_i^n,\ \sqrt{n}x_i^{n-1}y_i,\ \ldots,\ \sqrt{n}x_i\, y_i^{n-1},\ y_i^n),\ i = \overline{1,m}. \tag{6}$$

Матрицю Γ у вигляді матриці Грама розглянуто для нескінченновимірного гільбертового простору в роботі [1]. Матриця Γ буде невиродженою, якщо вектори s_i, $i = \overline{1,m}$, $m \leqslant p$, лінійно незалежні. Тоді для інтерполянта мінімальної норми одержимо таку формулу:

$$P_n(x,y) = \left\langle \overline{f}, \Gamma^{-1} \sum_{k=0}^{n} \{(x_i x + y_i y)^k\}_{i=1}^{m} \right\rangle,\ \overline{f} = \{f(\gamma_i)\}_{i=1}^{m}. \tag{7}$$

Очевидно, що якщо вузли інтерполяції $\gamma_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1,m}$, $m \leqslant p$, обрати таким чином, щоб система векторів із (6) була лінійно незалежною, то задача інтерполяції функції двох змінних з умовами

$$P_n(\gamma_i) = f(\gamma_i),\ i = \overline{1,m}, \tag{8}$$

буде інваріантно розв'язною і мати єдиний розв'язок мінімальної норми у випадку, коли $m \leqslant p$, де p – розмірність простору поліномів в E_2 степеня n. Як показано в [8], якщо за вузли інтерполяції обрати систему точок

$$\begin{aligned} &(x_0, y_0), (x_1, y_0), \ldots, (x_{n-1}, y_0), (x_n, y_0), \\ &(x_0, y_1), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(x_0, y_{n-1}), (x_1, y_{n-1}), \\ &(x_0, y_n), \\ &x_i \neq x_j,\ y_i \neq y_j, \text{ якщо } i \neq j, \end{aligned} \tag{9}$$

то не існує кривої n-го степеня, що проходить через ці точки. Це, в свою чергу, означає, що система векторів (6) для вузлів (9) лінійно незалежна, а отже, матриця Грама в (5) невироджена.

Одержані результати можна перенести на функції багатьох змінних f: $E_k \to R_1$, де E_k — k-вимірний евклідовий простір. Нехай розв'язок інтерполяційної задачі шукаємо на просторі Π_{kn} поліномів k змінних n-го степеня розмірності $p = \dfrac{(n+k)!}{n!k!}$. Тоді, як зазначено в [9], завжди можна знайти систему вузлів $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) \in E_k$, $i = \overline{1,p}$, при яких задача інтерполяції функції багатьох змінних буде мати єдиний розв'язок, а система векторів s_i, матриця Γ та інтерполянт мінімальної норми (7) у випадку $m \leqslant p$ запишуться у вигляді

$$s_i = \left\{ \left(\frac{j!}{j_1!\, j_2! \ldots j_k!} \right)^{1/2} x_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} \ldots x_{i_k}^{j_k}, j_1 + j_2 + \ldots + j_k = j, 0! = 1 \right\}_{j=0}^{n}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{10}$$

$$\Gamma = \left\| \sum_{l=0}^{n} (\gamma_i, \gamma_j)^l \right\|_{i,j=1}^{m} = \left\| \sum_{l=0}^{n} (x_{i_1} x_{j_1} + \ldots + x_{i_k} x_{j_k})^l \right\|_{i,j=1}^{m} = AA',$$

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & x_{1_1} & \cdots & x_{1_k} & x_{1_1}^2 & \cdots & x_{1_k}^2 & \sqrt{2} x_{1_1} x_{1_2} & \cdots & \sqrt{2} x_{1_1} x_{1_k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{m_1} & \cdots & x_{m_k} & x_{m_1}^2 & \cdots & x_{m_k}^2 & \sqrt{2} x_{m_1} x_{m_2} & \cdots & \sqrt{2} x_{m_1} x_{m_k} & \cdots \end{matrix} \right\|,$$

$$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \left\langle \vec{f}, \Gamma^{-1} \sum_{l=0}^{n} \{ (x_1 x_{i_1} + x_2 x_{i_2} + \ldots + x_k x_{i_k})^l \}_{i=1}^{m} \right\rangle.$$

На підставі вищенаведених міркувань можна сформулювати такий результат.

Теорема 1. *Нехай функція $f : E_k \to R_1$ задана своїми значеннями $f(\gamma_i)$, $i = \overline{1, m}$. Якщо вузли інтерполяції γ_i обрати таким чином, щоб відповідна система векторів з (10) була лінійно незалежною, то задача інтерполяції функції багатьох змінних на просторі Π_{kn} з умовами (8), $P_n \in \Pi_{kn}$ буде інваріантно розв'язною і мати єдиний розв'язок мінімальної норми у випадку, коли $m \leqslant p$, де p — розмірність простору Π_{kn}.*

Приклад. Розглянемо побудову інтерполяційного полінома мінімальної норми $P_2(x, y)$ другого степеня на підставі формули (7). Вузли інтерполювання оберемо із множини точок (9) таким чином:

$\gamma_1 = (0, 0)$, $\gamma_2 = (1, 0)$, $\gamma_3 = (2, 0)$,

$\gamma_4 = (0, 2)$, $\gamma_5 = (1, 2)$, $\gamma_6 = (0, 3)$.

Вектори s_i запишуться за формулою (6) ($n = 2$) у вигляді

$s_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $s_2 = (1, 1, 0, 1, 0, 0)$, $s_3 = (1, 2, 0, 4, 0, 0)$,

$s_4 = (1, 0, 2, 0, 0, 4)$, $s_5 = (1, 1, 2, 1, 2\sqrt{2}, 4)$, $s_6 = (1, 0, 3, 0, 0, 9)$.

Оскільки не існує кривої другого порядку, що проходить через точки $\gamma_i = (x_i, y_i)$, $i = \overline{1, 6}$ [8], то вектори s_i, $i = \overline{1, 6}$, лінійно незалежні і матриця Грама (5) буде невиродженою. Приходимо до висновку, що для побудови інтерполянта (7) можна обрати будь-яку підсистему векторів із (6), тобто інтерполяційна задача буде інваріантно розв'язною і мати єдиний розв'язок (у сенсі мінімальної норми) у випадку, коли $m \leqslant 6$ ($p = 6$).

Оберемо $m = 3$, підсистему векторів із (6) s_1, s_3, s_4. Для зручності перепозначимо їх як $\overline{s}_1, \overline{s}_2, \overline{s}_3$. Тоді матриця Грама (5) буде невиродженою, а інтерполяційний поліном (7) ($n = 2$, $m = 3$), що відповідає умовам (8), буде мати вигляд

$$P_2(\gamma) = P_2(x, y) = \left\langle \vec{f}, \Gamma^{-1} \sum_{k=0}^{n} \{ (x_i x + y_i y)^k \}_{i=1}^{3} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} f(\gamma_i), l_i(\gamma),$$

де $l_i(\gamma) = l_i(x, y)$ — фундаментальні поліноми Лагранжа, $l_i(\gamma_j) = \delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 1, 2, 3$, $l_1(x, y) = 1 - 0,1\,(x + y + 2x^2 + 2y^2)$, $l_2(x, y) = 0,1\,(x + 2x^2)$, $l_3(x, y) = 0,1\,(y + 2y^2)$.

Таким чином, приходимо до висновку, що при виконанні умов теореми 1 існує єдиний розв'язок задачі інтерполювання функції двох (а отже і багатьох) змінних в умовах недовизначеності. Крім того, в умовах теореми 1 отримано більш сильний результат у порівнянні з [5] стосовно кількості вузлів для існування матриці, оберненої до матриці Г.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Макаров В.Л., Хлобыстов В.В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. — Киев, 1998. — 278 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. Сер. Мат. аналіз; Т. 24).
2. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. — Киев: Наук. думка, 2000. — 406 с.
3. *Makarov V.L., Khlobystov V.V., Yanovich L.A.* Methods of operator interpolation. — Kyiv, 2010. — 516 с. — (Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування; Т. 83).
4. *Kashpur O.F., Khlobystov V.V.* Invariance and uniqueness of solutions to polynomial interpolation problems in Euclidean space // J. Comput. Appl. Math. — 2015. — № 2. — P. 8—14.
5. *Chapko R., Babenko C., Khlobystov V., Makarov V.* On the interpolation of a function on a bounded domain by its traces on parametric hypersurfaces // Int. J. Comput. Math. — 2014. — **91**, Iss. 8. — P. 1673—1682.
6. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т. 1. — Москва: Наука, 1971. — 664 с.
7. *Егоров А.Д., Соболевский П.И., Янович Л.А.* Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. — Минск: Наука и техника, 1985. — 310 с.
8. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вичислений: В 2 т. — Москва: Физматгиз, 1962. — Т. 1. — 632 с.
9. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. — Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002. — 848 с.

REFERENCES

1. *Makarov V.L., Khlobystov V.V.* Foundations of polynomial operator interpolation theory, Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 1998 (in Russian).
2. *Makarov V.L., Khlobystov V.V., Yanovich L.A.* Interpolation of operators, Kiev: Nauk. Dumka, 2000 (in Russian).
3. *Makarov V.L., Khlobystov V.V., Yanovich L.A.* Methods of operator interpolation, Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2010.
4. *Kashpur O.F., Khlobystov V.V.* J. Comput. Appl. Math., 2015, No 2: 8-14.
5. *Chapko R., Babenko C., Khlobystov V., Makarov V.* Int. J. Comput. Math., 2014, **91**, Iss. 8: 1673-1682.
6. *Gikhman I.I., Skorokhod A.V.* Theory of stochastic processes, Moscow: Nauka, 1971 (in Russian).
7. *Yegorov A.D., Sobolevsky P.I., Yanovich L.A.* Approximate methods for computation of continual integrals, Minsk: Nauka i Tehnika, 1985 (in Russian).
8. *Berezin I.S., Zhidkov N.P.* Methods of computations, Vol. 1, Moscow: Fizmatgiz, 1962 (in Russian).
9. *Babenko K.I.* Foundations of numerical analysis, Moscow; Izhevsk: RC “Regular and chaotic dynamics”, 2002 (in Russian).

Надійшло до редакції 19.04.2016

Е.Ф. Кашпур[1], *В.В. Хлобыстов*[2]

[1] Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
[2] Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: olena.kashpur@gmail.com, olga.mail@bk.ru

К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ
ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Получены условия инвариантной разрешимости и единственности решения задачи интерполяции функции многих переменных в условиях недоопределенности.

Ключевые слова: *гильбертово пространство, евклидово пространство, оператор, интерполяционный полином, инвариантная разрешимость.*

O.F. Kashpur[1], *V.V. Khlobystov*[2]

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv
[2] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: olena.kashpur@gmail.com, olga.mail@bk.ru

TO SOME QUESTIONS OF A POLYNOMIAL
INTERPOLATION IN EUCLIDEAN SPACES

The conditions of invariant solvability and uniqueness of a solution of the interpolation problem for a many-variable function under the uncertainty are obtained.

Keywords**:** *Hilbert space, Euclidean space, operator, interpolation polynomial, invariance of a solution.*