



<http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.007>

УДК 517.5

А. С. Ефимушкин

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск

E-mail: a.yefimushkin@gmail.com

О многозначных решениях задачи Римана–Гильберта в многосвязных областях

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Для уравнений Бельтрами в областях, ограниченных конечным числом гладких жордановых кривых, доказано существование многозначных решений задачи Римана–Гильберта с коэффициентами счетно-ограниченной вариации и граничными данными, измеримыми относительно логарифмической емкости. Показано, что пространства решений имеют бесконечную размерность.

Ключевые слова: уравнения Бельтрами, задача Римана–Гильберта, аналитические функции, многозначные решения, логарифмическая емкость.

Пусть D — область в комплексной плоскости \mathbb{C} и пусть $\mu: D \rightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в. Уравнением Бельтрами в D с коэффициентом μ называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \quad (1)$$

где $f_{\bar{z}} = \bar{\partial}f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные функции $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ по x и y соответственно. Уравнение (1) называется невырожденным, если $\|\mu\|_\infty < 1$.

Крайевые задачи для аналитических функций f восходят к знаменитой диссертации Римана (1851), известным работам Гильберта (1904, 1912, 1924) и Пуанкаре (1910). С историей вопроса можно ознакомиться в [1], а также [2], где рассматривался случай обобщенных аналитических функций.

Напомним только, что в 1904 г. Гильберт поставил следующую проблему, которую теперь принято называть проблемой Гильберта или *проблемой Римана–Гильберта*. Она со-

стояла в доказательстве существования и нахождении аналитической функции f в области $D \subset \mathbb{C}$, ограниченной спрямляемой жордановой кривой K , с граничным условием

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z) = \varphi(\zeta) \quad \forall \zeta \in K, \quad (2)$$

где им предполагалось, что функции λ и φ непрерывно дифференцируемы относительно натурального параметра длины на кривой K и что $|\lambda| \neq 0$ на K . Поэтому без ограничения общности можно считать, что $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$.

В данной работе рассматриваются многозначные решения задачи Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами (1) в духе теории многозначных аналитических функций. В связи с этим напомним, что отображение $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ *дискретно*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{C}$ состоит из изолированных точек, и *открыто*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым в \mathbb{C} .

В дальнейшем говорим, что непрерывное, дискретное и открытое отображение $f: B(z_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{C}$, где круг $B(z_0, \varepsilon_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon_0\}$ лежит в области D , является *локальным регулярным решением уравнения Бельтрами* (1), если $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}$ и удовлетворяет (1) в $B(z_0, \varepsilon_0)$ п. в. Локальные регулярные решения $f_0: B(z_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{C}$ и $f_*: B(z_*, \varepsilon_*) \rightarrow \mathbb{C}$ уравнения (1) называются продолжениями друг друга, если существует конечная цепь таких локальных решений $f_i: B(z_i, \varepsilon_i) \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, m$, что $f_1 = f_0$, $f_m = f_*$ и $f_i(z) \equiv f_{i+1}(z)$ для $z \in E_i := B(z_i, \varepsilon_i) \cap B(z_{i+1}, \varepsilon_{i+1}) \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, m - 1$. Совокупность локальных регулярных решений $f_j: B(z_j, \varepsilon_j) \rightarrow \mathbb{C}$, $j \in J$, будем называть *многозначным решением уравнения Бельтрами* (1) в D , если круги $B(z_j, \varepsilon_j)$ покрывают всю область D и f_j являются продолжениями друг друга через данную совокупность локальных решений, которая является максимальной по включению.

2. Определения и предварительные замечания.

Пусть D — область в \mathbb{C} , ограниченная конечным числом жордановых кривых. Функцию $\lambda: \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ называем *функцией ограниченной вариации* на открытой дуге $\gamma \subset \partial D$, пишем $\lambda \in \mathcal{BV}(\gamma)$, если

$$V_\lambda(\gamma) := \sup \sum_{j=0}^{k-1} |\lambda(\zeta_{j+1}) - \lambda(\zeta_j)| < \infty, \quad (3)$$

где супремум берется по всем конечным наборам точек $\zeta_j \in \gamma$, $j = 0, 1, \dots, k$, таким, что ζ_j лежит между ζ_{j+1} и ζ_{j-1} для каждого $j = 1, \dots, k - 1$.

Далее, функцию λ называем *функцией счетно-ограниченной вариации*, пишем $\lambda \in \mathcal{CBV}(\partial D)$, если найдется счетное число попарно непересекающихся открытых дуг $\gamma_n \subset \partial D$, на каждой из которых она является функцией ограниченной вариации, а множество $\partial D \setminus \bigcup \gamma_n$ счетно.

Следующая лемма является обобщением известной теоремы Каратеодори (см., например, теорему 9.4 в [4] и теорему II. С.1 в [5]). Доказательство можно найти в [6].

Лемма 1. Пусть D — ограниченная область в \mathbb{C} , компонентами границы которой являются жордановы кривые, \mathbb{D}_* — ограниченная, невырожденная круговая область в \mathbb{C} , пусть $\omega: D \rightarrow \mathbb{D}_*$ — конформное отображение. Тогда отображение ω может быть продолжено до отображения \overline{D} на $\overline{\mathbb{D}_*}$.

Напомним (см. [7]), что область D в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ называется *круговой*, если ее граница состоит из конечного числа взаимно непересекающихся окружностей и точек. Если граница этой области состоит только из окружностей, то называем эту область *невырожденной*.

Наконец, определение и основные свойства логарифмической емкости можно найти в [3] (см. также [1]).

3. Основные результаты. Следующая теорема дает решение задачи Римана–Гильберта в случае областей, ограниченных конечным числом гладких жордановых кривых. Напомним, что гладкие (и липшицевы) жордановы кривые являются квазиконформными, т. е. являются образами окружностей при квазиконформных отображениях \mathbb{C} на себя (см., например, пункт II.8.10 в [9]).

Теорема 1. Пусть D — область в \mathbb{C} , ограниченная конечным числом гладких жордановых кривых, $\mu: D \rightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция с $\|\mu\|_\infty < 1$, пусть $\lambda: \partial D \rightarrow \mathbb{C}$, $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$ — функция класса $CBV(\partial D)$ и $\varphi: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, измеримая относительно логарифмической емкости. Тогда существует многозначное решение уравнения Бельтрами (1), которое удовлетворяет граничному условию (2) п. в. относительно логарифмической емкости вдоль любых некасательных путей.

Действительно, продолжая μ нулем всюду вне D , получаем существование квазиконформного отображения $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(\infty) = \infty$, удовлетворяющего уравнению Бельтрами (1) с таким образом продолженным μ (см., например, теорему V. В.3 в [8]). Рассмотрим $D^* = f(D)$. Область D^* допускает конформное отображение g на круговую область \mathbb{D}_* (см., например, теорему V.6.2 в [7]). Заметим, что область \mathbb{D}_* является невырожденной, поскольку изолированные особые точки конформного отображения являются устранимыми по теореме Вейерштрасса (см., например, теорему 1.2 в [4]).

Ясно, что $h := g \circ f$ — квазиконформный гомеоморфизм, удовлетворяющий тому же самому уравнению Бельтрами (1). Заметим, что h допускает продолжение до гомеоморфизма \bar{D} на $\bar{\mathbb{D}}_*$, поскольку g допускает продолжение до гомеоморфизма \bar{D}^* на $\bar{\mathbb{D}}_*$ по лемме 1. Далее, по принципу отражения для квазиконформных отображений, привлекая конформные отражения (инверсии) относительно граничных окружностей в образе и квазиконформные отражения относительно квазиконформных кривых в прообразе, мы можем продолжить h до квазиконформного отображения H некоторой окрестности U замыкания исходной области D на некоторую окрестность V замыкания круговой области \mathbb{D}_* (см., например, I.8.4, II.8.2 и II.8.3 в [9]).

Отметим, что при этом $\Lambda := \lambda \circ H^{-1}|_{\partial \mathbb{D}_*}$ принадлежит классу $CBV(\partial \mathbb{D}_*)$. Кроме того, функция $\Phi = \varphi \circ H^{-1}|_{\partial \mathbb{D}_*}$ является измеримой относительно логарифмической емкости.

Действительно, логарифмическая емкость множества совпадает с его трансфинитным диаметром (см., например, пункт 110 в [10]). Поэтому при отображениях H и H^{-1} множества логарифмической емкости нуль на ∂D переходят в множества логарифмической емкости нуль на $\partial \mathbb{D}_*$ и наоборот, поскольку квазиконформные отображения являются непрерывными по Гельдеру на компактах (см., например, теорему II.4.3 [9]).

Таким образом, при отображениях H и H^{-1} любые множества, измеримые относительно логарифмической емкости, переходят в множества, измеримые относительно логарифмической емкости, поскольку любое такое множество представимо в виде объединения сигма-компакта и множества логарифмической емкости нуль, а компакты при непрерывных отображениях переходят в компакты и являются измеримыми относительно логарифмической емкости.

Заметим также, что при квазиконформных отображениях H и H^{-1} искажение углов ограничено (см., например, [11]) и, следовательно, некасательные пути к ∂D переходят в некасательные пути к $\partial \mathbb{D}_*$ и наоборот.

Поэтому исходная задача Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами (1) сводится к задаче Римана–Гильберта для аналитических функций F в круговых областях:

$$\lim_{w \rightarrow \eta} \operatorname{Re}\{\overline{\Lambda(\eta)} \cdot F(w)\} = \Phi(\eta) \quad (4)$$

для п. в. $\eta \in \partial\mathbb{D}_*$ относительно логарифмической емкости, а по теореме 1 в [12] существует многозначная аналитическая функция $F: \mathbb{D}_* \rightarrow \mathbb{C}$, для которой это условие выполняется для п. в. $\eta \in \partial\mathbb{D}_*$ относительно логарифмической емкости вдоль любых некасательных путей и, таким образом, искомое регулярное решение исходной задачи Римана–Гильберта (2) для уравнения Бельтрами (1) существует и представимо в виде $f = F \circ H$.

Замечание 1. Как это следует из приведенной схемы доказательства, в теореме 1 условие гладкости граничных жордановых кривых можно заменить на более слабое условие квазиконформности и спрямляемости, однако тогда граничное условие (2) для найденного решения будет выполняться п. в. только относительно натурального параметра длины на граничных кривых, т. е. при этом ослабляется как условие, так и заключение теоремы.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 и замечания 1 пространства решений имеют бесконечную размерность.*

Последний результат является прямым следствием теоремы 3 в [12], а также конструкций решений в доказательстве теоремы 1.

Цитированная литература

1. *Ефимушкин А. С., Рязанов В. И.* О задаче Римана–Гильберта для уравнений Бельтрами в квазидисках // Укр. мат. вестник. – 2015. – **12**, № 2. – С. 190–209.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – Москва: Физматгиз, 1959. – 628 с.
3. *Носиро К.* Предельные множества. – Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. – 254 с.
4. *Коллингвуд Э., Ловатер Л.* Теория предельных множеств. – Москва: Мир, 1971. – 312 с.
5. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p . – Москва: Мир, 1984. – 368 с.
6. *Ryazanov V. I.* On multivalent solutions of Riemann–Hilbert problem // arXiv: 1506.08735v1 [math. CV] 29 Jun. 2015. – 7 p.
7. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 630 с.
8. *Альфорт Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – Москва: Мир, 1969. – 134 с.
9. *Lehto O., Virtanen K. J.* Quasiconformal mappings in the plane. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1973. – 260 p.
10. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. – Москва: ОГИЗ, 1941. – 382 с.
11. *Agard S. B., Gehring F. W.* Angles and quasiconformal mappings // Proc. London Math. Soc. (3). – 1965. – **14A**. – P. 1–21.
12. *Ефимушкин А. С., Рязанов В. И.* О задаче Римана–Гильберта для аналитических функций в круговых областях // Доп. НАН України. – 2016. – № 2. – С. 13–16.

References

1. *Efimushkin A. S., Ryazanov V. I.* Ukr. mat. vestnik, 2015, **12**, No 2: 190–209 (in Russian).
2. *Vekua I. N.* Obobshchennyye analiticheskie funktsii, Moscow: Fizmatgiz, 1959 (in Russian).
3. *Nosiro K.* Predelnyye mnozhestva, Moscow: Izd-vo Inostr. lit., 1963 (in Russian).
4. *Collingwood E. F., Lohwater A. J.* The theory of cluster sets, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, No 56: Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1966.
5. *Kusis P.* Vvedenie v teoriyu prostranstv H^p , Moscow: Mir, 1984 (in Russian).

6. *Ryazanov V. I.* On multivalent solutions of Riemann–Hilbert problem, arXiv:1506.08735v1 [math. CV] 29 Jun. 2015.
7. *Goluzin G. M.* Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo, Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
8. *Alfors L.* Lektsii po kvazikonformnyim otobrazheniyam, Moscow: Mir, 1969 (in Russian).
9. *Lehto O., Virtanen K. J.* Quasiconformal mappings in the plane, Berlin, Heidelberg: Springer, 1973.
10. *Nevanlinna R.* Odnosnachnyie analiticheskie funktsii, Moscow: OGIZ, 1941 (in Russian).
11. *Agard S. B., Gehring F. W.* Proc. London Math. Soc. (3), 1965, **14A**: 1–21.
12. *Efimushkin A. S., Ryazanov V. I.* Dopov. NAN Ukraine, 2016, No 2: 13–16 (in Russian).

Поступило в редакцію 14.12.2015

А. С. Єфімушкін

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ

E-mail: a.yefimushkin@gmail.com

Про багатозначний розв'язок задачі Рімана–Гільберта для аналітичних функцій у кругових областях

Для рівнянь Бельтрамі в областях, обмежених скінченним числом гладких жорданових кривих, доведено існування багатозначних розв'язків задачі Рімана–Гільберта з коефіцієнтами зліченно-обмеженої варіації та граничними даними, що є вимірними відносно логарифмічної ємності. Показано, що простори розв'язків мають нескінченну розмірність.

Ключові слова: рівняння Бельтрамі, задача Рімана–Гільберта, аналітичні функції, багатозначні розв'язки, логарифмічна ємність.

A. S. Yefimushkin

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Slovyansk

E-mail: a.yefimushkin@gmail.com

On multivalent solutions of the Riemann–Hilbert problem in multiply connected domains

For the Beltrami equations in the domains bounded by a finite collection of smooth Jordan curves, the existence of multivalent solutions of the Riemann–Hilbert problem with coefficients of sigma-finite variation and with boundary data, which are measurable with respect to the logarithmic capacity, is proved. It is shown that these spaces of solutions have the infinite dimension.

Keywords: Beltrami equation, Riemann–Hilbert problem, analytic functions, multivalent solutions, logarithmic capacity.