

## МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВОГО ПОЛЯ, ЗБУРЕНОГО ЛОКАЛЬНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ У ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОМУ ПІВПРОСТОРИ, ТА РОЗРАХУНОК СИНТЕТИЧНИХ СЕЙСМОГРАМ

**Р.М. Пак**

*Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, вул. Героїв Майдану, 32, Львів 79012,  
Україна, e-mail: rpak@email.ua*

Роботу присвячено розробленню методу, алгоритму та програми для розрахунку сейсмічних хвиль на вільній поверхні вертикально-неоднорідного півпростору, збурених локальним джерелом. Для цього використано отримані раніше співвідношення для скалярних потенціалів прямих  $P$ -,  $SV$ - та  $SH$ -хвиль від сили у формі інтегралів Бесселя–Мелліна. Це дало змогу вивести модифікованим матричним методом Томсона–Хаскела формули для повного хвильового поля у вертикально-неоднорідному ізотропному пружному півпросторі, збуреного залежною від часу довільно орієнтованою силою. Побудовано точні вирази для тривимірного вектора переміщення на вільній поверхні цього середовища. На основі розробленої методики розв'язування прямої задачі побудовано алгоритм і створено комп'ютерну програму, призначену для розрахунку трикомпонентних синтетичних сейсмограм у вертикально-неоднорідних ізотропних середовищах, в яких діють джерела у вигляді сили. З метою перевірки ефективності і стійкості алгоритму на тестових прикладах розраховано повні синтетичні сейсмограми і велограми, на яких отримано вступи об'ємних і поверхневих хвиль.

**Ключові слова:** математичне моделювання, сейсмічне хвильове поле, матричний метод, вертикально-неоднорідне середовище, синтетична сейсмограма.

**Вступ.** Методи математичного моделювання та розрахунку сейсмічних хвильових полів є ефективним інструментом, який широко використовують під час вивчення будови, складу і стану земних надр, а також процесів, що там відбуваються.

Відомо, що для розв'язування задач побудови хвильового поля у вертикально-неоднорідних середовищах вертикальну неоднорідність, як правило, апроксимують великою кількістю однорідних плоских горизонтальних шарів (горизонтально-шарувате середовище). Це дає змогу використовувати зображення переміщень у частотній області у вигляді розкладу за горизонтальними хвильовими функціями, яке включає інтеграли за хвильовим числом (горизонтальною повільністю). Таке зображення є наслідком розділення змінних у циліндричній системі координат. Аналогічне зображення є правильним і для напруження на горизонтальній площині. Невідомі функції від глибини, що входять у зображення, залежать від частоти і хвильового числа (горизонтальної повільності) як параметрів. З вказаних функцій будують вектори переміщення–напруження; перша половина компонент цього вектора – вектор переміщення – стосується зображення для переміщень, друга половина – вектор напруження – стосується зображення для напружень. Компоненти вектора переміщення–напруження також називають вертикальними функціями. Вони задовольняють системі звичайних диференціальних

рівнянь першого порядку і визначаються з урахуванням введених граничних умов [1].

Традиційним методом розв'язку зазначеної системи є матричний (метод Томсона–Хаскела). За його допомогою можна будувати інтерференційні точні розв'язки для горизонтально-шаруватих середовищ, уникаючи складної процедури задоволення всім граничним умовам.

На основі алгоритму Томсона–Хаскела розвинуто підходи до побудови хвильових полів для поліпшення обчислювальної ефективності та числової стабільності алгоритму. Зокрема, для розв'язання проблеми обчислення мінорів погано обумовлених матриць запропоновано перехід від матриць 4-го до матриць 5-го порядку [3], використання мінорів замість пропагаторів [4, 11, 13]. У статті [8] отримано рекурсивні формули розрахунку мінорів з урахуванням різної поведінки експонент, які туди входять, залежно від горизонтальної повільності. Однак ці підходи не розв'язали повною мірою проблеми втрати точності під час обчислення суми експонент з різними знаками у показнику. У праці [12] запропоновано рекурсивний алгоритм для обчислення матриць відбиття і матриць заломлення на кожній межі, розвинутий на основі результатів ранішніх робіт. Важливість цього алгоритму полягає в його чисельній стійкості, що дає змогу вести розрахунки для будь-яких частот і горизонтальних повільностей (хвильових чисел), на відміну від класичного методу Томсона–Хаскела та модифікацій, в яких виникає переповнення під час обчислення показни-

кових функцій для високих частот і повільностей (хвильових чисел). Рекурсивний алгоритм є, зокрема, складовою частиною методу відбиття (reflectivity method) [12, 14] і методу дискретного хвильового числа (discrete wavenumber method) [9].

У зв'язку з викладеним залишається потреба у розробленні методів математичного моделювання, які б дали змогу швидко і точно розраховувати всі компоненти 3D хвильових полів. Одному з таких напрямів присвячено цю статтю. В ній запропоновано методу математичного моделювання хвильового поля на вільній поверхні горизонтально-шаруватого півпростору від точкового джерела у вигляді довільно орієнтованої сили. Наведена методика є розвитком підходу, описаного в монографії [2] і узагальненого автором [5] для інших типів джерела хвиль (довільно спрямованою силою або подвійною парою сил) та його розташування у довільному шарі горизонтально-шаруватого середовища.

**Теорія.** Розглянемо в циліндричній системі координат  $(r, \varphi, z)$  горизонтально-шаруватий півпростір, який складається із  $(n+1)$ -го однорідних, ізотропних, ідеально пружних шарів з плоскими межами поділу. Початок системи координат розміщено на вільній поверхні цього середовища, а вісь  $Oz$  спрямовано вниз у напрямку шарів. Припустимо, що на межах шарів, які характеризуються товщиною, густиною, швидкостями поширення поздовжніх і поперечних хвиль  $h_i, \rho_i, v_{pi}, v_{Si}$  відповідно  $(i = 1, 2, \dots, n+1)$ , виконуються умови жорсткого контакту. Для  $(n+1)$ -го шару вважаємо, що  $h_{n+1} = +\infty$ . Нехай у довільному шарі у момент часу  $t = 0$  починає діяти точкове джерело у вигляді зосередженої сили  $\mathbf{f}(t) = (f_r(t), f_\varphi(t), f_z(t))^T$ . Цей шар розділимо уявною горизонтальною межею, що проходить через точку прикладання сили. Таким чином, утворимо два шари, верхній з яких матиме номер  $s$ , а нижній —  $s+1$ . Тоді джерело знаходитиметься на  $s$ -й межі в точці  $(0, 0, z_s)$ .

Поширення пружних хвиль у кожному шарі опишемо диференціальним рівнянням

$$\rho_i \ddot{\mathbf{u}}_i = (\lambda_i + 2\mu_i) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_i) - \mu_i \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_i), \quad (1)$$

у якому  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t)$  — вектор переміщення;  $\rho_i$  — густина;  $\lambda_i$  та  $\mu_i$  — параметри Ламе для  $i$ -го шару. Початкові та граничні умови задамо у вигляді

$$\dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, 0) = 0 \quad \text{для } \mathbf{r} \neq (0, 0, z_s);$$

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_{i+1}(\mathbf{r}, t),$$

$$\tau_{zi}(\mathbf{r}, t) = \tau_{z(i+1)}(\mathbf{r}, t) \quad \text{для } z = H_i \text{ та}$$

$$\mathbf{r} \neq (0, 0, z_s), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \tau_{zi} = 0 \quad \text{для } z = 0, \quad (2)$$

$$[\tau_{zi}(\mathbf{r}, t)] = -\frac{f_i(t)\delta(r)}{2\pi r} \quad \text{для } \mathbf{r} = (0, 0, z_s).$$

Припустимо заданою також умову випромінювання: хвилі з півпростору не повертаються.

Символом  $[\tau_{zi}(\mathbf{r}, t)]$  позначено стрибок  $\tau_{zi}(z_s+0) - \tau_{zi}(z_s-0)$  функції  $\tau_{zi}(\mathbf{r}, t)$  для  $z = z_s$ ,  $l = \{r, \varphi, z\}$ . У формулах (2) літерою “ $\tau$ ” з індексами позначено елементи тензора напружень для певного шару;  $H_i$  — відстань від вільної поверхні до нижньої межі  $i$ -го шару.

Для рівняння (1) існують потенціали поля переміщень  $\varphi_i, \psi_i, \chi_i$  [14], які пов'язані з компонентами вектора переміщення і елементами тензора напружень формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \nabla \cdot \varphi_i + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{k} \Psi_i) + \nabla \times \mathbf{k} \chi_i, \\ \tau_{zi} &= \mu_i \left( 2\varphi_{i,rz} + 2\Psi_{i,zzr} + \frac{1}{r}\chi_{i,\varphi z} - \frac{1}{v_{Si}^2}\Psi_{i,itr} \right), \\ \tau_{z\varphi i} &= \frac{\mu_i}{r} \left[ 2\varphi_{i,z\varphi} + 2\Psi_{i,zz\varphi} - r\chi_{i,rz} - \frac{1}{v_{Si}^2}\Psi_{i,tt\varphi} \right], \\ \tau_{zi} &= \frac{\lambda_i}{v_{pi}^2}\varphi_{i,tt} + 2\mu_i \left( \varphi_{i,zz} + \Psi_{i,zzz} - \frac{1}{v_{Si}^2}\Psi_{i,ttz} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Ці потенціали задовольняють хвильовим рівнянням

$$\ddot{\varphi}_i = v_{pi}^2 \Delta \varphi_i, \quad \ddot{\Psi}_i = v_{Si}^2 \Delta \Psi_i, \quad \ddot{\chi}_i = v_{Si}^2 \Delta \chi_i. \quad (4)$$

Введемо перетворення

$$Y = \Xi(\tilde{Y}) = -\frac{1}{4\pi\rho_0} \int_{\sigma-j\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \tilde{Y} \exp(k\tau\eta) d\eta, \quad j = \sqrt{-1} \quad (5)$$

і запишемо співвідношення для зображень потенціалів прямих (первинних) хвиль  $P, SV$  та  $SH$  відповідно, збурених заданим джерелом у шарах  $s$  та  $s+1$  ( $\tilde{\varphi}_s^{np}, \tilde{\Psi}_s^{np}, \tilde{\chi}_s^{np}$  та  $\tilde{\varphi}_{s+1}^{np}, \tilde{\Psi}_{s+1}^{np}, \tilde{\chi}_{s+1}^{np}$ ). Для цього скористаємося формулами, отриманими в статті [7] у формі подвійних інтегралів Бесселя–Мелліна. Одержимо:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_s^{np} &= kJ_1(kr)F_r(k\eta)\widehat{X}_s^{(1)+} e^{k\alpha_s(z-H_{s-1})} + \\ &+ kJ_0(kr)F_z(k\eta)\widehat{X}_s^{(2)+} e^{k\alpha_s(z-H_{s-1})}, \\ \tilde{\varphi}_{s+1}^{np} &= kJ_1(kr)F_r(k\eta)\widehat{X}_{s+1}^{(1)-} e^{k\alpha_{s+1}(H_s-z)} + \\ &+ kJ_0(kr)F_z(k\eta)\widehat{X}_{s+1}^{(2)-} e^{k\alpha_{s+1}(H_s-z)}, \\ \tilde{\Psi}_s^{np} &= J_1(kr)F_r(k\eta)\widehat{Y}_s^{(1)+} e^{k\beta_s(z-H_{s-1})} + \\ &+ J_0(kr)F_z(k\eta)\widehat{Y}_s^{(2)+} e^{k\beta_s(z-H_{s-1})}, \\ \tilde{\Psi}_{s+1}^{np} &= J_1(kr)F_r(k\eta)\widehat{Y}_{s+1}^{(1)-} e^{k\beta_{s+1}(H_s-z)} + \\ &+ J_0(kr)F_z(k\eta)\widehat{Y}_{s+1}^{(2)-} e^{k\beta_{s+1}(H_s-z)}, \\ \tilde{\chi}_s^{np} &= kJ_1(kr)F_\varphi(k\eta)\widehat{Z}_s^+ e^{k\beta_s(z-H_{s-1})}, \\ \tilde{\chi}_{s+1}^{np} &= kJ_1(kr)F_\varphi(k\eta)\widehat{Z}_{s+1}^- e^{k\beta_{s+1}(H_s-z)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут

$$\begin{aligned}\widehat{X}_s^{(1)+} &= \frac{e^{-k\alpha_s h_s}}{\alpha_s k \eta^2}, \quad \widehat{X}_s^{(2)+} = -\frac{e^{-k\alpha_s h_s}}{k \eta^2}, \quad \widehat{X}_{s+1}^{(1)-} = \frac{1}{\alpha_{s+1} k \eta^2}, \\ \widehat{X}_{s+1}^{(2)-} &= \frac{1}{k \eta^2}, \quad \widehat{Y}_s^{(1)+} = -\frac{e^{-k\beta_s h_s}}{k \eta^2}, \quad \widehat{Y}_s^{(2)+} = \frac{e^{-k\beta_s h_s}}{k \beta_s \eta^2}, \\ \widehat{Y}_{s+1}^{(1)-} &= \frac{1}{k \eta^2}, \quad \widehat{Y}_{s+1}^{(2)-} = \frac{1}{k \beta_{s+1} \eta^2}, \\ \widehat{Z}_s^+ &= \frac{(\beta_s^2 - 1)e^{-k\beta_s h_s}}{\beta_s k \eta^2}, \quad \widehat{Z}_{s+1}^- = \frac{(\beta_{s+1}^2 - 1)e^{-k\beta_{s+1} h_s}}{\beta_{s+1} k \eta^2},\end{aligned}\quad (7)$$

$\alpha_s = \sqrt{1 + \eta^2 / v_{S_s}^2}$ ,  $\beta_s = \sqrt{1 + \eta^2 / v_{P_s}^2}$ ,  $H_s = z_s$ ,  $J_0(kr)$ ,  $J_1(kr)$  – функції Бесселя порядку 0 і 1;  $F_r(k\eta)$ ,  $F_\phi(k\eta)$ ,  $F_z(k\eta)$  – зображення функцій  $f_r(t)$ ,  $f_\phi(t)$ ,  $f_z(t)$  інтегралом Мелліна за змінною  $s = k\eta$ . З метою скорочення виразів записуватимемо ці функції надалі без аргументів.

В умовах неоднорідного півпростору енергія первинних хвиль перерозподілятиметься. Тому розв'язки хвильових рівнянь (4) для кожного шару середовища шукатимемо у формі розв'язків (6) для однорідного простору:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_i &= kJ_1 X_i^{(1)} F_r + kJ_0 X_i^{(2)} F_z, \\ \tilde{\Psi}_i &= J_1 Y_i^{(1)} F_r + J_0 Y_i^{(2)} F_z, \\ \tilde{\chi}_i &= kJ_1 Z_i F_\phi,\end{aligned}\quad (8)$$

де

$$\begin{aligned}X_i^{(1)} &= X_i^{(1)+} e^{k(z-H_{i-1})\alpha_i} + X_i^{(1)-} e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_i}, \\ X_i^{(2)} &= X_i^{(2)+} e^{k(z-H_{i-1})\alpha_i} + X_i^{(2)-} e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_i}, \\ Y_i^{(1)} &= Y_i^{(1)+} e^{k(z-H_{i-1})\beta_i} + Y_i^{(1)-} e^{k(H_{i-1}-z)\beta_i}, \\ Y_i^{(2)} &= Y_i^{(2)+} e^{k(z-H_{i-1})\beta_i} + Y_i^{(2)-} e^{k(H_{i-1}-z)\beta_i}, \\ Z_i &= Z_i^+ e^{k(z-H_{i-1})\beta_i} + Z_i^- e^{k(H_{i-1}-z)\beta_i}.\end{aligned}$$

Ці формули містять величини (амплітуди потенціалів)  $X_i^{(1)+}$ ,  $X_i^{(2)+}$ ,  $Y_i^{(1)+}$ ,  $Y_i^{(2)+}$ ,  $Z_i^+$ , які описують хвилі в  $i$ -му шарі, що поширюються вгору (у протилежному до осі  $Oz$  напрямку), та  $X_i^{(1)-}$ ,  $X_i^{(2)-}$ ,  $Y_i^{(1)-}$ ,  $Y_i^{(2)-}$ ,  $Z_i^-$ , які описують хвилі, що поширюються вниз (у напрямку осі  $Oz$ ). Ці амплітуди потенціалів є функціями змінних  $k$  і  $\eta$ .

Підставимо співвідношення (8) у перетворення (5), після чого отримані потенціали  $\varphi_r$ ,  $\psi_r$ ,  $\chi_r$  підставимо у формули (3) і дістанемо вирази для компонентів вектора переміщення та елементів тензора напружень у кожному шарі:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{r_i} &= kJ_0 U_{r_i}^{(1)} F_r - kJ_1 U_{r_i}^{(2)} F_z - \frac{1}{r} J_1 (U_{r_i}^{(2)} + U_{\phi_i}) F_r, \\ \tilde{u}_{\phi_i} &= -kJ_0 U_{\phi_i} F_\phi + \frac{1}{r} J_1 (U_{r_i}^{(1)} + U_{\phi_i}) F_\phi, \\ \tilde{u}_{z_i} &= kJ_1 U_{z_i}^{(1)} F_r + kJ_0 U_{z_i}^{(2)} F_z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{t}_{rzi} &= k^2 J_0 T_{rzi}^{(1)} F_r - k^2 J_1 T_{rzi}^{(2)} F_z - \frac{1}{r} kJ_1 (T_{rzi}^{(1)} + T_{z\phi_i}) F_r, \\ \tilde{t}_{z\phi_i} &= -k^2 J_0 T_{z\phi_i} F_\phi + \frac{1}{r} kJ_1 (T_{rzi}^{(1)} + T_{z\phi_i}) F_\phi, \\ \tilde{t}_{zzi} &= k^2 J_1 T_{zzi}^{(1)} F_r + k^2 J_0 T_{zzi}^{(2)} F_z.\end{aligned}$$

Вирази для функцій  $U_{r_i}^{(1)}$ ,  $U_{r_i}^{(2)}$ ,  $U_{\phi_i}$ ,  $U_{z_i}^{(1)}$ ,  $U_{z_i}^{(2)}$ ,  $T_{rzi}^{(1)}$ ,  $T_{rzi}^{(2)}$ ,  $T_{z\phi_i}$ ,  $T_{zzi}^{(1)}$ ,  $T_{zzi}^{(2)}$  запишемо у вигляді матричних рівнянь

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_i^{(1)}(H_i) &= \mathbf{A}_i \mathbf{L}_i \mathbf{Z}_i^{(1)}, \quad \mathbf{W}_i^{(2)}(H_i) = \mathbf{A}_i \mathbf{L}_i \mathbf{Z}_i^{(2)}, \\ \mathbf{W}_i^*(H_i) &= \mathbf{A}_i^* \mathbf{L}_i^* \mathbf{Z}_i^*,\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{i+1}^{(1)}(H_i) &= \mathbf{A}_{i+1} \mathbf{Z}_{i+1}^{(1)}, \quad \mathbf{W}_{i+1}^{(2)}(H_i) = \mathbf{A}_{i+1} \mathbf{Z}_{i+1}^{(2)}, \\ \mathbf{W}_{i+1}^*(H_i) &= \mathbf{A}_{i+1}^* \mathbf{Z}_{i+1}^*,\end{aligned}\quad (10)$$

де

$$\mathbf{W}_i^{(1)} = (U_{r_i}^{(1)}, U_{z_i}^{(1)}, T_{rzi}^{(1)}, T_{zzi}^{(1)})^T,$$

$$\mathbf{W}_i^{(2)} = (U_{r_i}^{(2)}, U_{z_i}^{(2)}, T_{rzi}^{(2)}, T_{zzi}^{(2)})^T,$$

$$\mathbf{W}_i^* = (U_{\phi_i}, T_{z\phi_i})^T,$$

$$\mathbf{Z}_i^{(1)} = (X_i^{(1)+}, X_i^{(1)-}, Y_i^{(1)+}, Y_i^{(1)-})^T,$$

$$\mathbf{Z}_i^{(2)} = (X_i^{(2)+}, X_i^{(2)-}, Y_i^{(2)+}, Y_i^{(2)-})^T,$$

$$\mathbf{Z}_i^* = (Z_i^+, Z_i^-)^T,$$

$$\mathbf{A}_i^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu_i \beta_i & -\mu_i \beta_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_i^* = \begin{pmatrix} e^{k\beta_i h_i} & 0 \\ 0 & e^{-k\beta_i h_i} \end{pmatrix}.$$

Матриці  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{L}_i$  наведено у монографії [2]. Співвідношення (7) також запишемо у вигляді векторів:

$$\widehat{\mathbf{Z}}_s^{(1)} = \frac{1}{k\eta^2} \begin{pmatrix} e^{-k\alpha_s h_s} \\ \alpha_s \\ 0, -e^{-k\beta_s h_s}, 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\widehat{\mathbf{Z}}_{s+1}^{(1)} = \frac{1}{k\eta^2} \begin{pmatrix} 0, \frac{1}{\alpha_{s+1}}, 0, 1 \end{pmatrix}^T,$$

$$\widehat{\mathbf{Z}}_s^{(2)} = \frac{1}{k\eta^2} \begin{pmatrix} -e^{-k\alpha_s h_s} \\ 0, \frac{e^{-k\beta_s h_s}}{\beta_s}, 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\widehat{\mathbf{Z}}_{s+1}^{(2)} = \frac{1}{k\eta^2} \begin{pmatrix} 0, 1, 0, \frac{1}{\beta_{s+1}} \end{pmatrix}^T,$$

$$\widehat{\mathbf{Z}}_s^* = \frac{1}{k\eta^2} \begin{pmatrix} \beta_s^2 - 1 \\ \beta_s \\ e^{-k\beta_s h_s}, 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\widehat{\mathbf{Z}}_{s+1}^* = \frac{1}{k\eta^2} \begin{pmatrix} 0, \beta_{s+1}^2 - 1 \\ \beta_{s+1} \end{pmatrix}^T.$$

Для розгляду процесів відбиття і проходження на межах шарів використовуватимемо матричний метод, згідно з яким встановимо вирази для матриць, що характеризують шари і півпростір. Для цього кожному середовищу і кожній межі поділу ставимо у відповідність (на рівні підінтегральних функцій інтегралів Мелліна) характеристичну матрицю, а врахування процесу поширення хвиль проводимо за добутком таких матриць у певному порядку. Цей підхід, що відповідає методу Томсона–Хаскела, описано у монографії [2].

Розглянемо перші рівності з формул (9) і (10). З умови ідеальності контакту між шарами ( $\mathbf{W}_{i+1}^{(1)}(H_i) = \mathbf{W}_i^{(1)}(H_i)$ ) одержимо

$$\mathbf{Z}_{i+1}^{(1)} = \mathbf{A}_{i+1}^{-1} \mathbf{A}_i \mathbf{L}_i \mathbf{Z}_i^{(1)}. \quad (11)$$

Матричні рівняння (11) після підстановок зводимо до вигляду

$$\mathbf{Z}_{n+1}^{(1)} = \mathbf{A}_{n+1}^{-1} \mathbf{A}_n \mathbf{L}_n \mathbf{A}_n^{-1} \dots \mathbf{A}_{s+2}^{-1} \mathbf{A}_{s+1} \mathbf{L}_{s+1} \mathbf{Z}_{s+1}^{(1)} \equiv \mathbf{D}_{s+1}^{n+1} \mathbf{Z}_{s+1}^{(1)},$$

$$\mathbf{Z}_s^{(1)} = \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{A}_{s-1} \mathbf{L}_{s-1} \mathbf{A}_{s-1}^{-1} \dots \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{Z}_1^{(1)} \equiv \mathbf{D}_1^s \mathbf{Z}_1^{(1)}.$$

Хвильове поле в  $s$ -му і  $(s+1)$ -му шарах є сумою прямої хвилі від джерела і хвиль, утворених взаємодією прямої хвилі із середовищем над джерелом та під ним. Тому розділимо його на первинні хвилі  $\widehat{\mathbf{Z}}_s^{(1)}$ ,  $\widehat{\mathbf{Z}}_{s+1}^{(1)}$  і решту інтерференційного поля  $\overline{\mathbf{Z}}_s^{(1)}$ ,  $\overline{\mathbf{Z}}_{s+1}^{(1)}$ :

$$\widehat{\mathbf{Z}}_s^{(1)} + \overline{\mathbf{Z}}_s^{(1)} = \mathbf{D}_1^s \mathbf{Z}_1^{(1)}, \quad \mathbf{Z}_{n+1}^{(1)} = \mathbf{D}_{s+1}^{n+1} \widehat{\mathbf{Z}}_{s+1}^{(1)} + \mathbf{D}_{s+1}^{n+1} \overline{\mathbf{Z}}_{s+1}^{(1)}. \quad (12)$$

Використавши формулу (11) і першу з формул (12), а також урахувавши, що  $\mathbf{A}_{s+1}^{-1} \mathbf{A}_s = \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  – одинична матриця) і  $\mathbf{W}_1^{(1)}(0) = \mathbf{A}_1 \mathbf{Z}_1^{(1)}$ , друге з рівнянь (12) запишемо у вигляді

$$\mathbf{Z}_{n+1}^{(1)} = \mathbf{D}_{s+1}^{n+1} \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{D} \mathbf{W}_1^{(1)}(0), \quad (13)$$

де  $\mathbf{W}_1^{(1)}(0) = (U_{r0}^{(1)}, U_{z0}^{(1)}, 0, 0)^T$  – вектор-стовпець функцій-зображень переміщень і напружень на вільній поверхні;  $\mathbf{Z}_{n+1}^{(1)} = (0, X_{n+1}^{(1)-}, 0, Y_{n+1}^{(1)-})^T$  (згідно з умовою випромінювання)  $\mathbf{S}^{(1)} = (s_p^{(1)}) = \frac{1}{k\eta^2} \left( -\frac{1}{\alpha_s}, \frac{1}{\alpha_s}, 1, 1 \right)^T$ ;

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}_{n+1}^{-1} \mathbf{C}_n \dots \mathbf{C}_1,$$

$$\mathbf{D}_{s+1}^{n+1} = \mathbf{A}_{n+1}^{-1} \mathbf{C}_n \dots \mathbf{C}_{s+2} \mathbf{A}_{s+1} \mathbf{L}_{s+1},$$

$\mathbf{C}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{L}_i \mathbf{A}_i^{-1}$  – матриця шару.

Матриці  $\mathbf{D} = (d_{ij})$  і  $\mathbf{D}_{s+1}^{n+1} = (d_{ij}^s)$  є характеристичними матрицями всього середовища і середовища під джерелом відповідно.

З матричного рівняння (13) отримаємо

$$U_{r0}^{(1)} = \frac{d_{12} \sigma_2^{(1)} - d_{32} \sigma_1^{(1)}}{\Delta}, \quad U_{z0}^{(1)} = \frac{d_{31} \sigma_1^{(1)} - d_{11} \sigma_2^{(1)}}{\Delta}, \quad (14)$$

де

$$\Delta = d_{32} d_{11} - d_{31} d_{12}; \quad \sigma_1^{(1)} = d_{1p}^s s_p^{(1)}; \quad \sigma_2^{(1)} = d_{3p}^s s_p^{(1)},$$

$$p = 1, 2, \dots, 4.$$

Запишемо формули (14) у формі, придатнішій для обчислень. Для цього в чисельниках елементи матриці  $\mathbf{D}$  виразимо через елементи матриць  $\mathbf{D}_{s+1}^{n+1}$  та  $\mathbf{D}_1^s$ , увівши останню з рівності  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{s+1}^{n+1} \mathbf{D}_1^s$ . Матриця

$$\mathbf{D}_1^s = \mathbf{L}_s \mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{C}_{s-1} \dots \mathbf{C}_1$$

є характеристичною матрицею середовища над джерелом. Тоді якщо мінор  $\Delta$  матриці  $\mathbf{D}$  і мінори матриці другого порядку матриці  $\mathbf{D}_{s+1}^{n+1}$  замінити елементами відповідних матриць 5-го порядку [4], то отримаємо

$$U_{r0}^{(1)} = \frac{g_{rp} s_p^{(1)}}{d_{12}}, \quad U_{z0}^{(1)} = \frac{g_{zp} s_p^{(1)}}{d_{12}},$$

де вирази  $g_{rp}$  і  $g_{zp}$  наведено у статті [4] (формули (20)).

Розглянувши другі рівності з формул (9) і (10) і провівши аналогічні перетворення, отримаємо

$$U_{r0}^{(2)} = \frac{g_{rp} s_p^{(2)}}{d_{12}}, \quad U_{z0}^{(2)} = \frac{g_{zp} s_p^{(2)}}{d_{12}},$$

де  $s_p^{(2)}$  – елементи вектора-стовпця

$$\mathbf{S}^{(2)} = \frac{1}{k\eta^2} \left( 1, 1, -\frac{1}{\beta_s}, \frac{1}{\beta_s} \right)^T.$$

Для опису поширення хвиль  $SH$  на підставі третіх рівностей з формул (9) і (10) отримаємо співвідношення

$$\mathbf{Z}_{n+1}^* = \mathbf{D}_{s+1}^{n+1*} \mathbf{S}^* + \mathbf{D}^* \mathbf{W}_1^*(0), \quad (15)$$

де

$$\mathbf{D}_{s+1}^{n+1*} = \mathbf{A}_{n+1}^{*-1} \mathbf{C}_n^* \dots \mathbf{C}_{s+2}^* \mathbf{A}_{s+1}^* \mathbf{L}_{s+1}^*;$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}_{n+1}^{*-1} \mathbf{C}_n^* \dots \mathbf{C}_1^* \quad (\mathbf{C}_i^* = \mathbf{A}_i^* \mathbf{L}_i^* \mathbf{A}_i^{*-1});$$

$$\mathbf{S}^* = \frac{\beta_s^2 - 1}{k\beta_s \eta^2} (-1, 1)^T; \quad \mathbf{W}_1^*(0) = (U_{\varphi 0}, T_{z\varphi 0})^T;$$

$$\mathbf{Z}_{n+1}^* = (0, Z_{n+1}^-)^T.$$

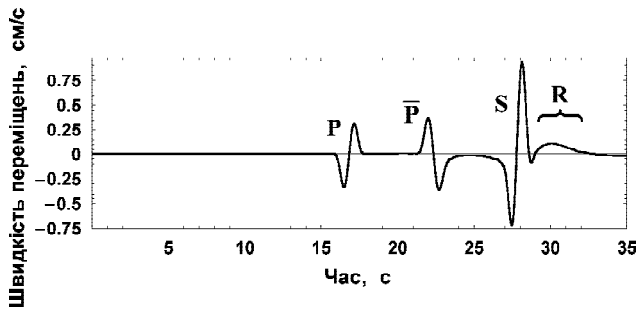
З матричного рівняння (15) отримаємо

$$U_{\varphi 0} = -\frac{d_{1p}^{*s+1} s_p^*}{d_{11}^*} \quad (p = 1, 2).$$

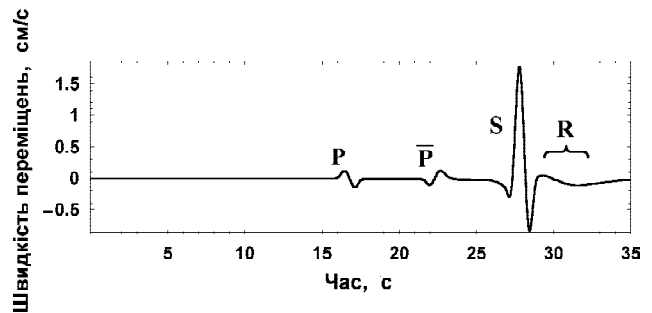
Якщо джерело знаходиться на глибині  $z_s > \sum_{i=1}^n h_i$  (всередині півпростору), то замість формули (13) матимемо

$$\overline{\mathbf{Z}}_{n+1}^{(1)} = \mathbf{D} \mathbf{W}_1^{(1)}(0) - \widehat{\mathbf{Z}}_s^{(1)},$$

де  $\overline{\mathbf{Z}}_{n+1}^{(1)} = (0, \overline{X}_{n+1}^{(1)-}, 0, \overline{Y}_{n+1}^{(1)-})^T$ . Тоді, отримавши з цього рівняння  $U_{r0}^{(1)}$ ,  $U_{z0}^{(1)}$ , замінимо мінор  $\Delta$  на  $\overline{d}_{12}$  і одержимо



а



б

Рис. 1. Синтетична сейсмографа радіальної (а) та вертикальної (б) компонент швидкості переміщення для вертикальної сили у півпросторі

$$U_{r0}^{(1)} = \frac{1}{k\eta^2 \bar{d}_{12}} \left( \frac{d_{32}}{\alpha_s} e^{-k\alpha_s h_s} + d_{12} e^{-k\beta_s h_s} \right),$$

$$U_{z0}^{(1)} = -\frac{1}{k\eta^2 \bar{d}_{12}} \left( \frac{d_{31}}{\alpha_s} e^{-k\alpha_s h_s} + d_{11} e^{-k\beta_s h_s} \right),$$

де  $\alpha_s = \alpha_{n+1}$ ,  $\beta_s = \beta_{n+1}$ ,  $h_s$  – відстань від джерела до нижньої межі шару з номером  $n$ .

Аналогічно отримуємо

$$U_{r0}^{(2)} = -\frac{1}{k\eta^2 \bar{d}_{12}} \left( d_{32} e^{-k\alpha_s h_s} + \frac{d_{12}}{\beta_s} e^{-k\beta_s h_s} \right),$$

$$U_{z0}^{(2)} = \frac{1}{k\eta^2 \bar{d}_{12}} \left( d_{31} e^{-k\alpha_s h_s} + \frac{d_{11}}{\beta_s} e^{-k\beta_s h_s} \right),$$

$$U_{\varphi 0} = -\frac{\beta_s^2 - 1}{k\eta^2 \beta_s d_{11}^*} e^{-k\beta_s h_s}.$$

Розроблена методика дає змогу отримувати повне хвильове поле типу  $P-SV$  або  $SH$  включно з багаторазовими, обмінними, дифрагованими та іншими хвилями, а також поверхневі хвилі.

**Числові експерименти.** На основі викладеної теорії розв'язку прямої динамічної задачі сейсмології побудовано алгоритм і розроблено комп'ютерну програму для обчислень синтетичних сейсмограм, велограм та акселерограм і їхніх спектрів. Розглянемо декілька числових прикладів.

*Модель однорідного півпростору.* В однорідному пружному півпросторі, що характеризується швидкістю поширення поздовжньої хвилі  $v_p = 4600$  м/с, поперечної  $v_s = 2700$  м/с і густиною  $2000$  кг/м<sup>3</sup>, на глибині  $10$  км задано джерело у вигляді точкового вертикального силового імпульсу  $\mathbf{F} = f_z \mathbf{k}$ , де  $f_z = 10^{14}$  кг/(м<sup>2</sup>·с<sup>2</sup>). Імпульс має дзвоноподібну форму і триває  $2$  с.

На рис. 1 представлено залежності радіальних і вертикальних компонент швидкостей переміщення від часу для точки спостереження, що знаходиться на поверхні півпростору на відстані  $70$  км від осі джерела.

На сейсмограмах виділено такі типи хвиль:

- пряма поздовжня  $P$ ;
- мода  $\bar{P}$ , яка просочується; її утворення пов'язане з близькістю джерела до вільної поверхні [1];

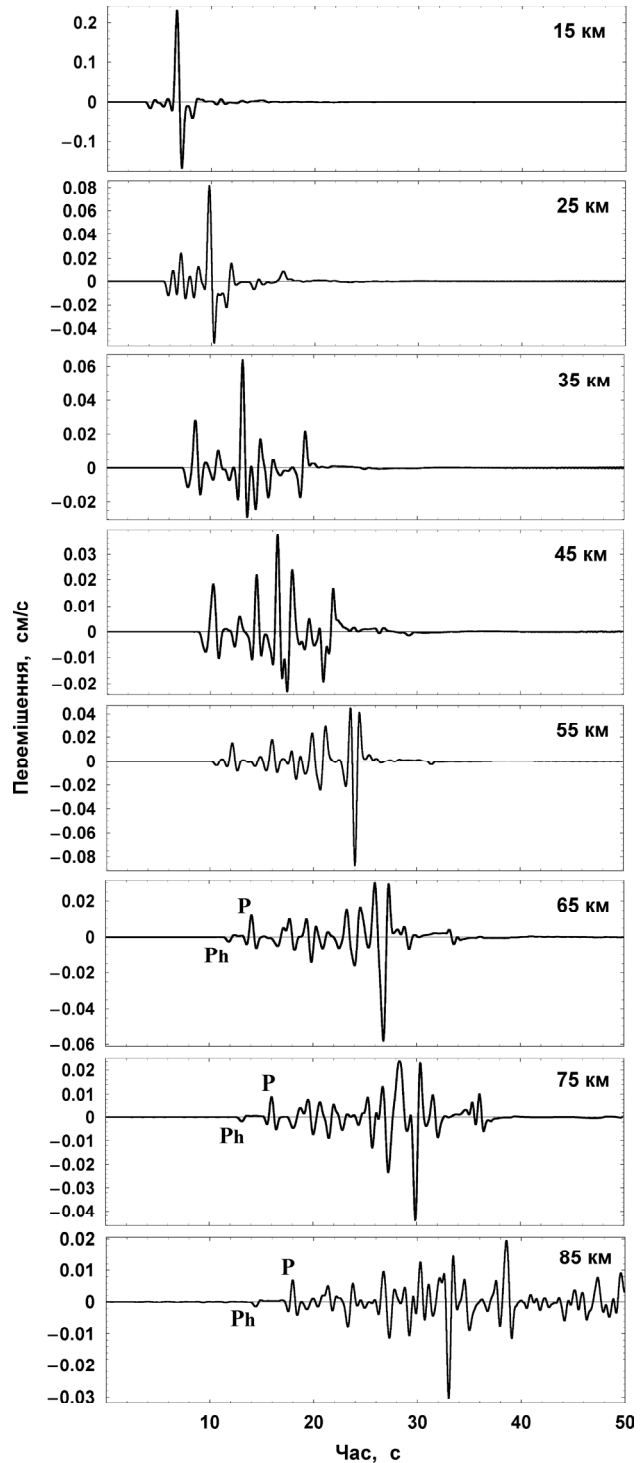


Рис. 2. Синтетичні сейсмограми переміщень (вертикальні компоненти) для сили у шаруватому середовищі

- пряма поперечна  $S$ ;
- основна гармоніка хвилі Релея  $R$ ; відповідно до теорії в однорідному півпросторі, ця хвиля не диспергує, тобто зберігає свою форму, її фазові і групові швидкості не залежать від частоти і дорівнюють  $v_R = 0,91v_s$ , що становить 2,457 км/с;

*Модель "шар на півпросторі".* У другому тестовому прикладі змодельовано відбиття пружних хвиль від межі між шаром і півпростором. Цей ілюстративний приклад демонструє головну хвилю. Джерело взято у вигляді сили  $f(t) = 10^{12} (1, 1, 1)^T \cdot s(t)$  Н у декартовій системі координат і розміщено на глибині 10 км. За часову функцію джерела  $s(t)$  взято "дзвінковий" сигнал тривалістю 1,4 с. Товщина шару 15 км. Параметри шару і півпростору відповідно такі: густина 2800 і 3100 кг/м<sup>3</sup>, швидкості  $P$ -хвиль 5 і 8 км/с, швидкості  $S$ -хвиль 2,9 і 4,5 км/с. Величини переміщення розраховано в точках на "епіцентральных" відстанях 15, 25, 35, ..., 85 км (рис. 2).

**Висновки.** На основі матричного методу Томсона–Хаскела розроблено методику побудови точних співвідношень для вектора переміщення на вільній поверхні вертикально-неоднорідного півпростору, в якому діє джерело у вигляді сили. Побудовано алгоритми і розроблено комп'ютерну програму, призначену для розрахунків трикомпонентних синтетичних сейсмограм від джерела у вигляді сили. Програму протестовано на кількох числових прикладах.

1. Аки К. Количественная сейсмология / К. Аки, П. Ричардс. – М.: Мир, 1983. – 519 с.
2. Молотков Л.А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых, упругих и жидких средах / Л.А. Молотков. – Л.: Наука, 1984. – 201 с.
3. Молотков Л.А. О распространении упругих волн в средах, содержащих тонкие плоскопараллельные слои // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1961. – № 5. – С. 240–280.
4. Пак Р.М. Методика підвищення числової стійкості для розрахунку хвильового поля на основі матричного

методу Томсона–Хаскела / Р.М. Пак // Геоінформатика. – 2014. – № 4. – С. 1–6.

5. Пак Р.М. Моделирование хвильового поля, збудженого глибинним джерелом у вертикально-неоднорідному середовищі / Р.М. Пак // Геофіз. журн. – 2005. – Т. 27, № 5. – С. 887–894.
6. Пак Р.М. Хвильове поле в однорідному середовищі для джерела у вигляді одинарної сили або подвійної пари сил / Р.М. Пак // Геоінформатика. – 2004. – № 1. – С. 36–44.
7. Роганов Ю.В. Представление потенциала от точечных источников для однородной изотропной среды в виде интегралов Бесселя–Меллина / Ю.В. Роганов, Р.М. Пак // Геофіз. журн. – 2013. – Т. 35, № 2. – С. 163–167.
8. Abo-Zena A. Dispersion function computations for unlimited frequency values / A. Abo-Zena // Geophys. J. Roy Astron. Soc. – 1979. – V. 58. – P. 91–105.
9. Bouchon M.A. Review of the discrete wavenumber method / M. Bouchon // Pure and Applied Geophysics. – 2003. – V. 160. – P. 445–465.
10. Chapman C.H. Yet another elastic plane-wave, layer-matrix algorithm / C.H. Chapman // Geophys. J. Inter. – 2003. – V. 154. – P. 212–223.
11. Dunkin I.W. Computation of modal solution in layered elastic media at high frequencies / I.W. Dunkin // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1965. – V. 55. – P. 335–358.
12. Kennett B.L.N. Seismic Wave Propagation in Stratified Media / B.L.N. Kennett. – Cambridge University Press, 1983. – 342 p.
13. Knopoff L.A. Matrix method for elastic wave problems / L.A. Knopoff // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1964. – V. 54. – P. 431–438.
14. Müller G. The reflectivity method: a tutorial / G. Müller // J. Geophys. – 1985. – V. 58. – P. 153–174.
15. Thrower E.N. The computation of the dispersion of elastic waves in layered media / E.N. Thrower // J. Sound and Vibration. – 1965. – V. 2. – P. 210–226.
16. Wang R. A simple orthonormalization method for stable and efficient computation of Green's functions / R. Wang // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1999. – V. 89. – P. 733–741.
17. Watson T.N. A note on fast computation of Rayleigh wave dispersion in the multilayered halfspace / T.N. Watson // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1970. – V. 60. – P. 161–166.

Надійшла до редакції 23.07.2015 р.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ, ВОЗМУЩЕННОГО ЛОКАЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, И РАСЧЕТ СИНТЕТИЧЕСКИХ СЕЙСМОГРАММ

Р.М. Пак

Академия сухопутных войск имени гетмана Петра Сагайдачного, ул. Героев Майдана, 32, Львов 79012, Украина, e-mail: rpak@email.ua

Статья посвящена разработке метода, алгоритма и программы для расчета сейсмических волн на свободной поверхности вертикально-неоднородного полупространства, возмущенных локальными источниками. Были использованы полученные ранее соотношения для скалярных потенциалов прямых  $P$ -,  $SV$ - и  $SH$ -волн и силы в форме интегралов Бесселя–Меллина. Это позволило вывести, применив модифицированный матричный

метод Томсона–Хаскелла, формулы для полного волнового поля в вертикально-неоднородном изотропном упругом полупространстве, возбужденном зависимой от времени произвольно ориентированной силой. Построены точные выражения для трехмерного вектора перемещения на свободной поверхности этой среды. На основе разработанной методики решения прямой задачи создан алгоритм и написана компьютерная программа, предназначенная для расчета трехкомпонентных синтетических сейсмограмм в вертикально-неоднородных изотропных средах, в которых действуют источники в виде силы. С целью проверки эффективности и устойчивости алгоритма на тестовых примерах рассчитаны полные синтетические сейсмограммы и велогаммы, на которых получены вступления объемных и поверхностных волн.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, сейсмическое волновое поле, матричный метод, вертикально-неоднородная среда, синтетическая сейсмограмма.

## MODELING OF A WAVE FIELD PERTURBED BY LOCAL SOURCES IN VERTICALLY INHOMOGENEOUS HALF-SPACE AND CALCULATION OF SYNTHETIC SEISMOGRAMS

R.M. Pak

*Hetman Petro Sahaidachny Army Academy, 32 Heroes of Maidan Str., Lviv 79012, Ukraine, e-mail: rpak@email.ua*

**Purpose.** The aim of the article is to develop methods calculate seismic waves perturbed by local sources in a vertically inhomogeneous medium. For this purpose the following tasks are set: to implement mathematical modeling process of disturbance and propagation of seismic field in a horizontal layered isotropic elastic medium; to construct an algorithm and a program for numerical calculation of synthetic seismograms; to conduct computational experiments for verification.

**Design/methodology/approach.** The suggested methodology is based on the usage of Bessel-Mellin integrals, Thomson-Haskell matrix method and its modifications.

**Findings.** We developed analytical approach to modeling of waves in vertically inhomogeneous isotropic elastic environments. It permits to analyze the influence of changing environmental parameters and sources in the form of concentrated arbitrarily directed forces on synthetic seismograms. We created an algorithm and a program to calculate synthetic seismograms at a free surface medium.

**Practical value/implications.** The methodology presented here enables wave processes occurring in layered medium to be conducted both analytically and numerically. The calculation of synthetic seismograms and allocation of various types of waves in them enable a wave pattern recorded during seismic observations to be analyzed and accurately interpreted.

**Keywords:** mathematical modelling, seismic wave-field, matrix method, vertically heterogeneous medium, tensor of seismic moment, synthetic seismogram.

### References:

1. Aki K., Richards P. *Kolichestvennaya seysmologiya* [Quantitative Seismology]. Moscow, Mir, 1983, 519 p.
2. Molotkov L.A. *Matrichnyy metod v teorii rasprostraneniya voln v sloistykh, uprugikh i zhidkikh sredakh* [Matrix method in the theory of wave propagation in layered, elastic and liquid media]. Leningrad, Nauka, 1984, pp. 201.
3. Molotkov L.A. *O rasprostraneniі uprugikh voln v sredakh, soderzhashchikh tonkie ploskoparallel'nye sloi* [Propagation of elastic waves in media containing thin plane-parallel layers]. *V knize "Voprosy dinamicheskoy teorii rasprostraneniya seysmicheskikh voln"*. [In the book "Questions dynamic theory of seismic wave propagation"]. Leningrad, Publishing house of Leningrad University, 1961, no. 5, pp. 240-280.
4. Pak R.M. *Metodyka pidvyshchennia chyslovoi stiihosti dlia rozrakhunku khvylovoho polia na osnovi matrychnoho metodu Tomsona–Khaskela* [Method of increasing the numerical stability of the wave field calculation based on the matrix method of Thomson-Haskell]. *Geoinformatika*, 2014, no. 4, pp. 1-6.
5. Pak R.M. *Modeliuvannia khvylovoho polia, zbudzhenoho hlybnyim dzherelom u vertykalno-neodnorodnomu seredovyschi* [Modeling of wave-fields excited by deep source in a vertically-heterogeneous medium]. *Geophysical Journal*, 2005, vol. 27, no. 5, pp. 887-894.
6. Pak R.M. *Khvylove pole v odnorodnomu seredovyschi dlia dzherela u vyhliadi odynarnoi syly abo podviinoi pary syl* [Wave field calculation for rupture with displacement along inner surface]. *Geoinformatika*, 2004, no. 1, pp. 36-44.
7. Roganov Yu.V., Pak R.M. *Predstavlenie potentsiala ot tochechnykh istochnikov dlia odnorodnoy izotropnoy sredy v vide integralov Besselya–Mellina* [Representation of potentials of point sources for the homogeneous isotropic medium as Bessel-Mellin integrals]. *Geophysical Journal*, 2013, vol. 35, no. 2, pp. 163-167.
8. Abo-Zena A. Dispersion function computations for unlimited frequency values. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 1979, vol. 58, pp. 91-105.
9. Bouchon M.A. Review of the discrete wavenumber method. *Pure and Applied Geophysics*, 2003, vol. 160, pp. 445-465.
10. Chapman C.H. Yet another elastic plane-wave, layer-matrix algorithm. *Geophysical Journal International*, 2003, vol. 154, pp. 212-223.
11. Dunkin I.W. Computation of modal solution in layered elastic media at high frequencies. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1965, vol. 55, pp. 335-358.
12. Kennett B.L.N. *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*. Cambridge University Press, 1983, 342 p.

13. Knopoff L.A. Matrix method for elastic wave problems. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1964, vol. 54, pp. 431-438.
14. Müller G. The reflectivity method: a tutorial. *Journal Geophysical*, 1985, vol. 58, pp. 153-174.
15. Thresher E.N. The computation of the dispersion of elastic waves in layered media. *Journal of Sound and Vibration*, 1965, vol. 2, pp. 210-226.
16. Wang R. A simple orthonormalization method for stable and efficient computation of Green's functions. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1999, vol. 89, pp. 733-741.
17. Watson T.N. A note on fast computation of Rayleigh wave dispersion in the multilayered halfspace. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1970, vol. 60, pp. 161-166.

*Received 23/07/2015*