УДК 53.01:53.05+519.2

И.И. ГОРБАНЬ[*]

СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ – МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ ИЛИ ФИЗИЧЕСКИЙ ФЕНОМЕН?

[*]Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, г. Киев, Украина

Анотація. *Проаналізовано математичну та фізичну інтерпретації статистичної стійкості масових явищ. Проведено порівняльний аналіз математичної теорії ймовірностей, що трактує статистичну стійкість як прояв математичного закону великих чисел, і фізико-математичної теорії гіпервипадкових явищ, що розглядає статистичну стійкість як фізичний феномен. Акцентовано увагу на необхідності детального вивчення фізичних властивостей феномена статистичної стійкості та розвитку фізико-математичних і прикладних теорій, що враховують його особливості.*
Ключові слова: *статистична стійкість, порушення статистичної стійкості, теорія ймовірностей, теорія гіпервипадкових явищ.*

Аннотация. *Проанализированы математическая и физическая интерпретации статистической устойчивости массовых явлений. Проведен сравнительный анализ математической теории вероятностей, трактующей статистическую устойчивость как проявление математического закона больших чисел, и физико-математической теории гиперслучайных явлений, рассматривающей статистическую устойчивость как физический феномен. Акцентировано внимание на необходимости детального изучения физических свойств феномена статистической устойчивости и развития физико-математических и прикладных теорий, учитывающих его особенности.*
Ключевые слова: *статистическая устойчивость, нарушение статистической устойчивости, теория вероятностей, теория гиперслучайных явлений.*

Abstract. *Mathematical and physical interpretations of statistical stability of mass phenomena are analyzed. It is compared the features of the mathematical probability theory interpreting the statistical stability as a manifestation of the mathematical law of large numbers and the physical-mathematical theory of hyper-random phenomena considering the statistical stability as a physical phenomenon. Attention is focused on the necessity of a detailed study of the physical properties of the statistical stability phenomenon and the development of physical-mathematical and applied theories that take into account its features.*
Keywords: *statistical stability, violation of statistical stability, probability theory, theory of hyper-random phenomena.*

1. Введение

Статистическая устойчивость массовых явлений, проявляющаяся в стабильности относительных частот событий, выборочных средних и других функций выборок (статистик) при большом объеме данных, известна более 350 лет. Свыше 300 лет известен доказанный Я. Бернулли закон больших чисел. Начиная с тех давних времен и по сей день, ученые ведут спор по поводу того, является ли статистическая устойчивость математическим эффектом или физическим феноменом.

Математики, ссылаясь на математический закон больших чисел, в большинстве своем склоняются к мысли, что свойство статистической устойчивости – чисто математический эффект. Физики же и инженеры выдвигают свой весомый контраргумент, а именно: свойство статистической устойчивости наблюдается в реальной жизни, а потому это – физический феномен.

На первый взгляд, обсуждаемый вопрос представляет собой лишь теоретический интерес. Однако в действительности это не так. Ответ на него определяет стратегию развития ряда дисциплин, связанных со статистической устойчивостью.

Если статистическая устойчивость – лишь проявление математического закона больших чисел, то широко известная теория вероятностей, описывающая статистическую устойчивость, – математическая дисциплина (на чем обычно настаивают математики). Тогда для развития фундаментальной части этой теории и других теорий, связанных с ней, не требуется проведение каких-либо экспериментальных исследований реальных физических явлений (событий, величин, процессов и полей). Отдельные экспериментальные работы имеет смысл проводить лишь в интересах более эффективного использования некоторых положений фундаментальной части математической теории вероятностей для решения различных прикладных задач. Основное же внимание следует уделять развитию теории вероятностей как математической дисциплины.

Совершенно другая стратегия должна быть, если статистическая устойчивость – физический феномен. Тогда необходимо:

• в интересах выяснения характерных особенностей феномена статистической устойчивости разрабатывать методики проведения экспериментальных исследований его проявления в реальной жизни;

• проводить масштабные экспериментальные исследования свойств этого феномена;

• по результатам исследований разрабатывать физические и математические модели, учитывающие его специфические особенности;

• разрабатывать способы и методы эффективного математического описания феномена с учетом его особенностей;

• разрабатывать способы и методы решения различных прикладных задач с учетом особенностей этого феномена и т.д.

Перечисленные пункты фактически предполагают:

• формирование, как минимум, одной, а, возможно, и нескольких физико-математических теорий, ориентированной на всестороннее изучение феномена статистической устойчивости и разработку методов адекватного описания его особенностей;

• формирование ряда прикладных теорий, учитывающих особенности проявления феномена статистической устойчивости в различных предметных областях.

Целью статьи является сравнение математической и физической интерпретаций статистической устойчивости массовых явлений, а также сравнение математической теории вероятностей, трактующей статистическую устойчивость как проявление математического закона больших чисел, и физико-математической теории гиперслучайных явлений, рассматривающей статистическую устойчивость как физический феномен.

2. История вопроса

Считается, что на феномен статистической устойчивости впервые обратил внимание в 1662 г. торговец сукном Дж. Граунт. Сохранились отрывочные сведения об исследованиях статистической устойчивости, проводимые в период с конца XVII по конец XIX столетия Д. Венном, С.Д. Пуассоном, И.Ж. Бьенеме, О. Курно, А. Кетле, Я. Бернулли и др. [1, 2].

Систематические исследования статистической устойчивости начались в конце XIX века. Немецкий статистик В. Лексис в 1879 г. впервые попытался связать понятие статистической устойчивости частоты с дисперсией случайной величины. На рубеже столетий и в начале XX века исследованием статистической устойчивости занимались К. Пирсон, А.А. Чупров, В.И. Борткевич, А.А. Марков, Р. фон Мизес и др. [1, 2].

Исследование феномена статистической устойчивости привело к формированию теории вероятностей. До начала XX века эта теория рассматривалась как физическая дисциплина. Давид Гильберт, выступая на II Международном конгрессе математиков в 1900 г. с программным докладом «Математические проблемы» [3], в качестве шестой проблемы назвал «Математическое изложение аксиом физики». Часть доклада, касающуюся этой проблемы, он начал со слов: «С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика».

Судя по всему, Д. Гильберт воспринимал теорию вероятностей как раздел физики, объектом исследования которой является феномен статистической устойчивости.

На призыв Д. Гильберта откликнулись многие ученые. Различные подходы к решению проблемы аксиоматизации теории вероятностей предлагали Г. Больцман (1908), С.Н. Бернштейн (1917), Р. Мизес (1918), А. Ломницкий (1923) (на основе идей Э. Бореля), А.Н. Колмогоров (1929) и др. [2].

В настоящее время общепризнанным в области теории вероятностей считается аксиоматический подход А.Н. Колмогорова [4], основанный на концепциях теории множеств и теории меры. Этот подход, ставший классическим, возведен даже в ранг международного стандарта ISO [5].

В значительной мере под влиянием идей А.Н. Колмогорова произошло изменение понимания сути теории вероятностей: значительная часть ученых, в первую очередь математики, начали интерпретировать эту теорию как математическую дисциплину.

В этой связи интересен комментарий Б.В. Гнеденко к шестой проблеме Д. Гильберта [3]: «… для Гильберта теория вероятностей является главой физики, в которой математические методы играют выдающуюся роль. Сейчас эта точка зрения уже не имеет такого распространения, которым она пользовалась на рубеже двух столетий, поскольку с тех пор достаточно определенно выявилось собственно математическое содержание теории вероятностей. Теперь уже не вызывает сомнения то, что созданные в ней понятия и методы исследования, а также полученные результаты имеют общенаучное значение, далеко выходящее за пределы физики и даже всего естествознания».

Смещение акцента в сторону математики представляется вполне естественным, поскольку аксиоматический подход А.Н. Колмогорова не связан с физикой реального мира, в частности, с феноменом статистической устойчивости. В этом подходе физические понятия вообще не фигурируют.

Теория вероятностей А.Н. Колмогорова базируется на абстрактных математических понятиях: пространстве элементарных событий Ω, борелевской σ-алгебре $\Im$, вероятностной мере P, определяющих вероятностное пространство $(\Omega, \Im, P)$, и на четырех математических аксиомах:

1) для любого события $A \in \Im$ вероятность $P(A) \geq 0$;

2) вероятность $P(\Omega) = 1$;

3) для конечного числа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_N$ вероятность объединения событий равна сумме вероятностей;

4) для бесконечного числа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots$ вероятность объединения событий равна сумме вероятностей (аксиома счетной аддитивности).

При таком варианте аксиоматизации теория вероятностей оперирует не с реальными физическими объектами, а с их абстрактными математическими моделями – случайными событиями, величинами и функциями. Под случайным явлением (моделью) в данном случае понимается любое событие, величина или функция, характеризуемая вероятностной мерой. Явления, не имеющие вероятностной меры, случайными не считаются.

В качестве объекта исследования аксиоматизированной теории вероятностей А.Н. Колмогорова оказывается абстрактное вероятностное пространство, а в качестве предмета исследования – связи между абстрактными случайными моделями.

Безусловно, такая аксиоматизация теории вероятностей послужила мощным стимулом к интенсивному развитию теории вероятностей как математической дисциплины. Было получено большое количество чрезвычайно важных математических результатов, значение которых для теории и практики сложно переоценить. Многие из них нашли практическое применение.

Следует заметить, что далеко не все математики отошли от физической трактовки сущности статистической устойчивости. В подтверждение можно привести слова авторов всемирно известного фундаментального английского справочника по математике [6][1]: «Статистическое описание и вероятностные модели применимы к физическим процессам, проявляющим следующее эмпирическое свойство. Хотя результат одиночного измерения физической величины x не может быть предсказан с достаточно высокой точностью, значение некоторой подходящей функции $y = y(x_1, x_2, \ldots)$ от множества (выборки) результатов $x_1, x_2, \ldots$ повторных измерений x часто может быть предсказано с существенно лучшей точностью, и это значение y может быть полезным для принятия решений. Такая функция y множества выборочных значений называется статистикой, а свойство повышенной предсказуемости – статистической устойчивостью. Статистическая устойчивость в каждом конкретном случае является эмпирическим физическим законом, который, как и закон гравитации или закон индукции, вытекает из опыта, а не из математики. Часто точность предсказания статистики возрастает с повышением объема n выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (физические законы больших чисел). Наиболее известными статистиками являются статистические относительные частоты и выборочные средние».

Обратим внимание, что авторы этого справочника не просто подчеркивают физическую природу феномена статистической устойчивости и его важность для решения практических задач, а ставят его в ряд фундаментальных явлений природы, таких как феномен гравитации и феномен индукции. При этом они делают акцент на том, что этот феномен следует не из математики, а из опыта. Интересно, что приведенная цитата, чрезвычайно важная для понимания сущности статистической устойчивости, почему-то отсутствует в русских переводах справочника, изданных в разные годы.

Отдавая должное огромной положительной роли, которую сыграла и продолжает играть аксиоматизация А.Н. Колмогоровым теории вероятностей, надо признать, что широкое распространение в математической среде игнорирования физических основ теории вероятностей фактически прервало на десятилетия систематическое изучение физических свойств феномена статистической устойчивости.

Необходимость в проведении серьезных исследований этого феномена стало очевидной на рубеже 70-х – 80-х годов прошлого столетия в связи с обнаружением несоответствия некоторых положений теории вероятностей экспериментальным данным. В частности, это касается потенциальной точности измерений. Согласно теории вероятностей, при увеличении объема обрабатываемых данных случайная погрешность измерения физических величин стремится к нулю (оценки Крамера – Рао) [7, 8]. Но реальная точность измерений всегда ограничена. Преодолеть существующий предел точности путем статистической обработки данных оказывается невозможным.

---

[1] В оригинале эта фраза звучит следующим образом: “Statistical description and probability models apply to physical processes exhibiting the following empirical phenomenon. Even though individual measurements of a physical quantity x cannot be predicted with sufficient accuracy, a suitably determined function $y = y(x_1, x_2, \ldots)$ of a set (sample) of repeated measurements $x_1, x_2, \ldots$ of x can often be predicted with substantially better accuracy, and the prediction of y may still yield useful decisions. Such a function y of a set of sample values is called a statistic, and the incidence of increased predictability is known as statistical regularity. Statistical regularity, in each individual situation, is an empirical physical law which, like the law of gravity or the induction law, is ultimately derived from experience and not from mathematics. Frequently a statistic can be predicted within creasing accuracy as the size n of the sample $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ increases (physical laws of large numbers). The best-known statistics are statistical relative frequencies and sample averages”.

Выяснение причин расхождения между теорией и практикой привело к пониманию, что проблема связана с необоснованной идеализацией феномена статистической устойчивости.

Теория вероятностей базируется на физической гипотезе идеальной статистической устойчивости, предполагающей наличие сходимости статистик при теоретически неограниченном увеличении объема данных (Гипотеза 1). В частности, предполагается наличие сходимости относительных частот массовых событий к постоянным величинам, интерпретируемым как вероятности этих событий, и сходимости выборочных средних физических величин к константам, рассматриваемым как математические ожидания этих величин.

С.Н. Бернштейн так сформулировал эту гипотезу [9]: «Основное допущение теории вероятностей (постулат существования математической вероятности) состоит в том, что существуют такие комплексы условий β, которые (теоретически, по крайней мере) могут быть реализованы неограниченное число раз, при наличии которых в данном опыте наступление факта A имеет определенную вероятность, выражающуюся математическим числом».

Для корректного применения теории вероятностей на практике требуется принятие еще одной физической гипотезы – гипотезы адекватного описания реальных физических явлений случайными моделями (Гипотеза 2).

Принятие этих двух гипотез адекватности превращает математическую теорию вероятностей А.Н. Колмогорова в физико-математическую теорию [10, 11].

Для выяснения правдоподобности предположения о сходимости реальных статистик была разработана методика исследования нарушений статистической устойчивости и измерения интервала статистической устойчивости – интервала, на котором нарушения статистической устойчивости пренебрежимо малы. С ее помощью проведено множество экспериментальных исследований при больших объемах выборки. Анализировались, в частности, колебания напряжения электросети, курса валют, высоты и периода следования морских волн, температуры и скорости звука в океане, интенсивности излучения различных астрофизических объектов, температуры воздуха, скорости ветра, магнитного поля Земли, количества осадков и др. [10–13].

Исследование разнообразных реальных процессов на больших интервалах наблюдения показали, что гипотеза идеальной статистической устойчивости статистик не находит экспериментального подтверждения [10, 11, 14–16]. Судя по результатам многочисленных экспериментальных исследований, в реальной жизни имеет место ограниченная статистическая устойчивость.

Во всех экспериментах при относительно небольших объемах выборки увеличение количества отсчетов приводило к уменьшению флуктуации статистик, но при больших объемах выборки эта тенденция не наблюдалась. Достигнув определенного значения, уровень флуктуации практически не изменялся или начинал расти.

Потеря статистической устойчивости при больших объемах выборки для физических процессов, имеющих разную физическую природу, свидетельствует о фундаментальном характере этого явления.

В интересах изучения физических свойств феномена статистической устойчивости и описания массовых физических явлений с учетом нарушения сходимости статистик на рубеже текущего столетия начала формироваться физико-математическая теория гиперслучайных явлений [10–17].

3. Теория гиперслучайных явлений

Первоначально теория вероятностей создавалась в интересах описания феномена статистической устойчивости и рассматривалась как физическая дисциплина. В результате аксиоматизации она превратилась в математическую теорию, для которой вопросы исследования физических свойств феномена статистической устойчивости оказались вне сферы ее интересов.

Основная задача теории гиперслучайных явлений – восполнить имеющиеся пробелы в изучении феномена статистической устойчивости. В отличие от математической теории вероятностей А.Н. Колмогорова теория гиперслучайных явлений – физико-математическая дисциплина, объектом исследования которой является феномен статистической устойчивости, а предметом исследования – способы его описания гиперслучайными моделями.

Под гиперслучайным явлением (моделью – событием, величиной, функцией) подразумевается множество случайных явлений (случайных событий, величин, функций), зависящих от условий g. Для каждого g-го случайного явления определена вероятностная мера, но для условий g мера не определена.

Введение нового понятия – «гиперслучайное явление» – вызвано, с одной стороны, установлением факта нарушения сходимости реальных статистик, а, с другой, – выяснением возможности адекватного описания реальных физических явлений совокупностью случайных событий, величин и функций.

Центральное место в новой теории занимают исследования физических свойств феномена статистической устойчивости при больших объемах выборки, оценка интервалов статистической устойчивости, за пределами которых использование классических вероятностных моделей оказывается проблематичным, и разработка эффективных методов описания этого феномена вне интервалов статистической устойчивости.

Как любая физико-математическая теория, теория гиперслучайных явлений имеет физическую и математическую составляющие.

Математическая часть этой теории опирается на аксиоматику теории вероятностей А.Н. Колмогорова. Базовое понятие – гиперслучайное событие – задается с помощью множества вероятностных пространств, представляемого тетрадой $(\Omega, \Im, G, P_g)$, где Ω – пространство элементарных событий, $\Im$ – борелевская σ-алгебра, P_g – вероятностная мера в условиях $g \in G$.

Объектом исследования математической части теории гиперслучайных явлений является множество вероятностных пространств, а предметом исследования – связи между гиперслучайными моделями.

В теории гиперслучайных явлений для описания реальных массовых физических явлений с учетом нарушений статистической устойчивости принимаются две физические гипотезы:

• Гипотеза 1’ – гипотеза ограниченной статистической устойчивости, предполагающая отсутствие сходимости статистик;

• Гипотеза 2’ – гипотеза адекватного описания реальных физических явлений гиперслучайными моделями.

Поскольку в математической части теории гиперслучайных явлений сохранена аксиоматическая база математической теории вероятностей А.Н. Колмогорова, с математической точки зрения теория гиперслучайных явлений – ветвь математической теории вероятностей. Однако, поскольку физическая часть теории гиперслучайных явлений использует физические гипотезы, отличные от принимаемых в теории вероятностей, с физической точки зрения теория гиперслучайных явлений – новая физико-математическая теория.

В рамках теории гиперслучайных явлений:

• разработана методика исследования нарушений статистической устойчивости реальных физических процессов;

• методика измерения интервалов статистической устойчивости по отношению к среднему и среднеквадратическому отклонению;

• исследовано множество разнообразных процессов на предмет нарушения статистической устойчивости и получены оценки интервалов их статистической устойчивости по отношению к среднему и среднеквадратическому отклонению;

• разработаны различные варианты описания гиперслучайных событий, скалярных и векторных величин, скалярных и векторных функций;

• установлено, что свойства стационарности и эргодичности присущи в обобщенном смысле некоторым гиперслучайным процессам;

• исследованы гиперслучайные процессы, обладающие марковскими свойствами;

• разработаны основы математической статистики гиперслучайных явлений;

• известные варианты сходимости случайных последовательностей и функций обобщены на гиперслучайные последовательности и функции;

• заложены основы математического анализа расходящихся и многозначных функций;

• для расходящихся последовательностей сформулированы и доказаны обобщенный закон больших чисел и обобщенная центральная предельная теорема;

• установлено, что погрешность измерения физических величин не сводится лишь к систематической и случайной составляющим;

• выяснены причины ограниченной точности измерения реальных физических величин.

Области целесообразного применения теории гиперслучайных явлений охватывают широкий круг теоретических и прикладных задач, в которых проявляется нарушение сходимости. Первоочередная область использования этой теории связана со статистической обработкой различных физических процессов большой длительности высокоточными измерениями и прогнозированием развития событий на основе статистической обработки больших массивов данных, моделированием и исследованием сложных систем.

Результаты проведенных исследований изложены в ряде научных статей и обобщены в монографиях [10–12, 14–15, 17].

4. Выводы

1. Акцентировано внимание на том, что интерпретация понятия статистической устойчивости определяет стратегию перспективного развития ряда дисциплин. Если статистическая устойчивость – лишь проявление математического закона больших чисел, то широко известная теория вероятностей, описывающая статистическую устойчивость, – математическая дисциплина. Тогда для развития фундаментальной части этой теории и других теорий, связанных с ней, не требуется проведение каких-либо экспериментальных исследований реальных физических явлений (событий, величин, процессов и полей) и основное внимание следует уделять развитию теории вероятностей как математической дисциплины. Если же статистическая устойчивость – физический феномен, то для его изучения необходимо проведение экспериментальных и теоретических исследований, типичных для физических феноменов.
2. Среди многих ученых, в первую очередь математиков, широко распространено мнение, что статистическая устойчивость – проявление математического закона больших чисел, а описывающая ее теория вероятностей – математическая дисциплина. Такое понимание статистической устойчивости и теории вероятностей в значительной мере сложилось в результате всеобщего признания и распространения математического подхода к аксиоматизации теории вероятностей, предложенного в конце 20-х годов прошлого столетия А.Н. Колмогоровым. Теория вероятностей А.Н. Колмогорова оперирует не с реальными физическими объектами, а с их абстрактными математическими моделями – случайными событиями, величинами и функциями. В качестве объекта исследования этой теории вы-

ступает абстрактное вероятностное пространство, а в качестве предмета исследования – связи между абстрактными случайными моделями.

3. Физики и инженеры, как правило, воспринимают статистическую устойчивость как физический феномен. С ними согласны и некоторые известные математики. Среди них – Г. Корн и Т. Корн, авторы всемирно известного фундаментального английского справочника по математике. Представляя статистическую устойчивость, авторы этого справочника характеризуют ее следующим образом: «Статистическая устойчивость в каждом конкретном случае является эмпирическим физическим законом, который, как и закон гравитации или закон индукции, вытекает из опыта, а не из математики». Приведенная цитата, чрезвычайно важная для понимания сущности статистической устойчивости, почему-то отсутствует в русских переводах справочника, изданных в разные годы.

4. Корректное использование на практике теории вероятностей обеспечивается принятием двух физических гипотез, устанавливающих связь между абстрактной теорией вероятностей А.Н. Колмогорова и реальным физическим миром: гипотезы идеальной статистической устойчивости, предполагающей наличие сходимости статистик при теоретически неограниченном увеличении объема данных и гипотезы адекватного описания реальных физических явлений случайными моделями.

5. Отдавая должное огромной положительной роли, которую сыграла и продолжает играть аксиоматизация А.Н. Колмогоровым теории вероятностей, надо признать, что широкое распространение в математической среде игнорирования физических основ теории вероятностей фактически прервало на десятилетия систематическое изучение физических свойств феномена статистической устойчивости. Необходимость в проведении серьезных исследований этого феномена стала очевидной на рубеже 70-х–80-х годов прошлого столетия в связи с обнаружением несоответствия некоторых положений теории вероятностей экспериментальным данным. Выяснение причин расхождения между теорией и практикой привело к пониманию, что проблема связана с необоснованной идеализацией феномена статистической устойчивости. Исследование реальных процессов разной физической природы на больших интервалах наблюдения показало, что гипотеза идеальной статистической устойчивости статистик не находит экспериментального подтверждения. Судя по результатам многочисленных экспериментальных исследований, в реальной жизни имеет место ограниченная статистическая устойчивость, означающая отсутствие сходимости статистик.

6. Исследование физических свойств феномена статистической устойчивости и разработка эффективных методов описания массовых физических явлений с учетом нарушения сходимости статистик привело к формированию новой физико-математической теории гиперслучайных явлений, объектом исследования которой является феномен статистической устойчивости, а предметом исследования – способы его представления гиперслучайными моделями. Эта теория базируется на системе аксиом А.Н. Колмогорова и двух физических гипотезах – гипотезе ограниченной статистической устойчивости и гипотезе адекватного описания реальных физических явлений гиперслучайными моделями. С математической точки зрения теории гиперслучайных явлений – ветвь математической теории вероятностей, а с физической – новая физико-математическая теория.

7. Проведенные исследования указывают на необходимость тщательного изучения физических свойств феномена статистической устойчивости и развития физико-математических и прикладных теорий, учитывающих его особенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шейнин О.Б. Теория вероятностей. Исторический очерк [Электронный ресурс] / Шейнин О.Б. – Режим доступа: http://www.sheynin.de.

2. Чайковский Ю.В. О природе случайности / Чайковский Ю.В. – М.: Центр системных исследований. Институт истории естествознания и техники РАН, 2004. – 280 с.
3. Проблемы Гильберта / Под общ. ред. П.С. Александрова. – М.: Наука, 1969. – 238 с.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: ОНТИ, 1936. – 175 с.; 1974. – 119 с.
5. International standard ISO 3534-1:2006 (E/F). Statistics. Vocabulary and symbols. Part I: General statistical terms and terms used in probability. – 2006. – 105 p.
6. Korn G.A. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review / G.A. Korn, T.M. Korn. – Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2000. – 1130 p.
7. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции / Ван Трис Г. – М.: Советское радио, 1972. – Т. 1. – 743 с.
8. Горбань І.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів / Горбань І.І. – К.: ІПММС НАН України, 2003. – 245 с.
9. Бернштей С.Н. Теория вероятностей / Бернштей С.Н. – М.: Государственное издательство, 1927. – 363 с.
10. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2014. – 444 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/Pubications/9_.pdf.
11. Gorban I.I. The Statistical Stability Phenomenon / Gorban I.I. – Springer, 2017. – 361 p.
12. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/ perspages/gorban_i_i/Pubications/8.pdf.
13. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости / И.И. Горбань // Журнал технической физики. – 2014. – Т. 84, № 3. – С. 22 – 30.
14. Горбань И.И. Случайность и гиперслучайность [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2016. – 287 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/Pubications/11_.pdf.
15. Gorban I.I. Randomness and Hyper-randomness / Gorban I.I. – Springer, 2017. – 253 p.
16. Gorban I.I. The physical-mathematical theory of hyper-random Phenomena / I.I. Gorban // Computer Science Journal of Moldova. – 2017. – Vol. 25, N 2 (74). – P. 145 – 193.
17. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений / Горбань И.И. – К.: ИПММС НАН Украины, 2007. – 184 с.

Стаття надійшла до редакції 22.08.2017