УДК 519.21

П.П. ГОРУН, Я.М. ЧАБАНЮК

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПРОЦЕДУРЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В СХЕМЕ УСРЕДНЕНИЯ

Аннотация. Исследовано асимптотическое поведение модифицированной дискретной процедуры стохастической оптимизации (ПСО) в марковской среде в схеме усреднения. Введены дополнительные параметры оптимизации ПСО, с помощью которых исследовано поведение флуктуаций на растущих временных интервалах. Установлено вид предельного генератора в зависимости от выбранного нормирования, а также показано, что при некоторых значениях введенных параметров модифицированная дискретная ПСО асимптотически нормальна.

Ключевые слова: марковский процесс, стохастическая оптимизация, асимптотическое поведение, схема усреднения.

Исследование поведения флуктуаций процедуры стохастической оптимизации (ПСО) определяет оценку скорости ее сходимости к точке экстремума усредненной эволюционной системы. Такая проблема возникает при использовании алгоритма фазового усреднения случайных эволюций [1], который базируется на близости исходной и усредненной эволюционных систем [2]. Так, в работе [3] исследовано поведение флуктуаций диффузионной эволюционной системы с марковскими прыжками (процедура стохастичной аппроксимации), где функция скорости имеет сингулярно возбужденное слагаемое с малым параметром серий.

Асимптотическое поведение процедуры стохастической оптимизации исследовалось методом моментов, подробно описанным в работах [4, 5], а для более общих случаев получены другие предельные распределения [6–8].

В работе [9] рассмотрено несколько рандомизированных алгоритмов стохастической оптимизации при почти случайных помехах, где на вход подаются пробные возмущения. Два из них — рандомизированные версии процедуры Кифера–Вольфовица (каждая требует двух вычислений неизвестной функции на каждом шаге итерации). В статье приведен краткий обзор работ Кушнера Г. и Кларка Д., Поляка Б.Т. и Цыбакова А.Б., Спала Дж., Чена Х.-Ф. и др. Каждый автор рассматривал при разных условиях приведенные выше процедуры, которые дополняли одна другую.

Поскольку асимптотический анализ класической ПСО был сделан авторами в [10], с учетом вышеизложенного и в целях сравнения асимптотического поведения классической и модифицированной процедур в данной статье проведен асимптотический анализ модифицированной процедуры, описанной в [9, процедура (2)].

Для простоты изложения рассматривается одномерный случай функции регрессии, однако полученные результаты аналогично переносятся на многомерный случай.

Псевдоградиент, а также ПСО для функции регрессии $C(u; x) \in C^3(\mathbb{R})$, $x \in X$, рассматриваются в модифицированном представлении

$$\nabla_b C(u; x) = \frac{C(u+b; x) - C(u; x)}{b}, \quad u = u(t),\ b = b(t)\,. \tag{1}$$

Прыжковая ПСО в схеме серий в марковской среде задается соотношением (пусть $\sum_{n=0}^{-1} a_n^\varepsilon \nabla_b C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) = 0$) [11], $\nu(t)$— счетчик прыжков до момента t.

$$u(t) = u + \sum_{n=0}^{\nu(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon \nabla_b C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon), \; u^\varepsilon(0) = u, \; t \ge 0, \tag{2}$$

где γ — показатель нормирования времени, a_n^ε — некоторая нормирующая последовательность.

Сходимость прыжковой ПСО (2) в условиях теоремы о достаточных условиях ее сходимости (см. [12])

$$u^\varepsilon(t) \to u^*, \; t \to \infty, \varepsilon \le \varepsilon_0 \tag{3}$$

означает, что выполняется равенство

$$C'(u^*) = 0, \tag{4}$$

где u^* (не уменьшая общности, будем считать, что $u^* = 0$) есть точка равновесия системы

$$\frac{du(t)}{dt} = C'(u(t)), \; C(u) = q \int_X \rho(dx) C(u; x). \tag{5}$$

Равенства (4), (5) дают условие баланса:

$$\Pi C'(0; x) = 0, \tag{6}$$

где Π — проектор, полученный стационарным распределением вложенной цепи Маркова $x_n, n \ge 0$, т.е. $\Pi \varphi(x) = \int_X \rho(dx) \varphi(x)$. При этом (3) означает, что флуктуации прыжковой ПСО целесообразно изучать со следующим нормированием:

$$v^\varepsilon(t) = \frac{t^\gamma}{\varepsilon} u^\varepsilon(t), \; u^\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{t^\gamma} v^\varepsilon(t). \tag{7}$$

В ПСО (2) имеют место вложения

$$u_n^\varepsilon = u(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \tau_n / \varepsilon^{1/\gamma}, n \ge 0,$$

где τ_n — моменты марковского восстановления.

Рассмотрим функции

$$a_n = \frac{a}{n^\alpha}, a > 0, \; b_n = \frac{b}{n^\beta}, b > 0,$$

где α, β удовлетворяют условиям сходимости ПСО (2) (см. [12]):

1) $C'(u) V'(u) \le -k_0 V(u)$;

2) имеют место оценки

$$\max_{x \in X} |(\nabla_b C(u; x))^2 V''(u)| \le k_1 (1 + V(u));$$

$$\max_{x \in X} |\nabla_b C(u; x) [q(x) R_0 - I] \nabla_b \widetilde{C}(u; x) V''(u)| \le k_2 (1 + V(u)),$$

$$\max_{x \in X} |(\nabla_b C(u; x))^2 [q(x) R_0 - I] \nabla_b \widetilde{C}(u; x) V'''(u)| \le k_3 (1 + V(u)),$$

где $\widetilde{C}(u; x) = q(x) C(u; x) - C(u)$;

3) условие ограничения роста функции Ляпунова и условие Липшица для $\nabla_b C(u)$ соответственно

$$\| V'(u) \| \le k_4 (1+V(u)) ; \quad \max_{x\in R^d} \| \nabla_b C(u) - C'(u) \| \le k_5 b_n ; \quad k_i > 0,\ i = \overline{0,\ 5} ;$$

4) последовательности a_n, b_n невозрастающие, положительные и удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n < \infty,$$

где $V(u)$ — функция Ляпунова усредненной системы (5).

Рассмотрим также двухкомпонентный марковский процесс (МП):

$$v^{\varepsilon}(t),\ x_t^{\varepsilon} = x(t/\varepsilon^{1/\gamma}),\ t \ge 0 . \tag{8}$$

Лемма 1 [13]. Генератор МП (8) на тест-функциях $\varphi(v;\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ имеет представление

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon} \varphi(v;x) = \varepsilon^{-1/\gamma} Q\varphi(v;x) + \varepsilon^{-1/\gamma} \mathbf{C}_t^{\varepsilon}(x) \varphi(v;x) , \tag{9}$$

где

$$\mathbf{C}_t^{\varepsilon}(x)\varphi(v;x) =$$

$$= q(x)\, \mathbf{P} [\varphi(v + \varepsilon^{\alpha/\gamma - 1} t^{\gamma-\alpha} a \nabla_b C(\frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} v; x); y) - \varphi(v; y)] + \varepsilon^{1/\gamma} \frac{\gamma}{t} v \varphi'(v;x) , \tag{10}$$

$$\mathbf{P}\varphi(\cdot; y) = \int_X P(y, dz)\, \varphi(\cdot; z) .$$

Доказательство. Доказательство леммы базируется на определении генератора МП через условное математическое ожидание (например, [14, гл. 3, 5]). ◻

Для удобства введем вспомогательную функцию-индикатор

$$I(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ 1, & y = 0, \quad y \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

Поскольку рассматривается обобщенный случай асимптотического поведения ПСО (2), вначале получим вспомогательные сведения, а затем, зафиксировав значения коэффициентов α, β, γ , перейдем к формулировке леммы и соответствующих теорем о представлении вида генератора на тест-функциях $\varphi(v;\cdot)$.

Используя (1), разложим функцию $\nabla_b C(\frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} v; x)$ в окрестности точки экстремума u^*:

$$\nabla_b C\left(\frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} v; x \right) = C'(0;x) + \left(\frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} v + \frac{\varepsilon^{\beta/\gamma}}{2t^{\beta}} b \right) C''(0;x) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^2}{t^{2\gamma}} v^2 + \frac{\varepsilon^{\frac{\beta}{\gamma}+1}}{2t^{\gamma+\beta}} vb + \frac{\varepsilon^{\frac{2\beta}{\gamma}}}{3t^{2\beta}} b^2 \right) C'''(0;x) + o\left(\frac{\varepsilon^{1+\frac{\beta}{\gamma}}}{t^{\gamma+\beta}} v \right), \tag{11}$$

где $v = v(t),\ b = \mathrm{const}$.

Для удобства и сокращения записей положим $C' = C'(0;x)$, $C'' = C''(0;x)$, $C''' = C'''(0;x)$, $\varphi' = \varphi'(v;x)$, $\varphi'' = \varphi''(v;x)$. Подставив (11) в (10), получим

$$\varepsilon^{-1/\gamma}\mathbf{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(v;x)=\frac{\gamma}{t}v\varphi'+$$

$$+\frac{\varepsilon^{\frac{\alpha-1}{\gamma}-1}}{t^{\alpha-\gamma}}a\left[C'+\left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma}v+\frac{\varepsilon^{\frac{\beta}{\gamma}}}{2t^\beta}b\right)C''+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^2}{t^{2\gamma}}v^2+\frac{\varepsilon^{\frac{\beta}{\gamma}+1}}{2t^{\gamma+\beta}}vb+\frac{\varepsilon^{\frac{2\beta}{\gamma}}}{3t^{2\beta}}b^2\right)C'''\right]Q_0\varphi'+$$

$$+\frac{\varepsilon^{\frac{2\alpha-1}{\gamma}-2}}{t^{2\alpha-2\gamma}}\frac{a^2}{2}\left[(C')^2+2\left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma}v+\frac{\varepsilon^{\frac{\beta}{\gamma}}}{2t^\beta}b\right)C'C''+\right.$$

$$+\left(\frac{\varepsilon^2}{t^{2\gamma}}v^2+\frac{\varepsilon^{\frac{\beta}{\gamma}+1}}{2t^{\gamma+\alpha}}vb+\frac{\varepsilon^{\frac{2\beta}{\gamma}}}{3t^{2\beta}}b^2\right)C'C'''+\left(\frac{\varepsilon^2}{t^{2\gamma}}v^2+\frac{\varepsilon^{\frac{\beta}{\gamma}+1}}{t^{\gamma+\beta}}vb+\frac{\varepsilon^{\frac{2\beta}{\gamma}}}{4t^{2\beta}}b^2\right)(C'')^2+$$

$$+\left(\frac{\varepsilon^3}{t^{3\gamma}}v^3+\frac{\varepsilon^{\frac{\beta}{\gamma}+2}}{t^{2\gamma+\beta}}v^2b+\frac{7}{12}\frac{\varepsilon^{\frac{2\beta}{\gamma}+1}}{t^{\gamma+2\beta}}vb^2+\frac{\varepsilon^{\frac{3\beta}{\gamma}}}{6t^{3\beta}}b^3\right)C''C'''+$$

$$\left.+\left(\frac{\varepsilon^4}{t^{4\gamma}}v^4+\frac{\varepsilon^{\frac{\beta}{\gamma}+3}}{t^{3\gamma+\beta}}v^3b+\frac{11}{12}\frac{\varepsilon^{\frac{2\beta}{\gamma}+2}}{t^{2(\gamma+\beta)}}v^2b^2+\frac{1}{3}\frac{\varepsilon^{\frac{3\beta}{\gamma}+1}}{t^{\gamma+3\beta}}vb^3+\frac{1}{9}\frac{\varepsilon^{\frac{4\beta}{\gamma}}}{t^{4\beta}}b^4\right)(C''')^2\right]Q_0\varphi''+$$

$$+o\left(\frac{\varepsilon^{\frac{3\alpha-1}{\gamma}-3}}{t^{3\alpha-3\gamma}}\right). \tag{12}$$

Исходя из анализа (12) и условий сходимости ПСО (2) с учетом данного вида псевдоградиента (1) асимптотическое поведение рассматриваемой ПСО целесообразно изучать при следующих соотношениях коэффициентов α,β,γ:

$$\alpha=1,\ \beta<\gamma/2; \tag{13}$$

$$\alpha=1,\ \beta=\gamma/2; \tag{14}$$

$$\alpha=1,\ \beta\in(\gamma/2;\gamma). \tag{15}$$

При $\alpha<1$ данная процедура не будет асимптотически нормальной (см. исследования в [10]).

Случай 1. Рассмотрим соотношение (13), когда $\alpha=1,\ \beta<\gamma/2$.

Лемма 2. Генератор (9) при условии (13) на тест-функциях $\varphi(v;\cdot)\in C^3(\mathbb{R})$ имеет асимптотическое представление

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(v;x)=\left[\varepsilon^{-1/\gamma}Q+\frac{\varepsilon^{-1}}{t^{1-\gamma}}Q_1(x)+\frac{\varepsilon^{\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+\beta}}Q_2(x)+\right. \tag{16}$$

$$+\frac{\varepsilon^{2\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+2\beta}}Q_3(x)+\frac{1}{t}Q_4(x)\varphi(v;x)+\frac{\varepsilon^{2/\gamma-3}}{t^{3-3\gamma}}\theta_t^\varepsilon(x)\Bigg]\varphi(v;x),$$

где

$$Q_1(x)\varphi(v;x)=aC'(0;x)Q_0\varphi'(v;x); \tag{17}$$

$$Q_2(x)\varphi(v;x)=\frac{ab}{2}C''(0;x)Q_0\varphi'(v;x); \tag{18}$$

$$Q_3(x)\varphi(v;x)=\frac{ab^2}{6}C'''(0;x)Q_0\varphi'(v;x); \tag{19}$$

$$Q_4(x)\,\varphi(v;x)=vb(x)\,\varphi'(v;x)+I\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\frac{a^2}{2}(C'(0;x))^2Q_0\varphi''(v;x); \tag{20}$$

$$b(x)=aC''(0;x)Q_0+\gamma, \tag{21}$$

при этом остаточный член $\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v;x)$ ограничен.

Доказательство. Положив в (12) $\alpha=1, \beta<\gamma/2$, получим (16) в обозначениях (17)–(21). Ограниченность остаточного члена следует из (12) и ограниченности первой, второй и третьей производных функции регрессии. □

Проблема сингулярного возмущения (ПСВ) для оператора (16) реализуется на возмущенных функциях вида

$$\varphi^\varepsilon(v;x)=\varphi(v)+\frac{\varepsilon^{1/\gamma-1}}{t^{1-\gamma}}\varphi_2(v;x)+\frac{\varepsilon^{(1+\beta)/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+\beta}}\varphi_3(v;x)+$$

$$+\frac{\varepsilon^{(1+2\beta)/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+2\beta}}\varphi_4(v;x)+\frac{\varepsilon^{1/\gamma}}{t}\varphi_5(v;x). \tag{22}$$

Лемма 3. Решение ПСВ для оператора (16) на тест-функциях (22) таких, что $\varphi(v;\cdot)\in C^3(\mathbb{R})$, имеет вид

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi^\varepsilon(v;x)=\frac{1}{t}\mathbf{L}\varphi(v)+\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v), \tag{23}$$

где оператор $\mathbf{L}$ действует по правилу

$$L\varphi(v;x)=-kv\varphi'(v;x)+I\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\frac{a^2\rho^2}{2}\varphi''(v;x), \tag{24}$$

где

$$k=ad-\gamma; \tag{25}$$

$$d=-q\int_X\rho(dx)C''(0;x); \tag{26}$$

$$\rho^2=2\int_X\pi(dx)q(x)C'(0;x)R_0q(x)C'(0;x)-q\int_X\rho(dx)(C'(0;x))^2, \tag{27}$$

при этом остаточный член $\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v)$ такой, что $\|\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v)\|\to 0$, $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. Поскольку остаточный член в представлении (16) не влияет на решение ПСВ [2, разд. 3.1], [1], рассмотрим решение ПСВ только для срезанного по отношению к (16) оператора:

$$\mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon}\varphi(v;x)=\varepsilon^{-1/\gamma}Q+\frac{\varepsilon^{-1}}{t^{1-\gamma}}Q_1(x)+\frac{\varepsilon^{\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+\beta}}Q_2(x)+\frac{\varepsilon^{2\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+2\beta}}Q_3(x)+\frac{1}{t}Q_4(x)\varphi(v;x).$$

Оператор $\mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon}$ на функциях (22) имеет представление

$$\mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(v;x)=\varepsilon^{-1/\gamma}Q\varphi(v)+\frac{\varepsilon^{-1}}{t^{1-\gamma}}[Q\varphi_2(v;x)+Q_1(x)\varphi(v)]+$$
$$+\frac{\varepsilon^{\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+\beta}}[Q\varphi_3(v;x)+Q_2(x)\varphi(v)]+\frac{\varepsilon^{2\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+2\beta}}[Q\varphi_4(v;x)+Q_3(x)\varphi(v)]+$$
$$+\frac{1}{t}\left[Q\varphi_5(v;x)+Q_4(x)\varphi(v)+I\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)Q_1(x)\varphi_2(v;x)\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon^{(1+\beta)/\gamma-2}}{t^{2-2\gamma+\beta}}\theta_t^{\varepsilon}(x)\varphi(v), \tag{28}$$

где $\theta_t^{\varepsilon}(x)\varphi(v)$ ограничен.

Условия разрешимости (см. [2, разд. 3.1]) для (28) имеет вид

$$Q\varphi_2(v;x)+Q_1(x)\varphi(v)=0.$$

Если учитывать условие баланса (6), то, используя оператор $\mathbf{R}_0$, из последнего равенства находим

$$\varphi_2(v;x)=\mathbf{R}_0Q_1(x)\varphi(v)=a\mathbf{R}_0C'(0;x)Q_0\varphi'(v). \tag{29}$$

Из условия $Q\varphi_3(v;x)+Q_2(x)\varphi(v)=0$ находим

$$\varphi_3(v;x)=\mathbf{R}_0Q_2(x)\varphi(v)=\frac{ab}{2}\mathbf{R}_0C''(0;x)Q_0\varphi'(v). \tag{30}$$

Аналогично из условия $Q\varphi_4(v;x)+Q_3(x)\varphi(v)=0$ находим

$$\varphi_4(v;x)=\mathbf{R}_0Q_3(x)\varphi(v)=\frac{ab^2}{6}\mathbf{R}_0C'''(0;x)Q_0\varphi'(v).$$

Из условия разрешимости (28) имеем

$$Q\varphi_5(v;x)+Q_4(x)\varphi(v)+I\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)Q_1(x)\varphi_2(v;x)=\mathbf{L}\varphi(v),$$

где оператор $\mathbf{L}$ определяется соотношениями

$$\mathbf{L}\Pi\varphi(v)=\Pi\mathbf{L}(x)\Pi\varphi(v),\ \mathbf{L}(x)\varphi(v)=Q_4(x)\varphi(v)+I\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)Q_1(x)\varphi_2(v;x). \tag{31}$$

Вычислим теперь правую часть (31). Для этого используем полученные представления (29), (30):

$$\mathbf{L}\Pi\varphi(v)=v\left(aq\int_X\rho(dx)C''(0;x)+\gamma\right)\varphi'(v)+$$
$$+I\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)a^2\left(\int_X\pi(dx)C'(0;x)R_0q(x)C'(0;x)-\frac{1}{2}q\int_X\rho(dx)(C'(0;x))^2\right)\varphi''(v)$$

или, используя обозначения (24)–(27), получаем (23).

Вычисление остаточного члена $\theta_t^{\varepsilon}(x)$ описано в [15]. □

Асимптотическая нормальность нормированной ПСО (7) устанавливается при дополнительных условиях

A1: $d > 0$; A2: $k > 0$; A3: $\rho^2 > 0$,

где d, k, ρ^2 даны в (25)–(27).

Условие A1 обеспечивает выполнение условия A2, откуда следует эргодичность предельного процесса $\zeta(t)$, $t \geq 0$, а условие A3 обеспечивает диффузионность процесса $\zeta(t)$, $t \geq 0$.

Теорема 1 [10]. Пусть выполнены условия сходимости 1)–4) ПСО (2), а также дополнительные условия A1–A3. Тогда имеет место слабая сходимость процессов

$$v^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \zeta(t), \quad \varepsilon \to 0,$$

в каждом конечном интервале $0 < t_0 \leq t \leq T$. Предельный диффузионный процесс $\zeta(t), t \geq 0$, является процессом типа Орнштейна–Улэнбека [16, т. 2, гл. III, §8д; гл. X §4б] и определяется генератором

$$\mathbf{L}\varphi(v) = -kv\varphi'(v) + I\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\frac{a^2\rho^2}{2}\varphi''(v)$$

в обозначениях (25)–(27).

Доказательство. В целом ход доказательства аналогичен доказательству теоремы о сходимости ПСО (2) (см. [12]). Поэтому, используя леммы 2 и 3, условия сходимости 1)–4) прыжковой ПСО (2), а также дополнительные условия A.1–A.3, получаем утверждение теоремы. □

Замечание 1. Предельный процесс Орнштейна–Улэнбека [17, гл. 18, §4], определяемый генератором $\mathbf{L}$, в условиях теоремы 1 эргодичен со стационарным нормальным распределением $N = (0, \sigma_0^2)$, где дисперсия вычисляется по формуле $\sigma_0^2 = I\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)a^2\rho^2/2k$.

Случай 2. Рассмотрим соотношение (14), когда $\alpha = 1, \beta = \gamma/2$.

Лемма 4. Генератор (9) при условии (14) на тест-функциях $\varphi(v;\cdot) \in C^3(\mathbb{R})$ имеет асимптотическое представление:

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v;x) = \left[\varepsilon^{-1/\gamma}Q + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{1-\gamma}}Q_1(x) + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{t^{3/2-\gamma}}Q_2(x) + \right. \tag{32}$$

$$\left. + \frac{1}{t}Q_3(x)\varphi(v;x) + \frac{\varepsilon^{2/\gamma-3}}{t^{3-3\gamma}}\theta_t^{\varepsilon}(x)\right]\varphi(v;x),$$

где

$$Q_1(x)\varphi(v;x) = aC'(0;x)Q_0\varphi'(v;x); \tag{33}$$

$$Q_2(x)\varphi(v;x) = \frac{ab}{2}C''(0;x)Q_0\varphi'(v;x); \tag{34}$$

$$Q_3(x)\varphi(v;x) = (vb(x) + m(x))\varphi'(v;x) + I\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\frac{a^2}{2}(C'(0;x))^2Q_0\varphi''(v;x); \tag{35}$$

$$m(x) = \frac{ab^2}{6}C'''(0;x)Q_0; \tag{36}$$

$$b(x) = aC''(0;x)Q_0 + \gamma; \tag{37}$$

$$Q_0\varphi(v;x)=q(x)\mathbf{P}\varphi(v;x)\,,$$

при этом остаточный член $\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v;x)$ ограничен.

Доказательство. Положив в (12) $\alpha=1,\ \beta=\gamma/2$, получим (32) в обозначениях (33)–(37). Ограниченность остаточного члена следует из (12) и ограниченности первой, второй и третьей производных функции регрессии. □

Поскольку данный случай конструктивно подобен предыдущему, то, опуская повторные расчеты, сформулируем лемму о виде предельного генератора.

Лемма 5. Решение ПСВ для оператора (32) на тест-функциях $\varphi(v;\cdot)\in C^3(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi^\varepsilon(v;x)=\frac{1}{t}\mathbf{L}\varphi(v)+\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v)\,,$$

где оператор $\mathbf{L}$ действует по правилу

$$L\varphi(v;x)=-(kv-m)\varphi'(v;x)+I\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\frac{a^2\rho^2}{2}\varphi''(v;x)\,,$$

где

$$k=ad-\gamma\;; \tag{38}$$

$$d=-q\int_X\rho(dx)C''(0;x)\,; \tag{39}$$

$$m=\frac{ab^2}{6}\int_X\rho(dx)C'''(0;x)\,;$$

$$\rho^2=2\int_X\pi(dx)q(x)C'(0;x)R_0q(x)C'(0;x)-q\int_X\rho(dx)(C'(0;x))^2\,, \tag{40}$$

при этом остаточный член $\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v)$ такой, что $\|\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v)\|\to 0$, $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 3. □

Асимптотическая нормальность нормированной ПСО (7) устанавливается при дополнительных условиях А1–А3 , где $d,\,k,\,\rho^2$ представлены в (38)–(40).

Замечание 2. Для данного случая имеет место теорема 1 в обозначениях (38)–(40).

Замечание 3. Предельный процесс Орнштейна–Улэнбека [17, гл. 18, §4], определяемый генератором $\mathbf{L}$, в условиях теоремы эргодичен со стационарным нормальным распределением $N=(M,\sigma_0^2)$, где дисперсия вычисляется по формуле $\sigma_0^2=I\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)a^2\rho^2/2k$, а математическое ожидание $M=m/k$.

Случай 3. Рассмотрим соотношение (15), когда $\alpha=1,\ \beta\in(\gamma/2;\gamma)$.

Лемма 6. Генератор (9) при условии (15) на тест-функциях $\varphi(v;\cdot)\in C^3(\mathbb{R})$ имеет асимптотическое представление

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(v;x)=\left[\varepsilon^{-1/\gamma}Q+\frac{\varepsilon^{-1}}{t^{1-\gamma}}Q_1(x)+\frac{\varepsilon^{\beta/\gamma-1}}{t^{1-\gamma+\beta}}Q_2(x)+\right. \tag{41}$$

$$\left.+\frac{1}{t}Q_3(x)\varphi(v;x)+\frac{\varepsilon^{2/\gamma-3}}{t^{3-3\gamma}}\theta_t^\varepsilon(x)\right]\varphi(v;x)\,,$$

где

$$Q_1(x)\varphi(v;x) = aC'(0;x)Q_0\varphi'(v;x)\,; \tag{42}$$

$$Q_2(x)\varphi(v;x) = \frac{ab}{2}C''(0;x)Q_0\varphi'(v;x)\,; \tag{43}$$

$$Q_3(x)\varphi(v;x) = vb(x)\varphi'(v;x) + I\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\frac{a^2}{2}(C'(0;x))^2 Q_0\varphi''(v;x)\,; \tag{44}$$

$$b(x) = aC''(0;x)Q_0 + \gamma, \tag{45}$$

при этом остаточный член $\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v;x)$ ограничен.

Доказательство. Положив в (12) $\alpha = 1, \beta \in (\gamma/2;\gamma)$, получим (41) в обозначениях (42)–(45). Ограниченность остаточного члена следует из (12) и ограниченности первой, второй и третьей производных функции регрессии. □

Опуская повторные расчеты, заметим, что имеет место лемма 3 о виде предельного генератора.

Асимптотическая нормальность нормированной ПСО (7) устанавливается при дополнительных условиях А1–А2, где d, k, ρ^2 представлены в (25)–(27).

Замечание 4. Для данного случая имеет место теорема 1.

Замечание 5. Предельный процесс Орнштейна–Улэнбека [17, гл. 18, §4], определяемый генератором $\mathbf{L}$, в условиях теоремы эргодичен со стационарным нормальным распределением $N = (0, \sigma_0^2)$, где дисперсия вычисляется по формуле $\sigma_0^2 = I\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)a^2\rho^2/2k$.

Таким образом, исследовано асимптотическое поведение модифицированной процедуры стохастической оптимизации в схеме серий в марковской среде для одномерного случая. Установлены условия, при которых она асимптотически нормальна. Полученные результаты аналогично переносятся на многомерный случай.

В отличие от классической процедуры при некоторых соотношениях нормирующих коэффициентов α, β, γ для нахождения асимптотического поведения ПСО достаточно, чтобы функция регрессии $C(u;x)$ была дважды непрерывно дифференцируемой: $C(u;x) \in C^3(\mathbb{R};X)$. Так, при $\alpha = 1$, $\beta < \gamma/2$ (для классической процедуры) и при $\alpha = 1$, $\beta < \gamma/2$, $\beta \in (\gamma/2;\gamma)$ (для модифицированной процедуры) предельные генераторы совпадают, что свидетельствует об эквивалентности (равнозначности) данных процедур относительно их асимптотического поведения.

Однако несмотря на их схожесть использование модифицированной процедуры в системах реального времени более целесообразно. Это объясняется тем, что для классической процедуры условие независимости внешних помех от возмущения $b(t)$ достаточно ограничено, поскольку на каждом шаге итерации вектор b_{n-1} используется дважды. Если речь идет о модифицированной процедуре, то одновременное возникновение возмущения b_{n-1} и внешних помех дает возможность рассчитывать на их независимость (см. [9]).

Таким образом, полученные результаты расширяют понимание и возможности исследования флуктуаций эволюционных систем в окрестности точки экстремума даже в случае нелинейной зависимости функции регрессии от внешних помех. В свою очередь, это дает возможность углубить анализ флуктуаций ПСО при исследовании условий оптимизации стохастических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Korolyuk V., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. — World Scientific Publishing, 2005. — 330 p.
2. Korolyuk V.S, Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. — London: Kluwer acad. publ., 1999. — 185 p.
3. Chabaniuk Y., Koroliuk V.S., Limnios N. Fluctuation of stochastic systems with average equilibrium point // C.R. Acad. Sci., Ser. I. — Paris. — 2007. — **345.** — P. 405–410.
4. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. О сходимости моментов процедуры Роббинса–Монро // Автоматика и телемеханика. — 1972. — № 3. — С. 101–125.
5. Хасьминский Р.З. О поведении процессов стохастической аппроксимации для больших значений времени // Проблемы передачи информации. — 1972. — **8**, № 1. — С. 453–495.
6. Ljung L., Pflug G., Walk H. Stochastic approximation and optimization of random systems. — Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1992. — 114 p.
7. Fabian V. On asymptotic normality in stochastic approximation // Annals of Mathematical Statistic. — 1968. — **39**, N 4. — P. 1327–1332.
8. Kersting G.D. A weak convergence theorem with application to the Robbins–Monro process // Ann. Prob. — 1978. — **6.** — P. 1015–1025.
9. Граничин О.Н. Рандомизированные алгоритмы стохастической аппроксимации при произвольных помехах // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 2. — С. 44–55.
10. Чабанюк Я.М., Горун П.П. Асимптотика прыжковой процедуры стохастической оптимизации в схеме усреднения // Вестник Киевского национального университета имени Тараса Шевченко. Сер.: Физико-математические науки. — 2012. — № 2. — С. 251–256.
11. Горун П.П., Чабанюк Я.М. Асимптотика генератора прыжковой оптимизации в марковской среде в схеме усреднения // XIX International conf.: Problems of decision making under undertainties (PDMU-2012, April 23-27, 2012). — Киев: Образование Украины. — С. 87.
12. Горун П.П., Чабанюк Я.М. Дискретная модель стохастической оптимизации инвестиционного портфеля // Буковинский математический журнал. — 2015. — **3**, № 1. — С. 45–51.
13. Горун П.П., Чабанюк Я.М. Предельный генератор процедуры стохастической оптимизации // Тез. докл. VI международ. науч.-практич. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых «Современные задачи прикладной статистики, промышленной, актуарной и финансовой математики», посвященной 75-летию Донецкого национального университета (9-11 апреля 2012 года). — Донецк: ДонНУ, 2012. — С. 40.
14. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1972. — 304 с.
15. Чабанюк Я.М., Горун П.П. Сходимость дискретной процедуры стохастической оптимизации в схеме диффузионной аппроксимации // Сб. науч. трудов Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины и Каменец-Подольского национального университета имени Ивана Огиенко. Сер.: Физико-математические науки. — 2012. — № 6. — С. 234–248.
16. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложение: В 2-х т. — М.: Мир, 1967. — Т. 1. — 527 с.
17. Боровков А.А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1986. — 431 с.

Поступила 08.06.2015