СИСТЕМНЫЙ
АНАЛИЗ

В.С. КИРИЛЮК

УДК 519.21

МЕРЫ РИСКА В ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И РОБАСТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Аннотация. Рассмотрено использование мер риска, позволяющее объединить в рамках общего подхода задачи стохастического программирования и робастной оптимизации. Описаны конструкции для класса полиэдральных когерентных мер риска. Показано, как задачи линейной оптимизации с неопределенностью при применении таких мер сводятся к детерминированным задачам линейного программирования.

Ключевые слова: стохастическое программирование, робастная оптимизация, полиэдральная когерентная мера риска, conditional value-at-risk, спектральная когерентная мера риска, неточные вероятности, линейное программирование.

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является попытка описать меры риска в качестве эффективного математического аппарата при принятии решений в условиях риска и неопределенности.

Много прикладных оптимизационных задач содержат различные неопределенные параметры, которые необходимо учитывать при поиске их оптимальных (эффективных) решений. Неопределенности могут порождаться недостаточностью или зашумленностью данных, неточностью оценок, непредсказуемостью будущего и т.д. Для решения подобных проблем используются широко известные два подхода: один применяется в стохастическом программировании (СП), когда известно вероятностное распределение неопределенных параметров и оптимизируется математическое ожидание целевой функции [1], другой подход предложен в робастной оптимизации (РО), где используется минимаксный критерий, при котором целевая функция оптимизируется при наихудшем сценарии [2]. При этом вероятностное распределение неопределенных параметров знать не обязательно, достаточно лишь множество возможных значений параметров.

Оба этих подхода объединяются в рамках использования аппарата мер риска следующим образом. Мера риска описывается как оптимум (худший) математического ожидания целевой функции, зависящей от некоторой случайной величины (с.в.), по определенному множеству Q вероятностных мер. Последнее однозначно представляет ту или иную меру риска. Описывая такое множество Q в виде единственной (известной) меры $\{P_0\}$, получаем в качестве критерия математическое ожидание (случай СП). Представляя Q в виде множества всех возможных вероятностных мер, получаем в качестве критерия минимакс, поскольку тогда мера риска реализуется при наихудшем сценарии (случай РО).

Отметим, что оба подхода представляют собой некоторые крайности (extreme cases): случай СП приводит к простым для поиска, но ненадежным решениям, случай РО обеспечивает надежные, но слишком консервативные решения. К тому же условия полной информации о вероятностных распределениях или абсолютного ее отсутствия не описывают обширного множества практически важных задач, в которых доступна лишь частичная информация. Аппарат мер риска позволяет не только объединить эти два крайних случая, но и предложить некоторый набор промежуточных вариантов мер риска, представленных в упомянутой ранее конструкции соответствующими множествами вероятностных мер Q. По мнению автора статьи, учет именно таких промежуточных вариантов мер риска при принятии решений наиболее интересен.

1. НЕКОТОРЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И РОБАСТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим оптимизационную задачу, в которой имеется неопределенность в виде некоторого случайного параметра Y:

$$\text{"min"}\{f_0(x,Y): f_i(x,Y) \le 0,\ i=1,\dots,m,\ x \in M \subseteq R^k\},$$

где смысл "min" и неравенств в ограничениях в связи с неопределенностью параметра Y будет уточняться по мере изложения, а множество M имеет простую структуру, например многогранник.

Пусть имеется вероятностное пространство (Ω, F, P), на котором задано вероятностное распределение параметра Y, т.е. $Y(.):\Omega \to R^s$, тогда для каждого элементарного события (сценария) $\omega \in \Omega$ описано значение $f_i(x, Y(\omega))$, $i=0,\dots,m$. Следовательно, при измерении $f_i(x, Y(\omega))$, $i=0,\dots,m$, задано их распределение. Поскольку значение $Y = Y(\omega)$ полностью определяется сценарием ω, для сокращения обозначений вместо $f_i(x, Y(\omega))$ будем писать $f_i(x,\omega)$. В данных обозначениях приведенная ранее задача оптимизации имеет вид

$$\text{"min"}\{f_0(x,\omega): f_i(x,\omega) \le 0,\ i=1,\dots,m,\ x \in M \subseteq R^k\}. \tag{1}$$

Можно сформулировать различные варианты аналога проблемы (1). Например, поставить задачу оптимизации, в которой в качестве критерия и ограничений используются средние значения соответствующих функций

$$\min\{E[f_0(x,\omega)] : E[f_i(x,\omega)] \le 0,\ i=1,\dots,m,\ x \in M \subseteq R^k\}. \tag{2}$$

Данная оптимизация в среднем проста, но ненадежна, а учет ограничений в среднем является, вообще говоря, необоснованным [3]. Более разумной представляется следующая постановка СП [4]:

$$\min\{E[f_0(x,\omega)]: \sup_{\omega\in\Omega} f_i(x,\omega) \le 0,\ i=1,\dots,m,\ x \in M \subseteq R^k\}, \tag{3}$$

в которой, как и в (2), оптимизируется среднее значение критерия, но при этом гарантируется допустимость решений (в смысле ограничений) для всех возможных сценариев ω.

Приведем постановку СП с вероятностными ограничениями, в которой выполнение последних гарантируется лишь с некоторыми вероятностями [5]

$$\min\{E[f_0(x,\omega)] : P\{\omega : f_i(x,\omega) \le 0\} \ge \alpha_i,\ i=1,\dots,m, x \in M \subseteq R^k\}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь некоторые постановки задач РО. Начнем со следующей минимаксной задачи, названной строгой РО [2], которую можно поставить при наличии лишь множества $U = \bigcup_{\omega \in \Omega} Y(\omega)$, что подразумевает также оценку множеств $\bigcup_{\omega \in \Omega} f_i\ (x, \omega),\ i = 0, \dots, m$:

$$\min \{\max_{\omega \in \Omega} f_0\ (x, \omega) : \sup_{\omega \in \Omega} f_i(x, \omega) \le 0,\ i = 1, \dots, m,\ x \in M \subseteq R^k\}. \tag{5}$$

Данная задача, как и (3), гарантирует допустимость решений при всех возможных значениях $\omega \in \Omega$, но оптимизирует критерий при наихудшем сценарии (элементарном событии) распределения.

Замечание 1. Множество U можно представить в виде соответствующих оценок разброса значений с.в. Y без его параметризации в форме $\bigcup_{\omega \in \Omega} Y(\omega)$. Однако для построения этого множества все равно неявно используются оценки экстремальных сценариев-событий с.в. Y.

В некоторых постановках задач в качестве критерия оптимизации используют наихудшее отклонение исходной функции-критерия от ее оптимального значения. Соответствующая проблема названа задачей РО отклонения (deviation robust) [6]

$$\min \{\max_{\omega \in \Omega}(f_0(x, \omega) - f_0^*(\omega)) : \max_{\omega \in \Omega} f_i(x, \omega) \le 0,\ i = 1, \dots, m,\ x \in M \subseteq R^k\}, \tag{6}$$

где $f_0^*(\omega) = \min\{f_0(x, \omega) : x \in M\}$.

Иногда используется минимаксный критерий, но при этом ослабляются требования допустимости решения при всех возможных сценариях ω. Это условие гарантируется лишь при некотором номинальном сценарии $\hat{\omega}$. Такая проблема названа задачей надежной (reliable) в смысле РО [7]

$$\begin{gathered} \max_{\omega \in \Omega} f_0(x, \omega) \to \min, \\ f_i(x, \hat{\omega}) \le 0,\ i = 1, \dots, m, \\ \max_{\omega \in \Omega} f_i(x, \omega) \le \delta_i,\ i = 1, \dots, m, \\ x \in M \subseteq R^k. \end{gathered} \tag{7}$$

Понятно, что при $\delta_i = 0,\ i = 1, \dots, m$, она совпадает с постановкой (5).

Для полноты изложения рассмотрим еще постановку задачи, названную проблемой легкой (light) РО [8]

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^m w_i \delta_i \to \min{}_{(\delta, x)}, \\ f_i(x, \hat{\omega}) \le 0,\ i = 1, \dots, m, \\ f_0(x, \hat{\omega}) \le (1 + \gamma) z^*, \\ \max_{\omega \in \Omega} f_i(x, \omega) \le \delta_i,\ i = 1, \dots, m, \\ x \in R^k,\ \delta \ge 0, \end{gathered} \tag{8}$$

где $\hat{\omega}$ — номинальный сценарий; $z^* = \min\{f_0(x, \hat{\omega}) : x \in R^k\}$, $\gamma \ge 0$ — некоторый параметр; $w_i \ge 0,\ i = 1, \dots, m,\ \sum_{i=1}^m w_i = 1$ — некоторые весовые коэффициенты.

Замечание 2. Известны и другие близкие постановки задач. Например, так называемые мягкая (soft) РО [9] и обобщенная легкая (generalized light) РО [10]. Разнообразие постановок можно объяснить как попыткой ослабить классическую постановку РО в форме (5), генерирующую слишком консервативные решения, так и спецификой областей применения.

Представим далее аппарат полиэдральных когерентных мер риска, с помощью которого затем объединим рассмотренные ранее постановки задач СП и РО.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ МЕР РИСКА

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P_0) задана с.в. $X(.) : \Omega \to R$. В [11] для оценки риска с.в. X, описывающей некоторый финансовый поток, введено понятие когерентной меры риска (КМР), представленной в виде

$$\rho(X) = \sup\{E_P[-X] : P \in Q\}, \qquad (9)$$

где $E_p[.]$ — математическое ожидание по вероятностной мере P, а Q — некоторое выпуклое замкнутое множество вероятностных мер, которое однозначно определяет $\rho(.)$. Такая КМР интерпретирует потенциальные потери финансового потока X.

В случае, когда с.в. X описывает затраты, убытки, стоимость и другие величины, характеризуемые в порядке предпочтения «чем меньше, тем лучше», в соответствующей КМР следует использовать конструкцию, аналогичную (9), но без изменения знака при с.в., т.е.

$$\rho(X) = \sup\{E_P[X] : P \in Q\}. \qquad (10)$$

Именно конструкцию (10) будем применять в дальнейшем изложении к критериям $f_i(x, \omega)$, $i = 0, \ldots, m$, исходя из их минимизации и ограничений сверху в задаче (1).

Рассмотрим конечную дискретно распределенную с.в. X, которая характеризуется конечным набором своих посценарных значений $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с соответствующими сценарными вероятностями $p_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0)$. Для таких с.в. в [12, 13] изучалось понятие полиэдральной КМР (ПКМР), в котором в дополнение к описанию (10) постулировалась также многогранность (полиэдральность) множества Q, т.е. его представление в виде

$$Q = \{p : Bp \le c,\ p \ge 0\}, \qquad (11)$$

где B и c — матрица и вектор соответствующих размерностей.

Следуя [14], разделяем описание множества Q в (11) на стандартную и содержательную части. Представим матрицу B и вектор c как

$$B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

где B_0 и c_0, описывающие приведенные ранее неравенства, являются стандартными:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ -1 & \ldots & -1 \end{pmatrix},\ c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

а B_1 и c_1 описывают содержательную часть в соотношении (12), которая и определяет собственно меру риска в виде соотношений (10)–(13).

Наличие стандартной части в виде B_0 и c_0 связано с описанием в (13) стандартного условия для сценарных вероятностей $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, которое представляется в виде двух неравенств: $\sum_{i=1}^n p_i \le 1$ и $-\sum_{i=1}^n p_i \le -1$.

Напомним следующие полезные факты из [14].

Пример 1. Математическое ожидание потерь $E_{P_0}[X]$ также является тривиальным примером подобной меры риска, в которой множество $Q=\{p_0\}$ содержит всего одну точку p_0. Ее можно формально описать в виде (10)–(13) при $B_1=I$, $c_1=p_0$, где I — единичная матрица.

Пример 2. Наихудший случай (максимальных потерь) также является ПКМР, в которой Q представляет собой множество всех возможных вероятностных мер. Таким образом, в его описании в виде (10)–(13) не имеется содержательной части, представленной B_1 и c_1.

Замечание 3. Конструкцию меры (10)–(13) можно интерпретировать как некоторый «мягкий» вариант минимакса, который становится обычным, когда множество Q максимально широко, как в примере 2.

Пример 3. Рассмотрим меру *CVaR*, введенную в [15]. Для конечных дискретно распределенных с.в. $CVaR_\alpha$ является ПКМР и представляется в форме (10)–(13), где матрица B_1 и вектор c_1 имеют вид:

$$B_1=I,\ c_1=\frac{1}{1-\alpha}p_0,$$

где I — единичная матрица, p_0 — вектор сценарных вероятностей.

Пример 4. Рассмотрим спектральную когерентную меру риска, введенную в [16] как

$$SCRM_\varphi(X)=\int_0^1\varphi(p)VaR_p(X)dp,$$

где $VaR_\alpha(X)=\inf\{z/F_X(z)\ge\alpha\}$, $\varphi(.)$ — функция спектра. Для конечных дискретно распределенных с.в. X она является ПКМР [14] и представляется в форме (10)–(13), где матрица B_1 и вектор c_1 имеют вид:

$$B_1=I,\ c_1=\left(\sum_{i=1}^n\frac{\lambda_i}{1-\alpha_i}\right)p_0, \tag{14}$$

а соответствующие λ_i и α_i определяются для n сценариев и спектра $\varphi(.)$ следующим образом. Упорядочим посценарные значения с.в. X в порядке возрастания и перенумеруем в соответствии с этим сценарии с их вероятностями, тогда λ_i, α_i, $i=1,\dots,n$, определяются из соотношений [14]:

$$\alpha_i=1-\sum_{j=1}^i p_j,\ i=1,\dots,n, \tag{15}$$

$$\lambda_1=\left(\int_0^{p_1}\varphi(p)dp-\frac{p_1}{p_2}\int_{p_1}^{p_1+p_2}\varphi(p)dp\right),\ \lambda_n=\frac{1}{p_n}\int_{p_1+\dots+p_{n-1}}^1\varphi(p)dp, \tag{16}$$

$$\lambda_i=\frac{p_1+\dots+p_i}{p_i}\left(\int_{p_1+\dots+p_{i-1}}^{p_1+\dots+p_i}\varphi(p)dp-\frac{p_i}{p_{i+1}}\int_{p_1+\dots+p_i}^{p_1+\dots+p_{i+1}}\varphi(p)dp\right),\ i=2,\dots,n-1. \tag{17}$$

Если вероятности всех сценариев равны $\frac{1}{n}$, их не нужно упорядочивать, и выражения для определения параметров λ_i, α_i, $i=1,\ldots,n$, в (14) значительно упрощаются:

$$\alpha_i = 1-\frac{i}{n},\ i=1,\ldots,n,\ \lambda_i = i\left(\int\limits_{(i-1)/n}^{i/n}\varphi(p)dp - \int\limits_{i/n}^{(i+1)/n}\varphi(p)dp\right),\ i=1,\ldots,n-1,$$

$$\lambda_n = n\int\limits_{(n-1)/n}^{1}\varphi(p)dp.$$

Пример 5. Представление Кусуоки инвариантных по распределению КМР [17] имеет вид

$$KRRM(X) = \max_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\Lambda}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i CVaR_{\alpha_i}(X), \tag{18}$$

где Λ — выпуклое замкнутое множество векторов весовых коэффициентов, сумма которых равна 1. В [14] показано, что (18) является ПКМР и представляется в форме (10)–(13), где матрица B_1 и вектор c_1 имеют вид:

$$B_1 = I,\ c_1 = \left(\max_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\Lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\alpha_i}\right)p_0.$$

Нетрудно видеть, что все ПКМР, кроме наихудшего случая из примера 2, используют вектор сценарных вероятностей p_0 в явном виде. Для примера 2 наличия p_0 не нужно, достаточно лишь оценки сверху значений с.в. X.

Случай неточных сценарных вероятностей. Кроме случаев полной информации о распределении с.в. X или наличия лишь ее оценок сверху, возможны и другие (промежуточные) варианты. Зачастую можно моделировать сценарии будущих событий с распределением по ним значений с.в., однако трудно идентифицировать их сценарные вероятности p_0, которые можно лишь как-то оценивать, например сверху и снизу. Для подобных обстоятельств, называемых случаями неточных вероятностей, аппарат ПКМР предлагает адекватные конструкции мер риска.

Отметим, что описанная ранее зависимость множества Q в конструкции ПКМР (12) от p_0 позволяет трактовать его как многозначное отображение $Q(p_0)$, которое однозначно определяет соответствующую меру риска (см. примеры 1, 3–5). Это обстоятельство дает возможность построить меру риска, когда не имеется точной информации о векторе сценарных вероятностей p_0. Допустим, известно лишь, что данный вектор принадлежит некоторому множеству неопределенности U, т.е. $p_0 \in U$. Тогда естественно строить меру риска, которая является наихудшей в этом множестве. Таким образом, по исходной мере риска ρ_0 вида (10) и множеству неопределенности U строится ее робастная конструкция [18]:

$$\rho_{\rho_0;U}(X) = \sup\{E_P[X] : P \in Q(U)\}, \tag{19}$$

где $Q(U) = \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{p_0\in U} Q(p_0)\right)$, $Q(p_0)$ — многозначное отображение исходной меры $\rho_0(.)$, $\overline{\mathrm{co}}$ — выпуклая замкнутая оболочка.

Рассмотрим случай неточных сценарных вероятностей, когда p_0 оценивается своими покоординатными оценками снизу и сверху в виде соответствующих векторов p_l и p_u. Тогда множество неопределенности U для p_0 имеет вид:

$$U = \left\{ p : p \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \ p_l \leq p \leq p_u \right\}. \tag{20}$$

Для этого случая представим робастные варианты мер риска из примеров 1–5, обусловленные конструкцией (19).

Как известно [14], для множества неопределенности вида (20) все робастные конструкции из примеров 1–5 являются ПКМР, представленными в форме (10)–(13), для идентификации которых достаточно указать только их содержательные части в виде матрицы B_1 и вектора c_1.

Пример 1′. Для робастного варианта средних потерь

$$B_1 = \begin{pmatrix} -I \\ I \end{pmatrix}, \ c_1 = \begin{pmatrix} -p_l \\ p_u \end{pmatrix}.$$

Пример 2′. Для случая наибольших потерь без изменений B_1 и c_1 не существуют.

Пример 3′. Для робастного варианта $CVaR_\alpha$

$$B_1 = I, \ c_1 = \frac{p_u}{1-\alpha}.$$

Пример 4′. Для робастного варианта *SCRM*

$$B_1 = I, \ c_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_u,$$

где $\alpha_i, \ \lambda_i, \ i = 1, \ldots, n,$ описываются соотношениями (15)–(17).

Пример 5′. Для робастного варианта *KRRM*

$$B_1 = I, \ c_1 = \left(\max_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_u.$$

Отметим, что подобное развитие аппарата ПКМР позволяет рассматривать достаточно широкий класс условий неопределенности, начиная с оценок сверху значений с.в. и заканчивая полной информацией об их распределениях, которые затем используются при построении соответствующих мер риска (10)–(13).

3. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕР РИСКА

Исследуем задачи оптимизации из разд. 1. Для дискретного конечного множества $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ с использованием приведенного ранее аппарата ПКМР в качестве аналога проблемы (1) можем сформулировать следующую достаточно общую постановку задачи:

$$\begin{gathered} \rho_0(f_0(x,.)) \to \min, \\ \rho_i(f_i(x,.)) \leq \delta_i, \ i = 1, \ldots, m, \\ x \in M, \end{gathered} \tag{21}$$

где $\rho_i(.), \ i = 0, 1, \ldots, m,$ — ПКМР вида (10)–(13), которые строятся по с.в. $f_i(x, \omega)$, а $\delta_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, m,$ — некоторые параметры.

Покажем, что (21) позволяет в унифицированной форме сформулировать рассмотренные ранее задачи СП и РО. Начнем с задач СП.

Так, для проблемы (2) достаточно в (21) описать все $\rho_i(.)$, $i=0,1,\ldots,m$, как в примере 1, и принять $\delta_i=0$, $i=1,\ldots,m$. Для проблемы (3) $\rho_0(.)$ в (21) выбирается из примера 1, а $\rho_i(.)$, $i=1,\ldots,m$, — из примера 2 при $\delta_i=0$, $i=1,\ldots,m$.

В проблеме (4) вероятностные ограничения можно заменить эквивалентными с использованием меры риска $VaR_\alpha(.)$:

$$P\{\omega: f_i(x,\omega)\le 0\}\ge \alpha_i \Leftrightarrow VaR_{\alpha_i}(f_i(x,.))\le 0,\ i=1,\ldots,m.$$

Как известно, мера $VaR_\alpha(.)$ некогерентна [11], что приводит при ее применении к потенциальным трудностям (и противоречиям), индуцированным исходной постановкой задачи. Зачастую имеет смысл [3] заменить эти ограничения подобными, но с использованием $CVaR_\alpha(.)$:

$$CVaR_{\alpha_i}(f_i(x,.))\le 0,\ i=1,\ldots,m. \tag{22}$$

Ограничения (22) имеют теоретически хорошие свойства, причем выполнение исходных ограничений заведомо гарантируется

$$VaR_{\alpha_i}(f_i(x,.))\le CVaR_{\alpha_i}(f_i(x,.))\le 0,\ i=1,\ldots,m.$$

Такая «CVaR-аппроксимация» (22) исходных вероятностных ограничений является наилучшей в классе выпуклых аппроксимаций [2]. В случае ее применения модифицированная задача (4) сводится к виду (21), где $\rho_i(.)$, $i=1,\ldots,m$, выбираются из примера 3.

Замечание 4. Задачи вероятностной (квантильной) оптимизации, возникающие в приложениях по надежности и безопасности систем, страхованию и других, вообще говоря, не сводятся к задачам с использованием КМР. Они невыпуклы и требуют иных подходов. Так, при дискретных распределениях эти проблемы можно свести к задачам частично целочисленного программирования [19, 20].

Рассмотрим теперь задачи РО. Для проблемы (5) все $\rho_i(.)$, $i=0,1,\ldots,m$, в (21) описываются, как в примере 2, при $\delta_i=0$, $i=1,\ldots,m$. Если при этом вместо функции $f_0(x,\omega)$ использовать разность $f_0(x,\omega)-f_0^*(\omega)$, где $f_0^*(\omega)=$ $=\min\{f_0(x,\omega): x\in M\}$, получим проблему (6).

Приведем тривиальный пример ПКМР.

Пример 6. Для учета значения с.в. X в некотором номинальном сценарии $\hat\omega$ в виде ПКМР (10)–(13) достаточно описать матрицу B_1 и вектор c_1 следующим образом: $B_1=I$, c_1 состоит из нулевых компонент с одной единицей, соответствующей сценарию $\hat\omega$. Обозначим $\hat\rho(.)$ данную ПКМР.

Замечание 5. Мера $\hat\rho(.)$ не описывается ни одной ПКМР из примеров 1–5 за исключением экзотического случая, когда вероятность номинального сценария $\hat\omega$ равна 1.

Нетрудно видеть, что проблема (7) представляется в виде

$$\begin{gathered}\rho_0(f_0(x,.))\to\min,\\ \hat\rho(f_i(x,.))\le 0,\ i=1,\ldots,m,\\ \rho_i(f_i(x,.))\le\delta_i,\ i=1,\ldots,m,\\ x\in M,\end{gathered} \tag{7′}$$

где $\rho_i(.)$, $i=0,1,\ldots,m$, выбираются из примера 2, а $\hat\rho_i(.)$ — из примера 6.

Несмотря на то, что в задаче (7′.) больше ограничений, чем в (21), первую можно формально вложить во вторую, считая, что изначально имеется $m_1 = 2m$ функций для ограничений, в которых каждая из $f_i(x,\omega))$ учитывается дважды. Следовательно, задача (21) формально включает все перечисленные ранее постановки задач.

Замечание 6. В некоторых постановках задач используются так называемые обобщенные меры девиации (generalized deviation) $D(.)$ с.в. X [21], связанные с КМР следующим соотношением: $D(X)=\rho(X-E[X])$. При желании применить такую меру можно рассматривать ПКМР для преобразованной функции $f_0(x,\omega)-E[f_0(x,\omega)]$. Поэтому оптимизационные проблемы с мерой $D(.)$ естественным образом включаются в постановку задачи (21).

Рассмотрим для полноты изложения проблему легкой РО, которая, хотя и не сводится к виду (21), но достаточно близка к ней. Нетрудно видеть, что задача (8) допускает переформулировку с использованием ПКМР как

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{m} w_i\delta_i \to \min_{(\delta,x)},\\ \hat\rho_i(f_i(x,.))\le 0,\ i=1,\dots,m,\\ \hat\rho_0(f_0(x,.))\le(1+\gamma)z^*,\\ \rho_i(f_i(x,.))\le\delta_i,\ i=1,\dots,m,\\ x\in R^k,\ \delta\ge 0,\end{gathered}\tag{8′}$$

где меры $\rho_i(.)$, $i=1,\dots,m$, и $\hat\rho_i(.)$, $i=0,\dots,m$, описываются в примерах 2 и 6 соответственно, $\hat\omega$ — номинальный сценарий, $z^*=\min\{f_0(x,\hat\omega): x\in R^k\}$, $\gamma\ge 0$ — некоторый параметр; $w_i\ge 0, i=1,\dots,m, \sum_{i=1}^m w_i=1$ — некоторые весовые коэффициенты.

Для этой задачи можно сформулировать с помощью ПКМР следующий более общий аналог:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{m} w_i\delta_i \to \min_{(\delta,x)},\\ \rho_i(f_i(x,.))\le\gamma_i,\ i=0,\dots,m,\\ \rho_{i+m}(f_i(x,.))\le\delta_i,\ i=1,\dots,m,\\ x\in R^k,\ \delta\ge 0,\end{gathered}\tag{23}$$

где $w_i\ge 0$, $i=1,\dots,m$, $\sum_{i=1}^m w_i=1$ — некоторые весовые коэффициенты, γ_i, $i=0,\dots,m$, — некоторые фиксированные параметры. Например, для задачи (8) они имеют вид $\gamma_0=(1+\gamma)z^*$, $\gamma_i=0$, $i=1,\dots,m$.

Таким образом, применение ПКМР позволяет формально описывать широкий класс задач СП и РО. Разнообразие постановок не ограничивается использованием в них только математических ожиданий или минимакса. Применение других, промежуточных, мер риска связано с желанием получить решения, более надежные, чем найденные с учетом средних потерь, но менее консервативные, чем полученные с использованием минимаксного критерия.

При известных распределениях с.в. аппарат ПКМР дает возможность применять достаточно широкий спектр мер, представленных, в частности, вариантами мер из примеров 3–5, с учетом возможности выбора их параметров α, $\varphi(.)$, Λ, α_i.

Мера *CVaR* позволяет описывать риск с.в. как условные средние потери на хвосте распределения, а *SCRM* — учитывать риск на всем распределении с.в. как средние потери на его частях с соответствующими весовыми коэффициентами, представленными спектром $\varphi(.)$. К тому же к задачам минимизации *SCRM* сводятся некоторые проблемы максимизации ожидаемой полезности [22].

В случае неточных сценарных вероятностей для оценки риска можно воспользоваться робастными вариантами этих мер из примеров 1′–5′.

Если функции $f_i(x,\omega)$, $i=0,\dots,m$, выпуклы по x, задачи (21) и (23) являются проблемами выпуклого программирования и их можно решить соответствующими методами [1]. Однако поиск решений существенно упрощается, если описанные функции линейны, т.е. для задач линейной оптимизации.

4. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Допустим, что функции $f_i(x,\omega)$, $i=0,\dots,m$, линейны по x, т.е. $f_i(x,\omega)=$ $=< l_i(\omega), x> - a_i(\omega)$, $i=0,\dots,m$, где $<\cdot,\cdot>$ означает скалярное произведение, а множество M имеет простую структуру, например, в виде выпуклого многогранника. Выпишем исходную задачу (1)

$$< l_0(\omega),\ x> - a_0(\omega) \to \text{"min"},$$
$$< l_i(\omega),\ x> - a_i(\omega) \le 0,\ \ i=1,\dots,m,$$
$$x \in M \subseteq R^k.$$

В этом случае задачу (21) можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}\rho_0(< l_0(.), x> - a_0(.)) \to \min_x,\\ \rho_i(< l_i(.),\ x> - a_i(.)) \le \delta_i,\ \ i=1,\dots,m,\\ x \in M \subseteq R^k.\end{gathered} \tag{24}$$

Если пространство элементарных событий-сценариев Ω описывает дискретное конечное распределение, то векторы $l_i(\omega)$ и величины $a_i(\omega)$ при $i=0,\dots,m$ распределены по n сценариям $(\omega_1,\dots,\omega_n)$, и это распределение можно представить соответствующими матрицами и векторами. Вводя обозначения

$$L_i = \begin{pmatrix} l_{i1}(\omega_1) & \dots & l_{ik}(\omega_1)\\ \dots & \dots & \dots\\ l_{i1}(\omega_n) & \dots & l_{ik}(\omega_n)\end{pmatrix},\ \ a_i = \begin{pmatrix} a_i(\omega_1)\\ \dots\\ a_i(\omega_n)\end{pmatrix},\ \ i=0,\dots,m,$$

где $l_{ij}(\omega_k)$ — j-я компонента l_i-го вектора в сценарии ω_k, с учетом конструкции ПКМР переписываем задачу (24) как

$$\begin{gathered}\max\{< L_0 x - a_0, p>: p \in Q_0\} \to \min_x,\\ \max\{< L_i x - a_i, p>: p \in Q_i\} \le \delta_i,\ \ i=1,\dots,m,\\ x \in M \subseteq R^k,\end{gathered} \tag{25}$$

где $\delta_i \ge 0$, $i=1,\dots,m$, — некоторые фиксированные величины.

Обозначим для каждого полиэдрального множества Q_i, $i=0,\dots,m$, матрицу и вектор их представляющие как B_i, c_i, т.е. $Q_i=\{p: B_i p \le c_i,\ p \ge 0\}$, $i=0,\dots,m$, описывая стандартную и содержательную части для B_i, c_i, $i=0,\dots,m$, соответственно как B_i^0, c_i^0 и B_i^1, c_i^1. В таких обозначениях задача (25) имеет вид

$$\max\{< L_0 x - a_0, p >: B_0 p \le c_0, p \ge 0\} \to \min_x,$$
$$\max\{< L_i x - a_i, p >: B_i p \le c_i, \;\; p \ge 0\} \le \delta_i, \; i = 1, \ldots, m, \qquad (26)$$
$$x \in M \subseteq R^k,$$

где $\delta_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$, — некоторые фиксированные величины.

Рассмотрим теперь проблему (23) с линейными функциями $f_i(x, \omega)$, $i = 0, \ldots, m$:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \delta_i \to \min_{(\delta, x)},$$
$$\rho_i (< l_i(.), x > - a_i(.)) \le \gamma_i, \; i = 0, \ldots, m, \qquad (27)$$
$$\rho_{i+m} (< l_i(.), x > - a_i(.)) \le \delta_i, \; i = 1, \ldots, m,$$
$$x \in R^k, \delta \ge 0,$$

где $w_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$ — некоторые весовые коэффициенты, γ_i, $i = 0, \ldots, m$, — некоторые фиксированные параметры.

С учетом обозначений, использованных для задачи (26), перепишем проблему (23) в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \delta_i \to \min_{(\delta, x)},$$
$$\max\{< L_i x - a_i, p >: B_i p \le c_i, \;\; p \ge 0\} \le \gamma_i, \; i = 0, \ldots, m,$$
$$\max\{< L_i x - a_i, p >: B_{i+m} p \le c_{i+m}, \;\; p \ge 0\} \le \delta_i, \; i = 1, \ldots, m, \qquad (28)$$
$$x \in R^k, \delta \ge 0.$$

Теперь можно показать, как поиск решения проблем (26) и (28) сводится к решению соответствующих задач линейного программирования (ЛП).

Теорема 1. Если задачи (26) и (28) совместны, то их оптимальными решениями являются соответственно компоненты x решений $(v_0, \ldots, v_m, x)$ и $(v_0, \ldots, v_{2m}, \delta, x)$ следующих проблем ЛП:

$$\min_{(v_0, \ldots, v_m, x)} < c_0, v_0 >,$$
$$-B_0^{\mathrm{T}} v_0 + L_0 x \le a_0,$$
$$< c_i, v_i > \le \delta_i, \; i = 1, \ldots, m, \qquad (29)$$
$$-B_i^{\mathrm{T}} v_i + L_i x \le a_i, \; i = 1, \ldots, m,$$
$$x \in M, \; v_i \ge 0, \; i = 0, \ldots, m;$$

$$\min_{(v_0, \ldots, v_{2m}, \delta, x)} < w, \delta >,$$
$$< c_i, v_i > \le \gamma_i, \; i = 0, \ldots, m,$$
$$-B_i^T v_i + L_i x \le a_i, \; i = 0, \ldots, m, \qquad (30)$$
$$< c_{i+m}, v_{i+m} > \le \delta_i, \; i = 1, \ldots, m,$$

$$-B_{i+m}^{\mathrm{T}} v_{i+m} + L_i x \le a_i, \;\; i=1, \ldots, m,$$

$$x \in R^k, \;\; \delta \ge 0, \;\; v_i \ge 0, \;\; i=0, \ldots, 2m,$$

а значения в решениях по функциям этих задач соответственно совпадают.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3 из [14] и состоит в переходе к двойственным задачам ЛП соответствующих компонент проблем (26), (28) с последующей заменой ограничений-неравенств для минимумов эквивалентными.

Подставляя в (29) и (30) различные варианты содержательных частей матриц и векторов, представляющих соответствующие ПКМР, можем технологично решать задачи (24) и (27) как проблемы ЛП для всего класса ПКМР.

Пример 7. Рассмотрим описанную технику для задачи двухэтапного стохастического программирования [1], задача первого этапа состоит в

$$\min_x (< d, x > + E[Q(x, \omega)]),$$

$$Ax = b, \;\; x \ge 0, \tag{31}$$

где $Q(x, \omega)$ — оптимальное значение проблемы второго этапа

$$\min_y < q, y >,$$

$$Tx + Wy = h, \;\; y \ge 0. \tag{32}$$

Как известно [1], для дискретного распределения с конечным числом сценариев ω_i, $i=1, \ldots, n$, такая задача сводится к следующей:

$$\min_{(x, y_1, \ldots, y_n)} \left(< d, x > + \sum_{i=1}^{n} p_i < q_i, y_i > \right),$$

$$Ax = b, \;\; x \ge 0, \tag{33}$$

$$T_i x + W_i y_i = h_i, \;\; y_i \ge 0, \;\; i=1, \ldots, n.$$

Модифицируем теперь постановку задачи (31), (32), заменив в ней математическое ожидание на ПКМР и добавив в задачу первого этапа ограничение на меру риска из класса ПКМР. Отметим, что подобные ограничения в таких проблемах исследовались в [23]. Таким образом, рассмотрим вместо (31) следующую задачу:

$$\min_x (< d, x > + \rho_0 (Q(x, \omega))),$$

$$\rho_1 (Q(x, \omega)) \le \delta_1, \tag{31$'$}$$

$$Ax = b, \;\; x \ge 0.$$

где $\rho_i(.)$, $i=0,1$, описываются в виде (10), (11) при соответствующих множествах $Q_i = \{p : B_i p \le c_i, \; p \ge 0\}$, $i=0,1$.

Изучим двухэтапную задачу (31′), (32). В качестве аналога (33) имеем

$$\min_{(x, y_1, \ldots, y_n)} \left\{ < d, x > + \max_p \left(\sum_{i=1}^{n} p_i < q_i, y_i > : B_0 p \le c_0, \; p \ge 0 \right) \right\},$$

$$\max_p \left(\sum_{i=1}^{n} p_i < q_i, y_i > : B_1 p \le c_1, \; p \ge 0 \right) \le \delta_1, \tag{33$'$}$$

$$Ax = b,\ x \ge 0,$$

$$T_i x + W_i y_i = h_i,\ y_i \ge 0,\ i = 1, \dots, n.$$

Введя обозначения $\Lambda = \begin{pmatrix} q_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, получаем

$$\begin{gathered}
\min_{(x, y_1, \dots, y_n)} \{< d, x > + \max_p (< \Lambda y, p > : B_0 p \le c_0,\ p \ge 0)\}, \\
\max_p (< \Lambda y, p >: B_1 p \le c_1,\ p \ge 0) \le \delta_1, \\
Ax = b,\ x \ge 0, \\
T_i x + W_i y_i = h_i,\ y_i \ge 0,\ i = 1, \dots, n.
\end{gathered} \tag{34}$$

Теперь, используя (с некоторыми уточнениями) теорему для задачи (26), можем свести (34) в случае ее совместности к следующей задаче ЛП:

$$\begin{gathered}
\min_{(x, y_1, \dots, y_n, v_0, v_1)} \{< d, x > + < c_0, v_0 >\}, \\
Ax = b,\ x \ge 0, \\
T_i x + W_i y_i = h_i,\ y_i \ge 0,\ i = 1, \dots, n, \\
\Lambda y - B_0^{\mathrm{T}} v_0 \le 0,\ v_0 \ge 0, \\
< c_1, v_1 > \le \delta_1, \\
\Lambda y - B_1^{\mathrm{T}} v_1 \le 0,\ v_1 \ge 0.
\end{gathered} \tag{35}$$

Значения по функциям этих задач в решениях совпадают, а компоненты $(x, y_1, \dots, y_n)$ решения $(x, y_1, \dots, y_n, v_0, v_1)$ задачи (35) есть решением задачи (34).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описано применение мер риска, которое позволяет объединить стандартные подходы СП и РО. Переход от одного подхода к другому осуществляется выбором соответствующего варианта таких мер. Рассмотрены возможности аппарата ПКМР для построения широкого класса мер риска для использования в подобных постановках задач. Удачный выбор меры риска позволит достичь разумного компромисса между эффективностью решения (в смысле оптимизируемого критерия) и его надежностью (в условиях неопределенности).

Показано, как проблемы линейной оптимизации при неопределенности, учитываемой с помощью ПКМР, сводятся к детерминированным задачам ЛП, что позволяет технологично решать подобные задачи стандартными средствами ЛП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczynski A. Lectures on stochastic programming: modeling and theory. — Philadelphia: SIAM, 2009. — 436 p.
2. Ben-Tal A., El Ghaoui L., Nemirovski A. Robust optimization. — Princeton: Princeton University Press, 2009. — 542 p.
3. Rockafellar R.T. Coherent approaches to risk in optimization under uncertainty // Tutorials in Operations Research INFORMS. — 2007. — P. 38–61.

4. Klamroth K., Kobis E., Schobel A., Tammer Chr. A unified approach for different concepts of robustness and stochastic programming via non-linear scalarizing functionals // Optimization. — 2013. — **62**(5). — P. 649–671.

5. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. — М: Наука, 1976. — 240 с.

6. Kouvelis P., Yu G. Robust discrete optimization and its sapplications. — Amsterdam: Kluwer, 1997. — 357 p.

7. Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data // Mathematical Programming. — 2000. — **88**(3). — P. 411–424.

8. Fischetty M., Monaci M. Light Robustness / Ahuja R.K, Mohring R.H., Zaroliagis C.D. (eds). Robust and online large-scale optimization. — Berlin: Springer, 2009. — P. 61–84.

9. Ben-Tal A., Bertsimas D., Brown D. A soft robust model for optimizing under ambiguity // Operations Research. — 2010. — **58**(4). — P. 1220–1234.

10. Schobel A. Generalized light robustness and the trade-off between robustness and nominal quality // Mathematical Methods of Operations Research. — 2014. — **80**(2). — P. 161–191.

11. Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. Coherent measures of risk // Mathematical Finance. — 1999. — **9**(3). — P. 203–228.

12. Кирилюк В.С. О когерентных мерах риска и задачах оптимизации портфеля // Теорія оптимальних рішень. — К: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2003. — Вип. 2. — С. 111–119.

13. Кирилюк В.С. О классе полиэдральных когерентных мер риска // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 4. — С. 155–167.

14. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимальные портфели по соотношению вознаграждение–риск // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — **50**, № 5. — С. 85–103.

15. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk // Journal of Risk. — 2000. — **2**(3). — P. 21–41.

16. Acerbi C. Spectral measuers of risk: a coherent representation of subjective risk aversion // Journal of Banking and Finance. — 2002. — **26**(7). — P. 1505–1518.

17. Kusuoka S. On law invariant coherent risk measures / Kusuoka S., Maruyama T. (eds.). Advances in Mathematical Economics. — Tokyo: Springer, 2001. — **3.** — P. 83–95.

18. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимизация инвестиционного портфеля // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 2. — С. 120–133.

19. Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И. О сведение задач квантильной оптимизации с дискретным распределением к задачам частично целочисленного программирования // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 6. — С. 66–86.

20. Норкин В.И., Кибзун А.И., Наумов А.В. Сведение задач двухэтапной вероятностной оптимизации с дискретным распределением случайных данных к задачам частично целочисленного программирования // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — **50**, № 5. — С. 34–48.

21. Rockafellar R.T., Uryasev S., Zabarankin M. Generalized deviations in risk analysis // Finance and Stochastics. — 2006. — **10**(1). — P. 51–74.

22. Кирилюк В.С. Теория ожидаемой полезности, оптимальные портфели и полиэдральные когерентные меры риска // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — **50**, № 6. — С. 63–72.

23. Ahmed S. Convexity and decomposition of mean-risk stochastic programs // Mathematical Programming. — 2006. — **106**(3). — P. 433–446.

Поступила 24.12.2014