КИБЕРНЕТИКА

В.Г. СКОБЕЛЕВ

УДК 519.1:519.21+519.710

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АГЕНТА С СЕТЕВОЙ СРЕДОЙ

Аннотация. Разработана и исследована общая дискретная нестационарная вероятностная модель взаимодействия агента с сетевой эшелонированной средой, противодействующей ему. Предложенная модель представлена в виде композиции двух конечных вероятностных автоматов с переменной структурой. Эта композиция автоматов является игрой двух лиц, в которой ущерб противнику наносит игрок, делающий ход.

Ключевые слова: агентно-ориентированные системы, вероятностные автоматы, нестационарные модели.

ВВЕДЕНИЕ

Агентно-ориентированный подход к решению теоретических и прикладных задач начал формироваться в начале 70-х годов XX столетия. На его становление значительное влияние оказали исследования открытых систем и теории акторов [1, 2], а также целенаправленного поведения автоматных моделей [3–6]. Первые практические разработки агентно-ориентированных систем появились через несколько лет [7, 8]. Большое значение для дальнейшего развития этого направления имела методология агентно-ориентированного программирования, основанного на организации вычислений в терминах взаимодействия агентов [9].

Начиная с 90-х годов стремительный рост информационных технологий, их проникновение практически во все сферы деятельности человека и начало формирования глобальной информационной инфраструктуры послужили мощным катализатором для интенсификации исследований в области агентно-ориентированных систем. Выделим основные три направления: применение агентных технологий в экономике (в том числе в электронной коммерции) и медицине, при управлении информационными потоками, в процессе дистанционного обучения [10–13]; разработка теории агентно-ориентированных систем [14]; использование агентных технологий при решении теоретико-графовых и теоретико-игровых задач [15–18].

В настоящее время достаточно проработана классификация сред (несмотря на их многообразие), в которых рассматриваются действия агентов [19]. Иная ситуация имеет место для агента: до сих пор не сформулировано его общепринятого определения. Хотя существуют различные классификации агентов в виде некоторых наборов признаков (как правило, неформально определенных), такие классы нередко описаны нечетко. Поскольку во многих исследованиях (особенно прикладной направленности) не приведено перечисление в явном виде набора признаков, определяющих агента, часто не совсем понятно, о какой динамической системе идет речь. Кроме того, используемые во многих работах модели агента и среды перегружены деталями, необходимыми для исследования решаемой задачи, что существенно затрудняет четкое представление о том, какими именно системами являются эти модели.

С позиции математической теории систем все многообразие моделей агентов и сред можно разделить на детерминированные, нечеткие и вероятностные модели. Последние модели особо значимы, так как они адекватно представляют широкий класс прикладных процессов, а также могут эффективно использоваться при верификации формальных моделей [20, 21]. Поэтому как с теоретической, так и прикладной точки зрения актуально построение и исследование общей дискретной нестационарной вероятностной модели взаимодействия агента с противодействующей ему сетевой средой. При этом естественно потребовать, чтобы в рассматриваемой модели все несущественные детали были «заметены под ковер» (т.е. представлены неявно) и в ее рамки укладывался достаточно широкий класс прикладных задач. Цель настоящей работы — построение и исследование такой модели.

ОСНОВА СЕТЕВОЙ СРЕДЫ

При исследовании взаимодействия агента с сетевой средой возникает вопрос о том, какая именно модель среды рассматривается при решении поставленных задач. Очевидно, что такая модель должна удовлетворять хотя бы трем условиям:

- формальное определение (или пояснение, каким образом можно построить формализацию);
- удобство для решения поставленных задач;
- содержательность (в рамки модели укладывается ряд актуальных прикладных и/или фундаментальных задач).

Исходя из сказанного, определим «геометрическую основу» сетевой среды в виде связного неориентированного графа.

Зафиксируем число $n \in \mathbf{N}$ и такую последовательность натуральных чисел $k_0, k_1, \ldots, k_{n+1}$, что $k_0 = k_{n+1} = 1$. С этой последовательностью чисел сопоставим такую последовательность графов $K_{k_i}^{(i)} = (V_{k_i}^{(i)}, E_{k_i}^{(i)})$ $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$ с попарно непересекающимися множествами вершин, что: 1) $V_{k_i}^{(i)} = \{v_{ij} \mid j \in \mathbf{N}_{k_i}\}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n+1$; 2) $K_{k_0}^{(0)}$ и $K_{k_{n+1}}^{(n+1)}$ — одновершинные графы без ребер (т.е. $E_{k_0}^{(0)} = E_{k_{n+1}}^{(n+1)} = \varnothing$); 3) $K_{k_i}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ — полный k_i-вершинный граф с петлей в каждой вершине, т.е. $E_{k_i}^{(i)} = \{\{v_{ij_1}, v_{ij_2}\} \mid j_1, j_2 \in \mathbf{N}_{k_i}\}$ $(i \in \mathbf{N}_n)$. Построим граф $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}} = (V, E)$, где $V = \bigcup_{i=0}^{n+1} V_{k_i}^{(i)}$ и $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_{k_i}^{(i)} \cup \bigcup_{i=0}^{n} \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_{k_i} \,\&\, v_2 \in V_{k_{i+1}}\}$. Будем считать, что вершины графа $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$ расположены в последовательных уровнях, начиная с 0-го, причем в i-м уровне $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$ расположены вершины, принадлежащие множеству $V_{k_i}^{(i)}$. Вершины v_{01} и $v_{n+1,1}$ графа $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$ назовем соответственно начальной и целевой.

Замечание. Выбор полного графа с петлями K_{k_i} $(i = 1, \ldots, n)$ в качестве i-го уровня графа $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$ обоснован тем, что любой граф с k_i вершинами — подграф графа K_{k_i}.

Для краткости изложения всюду в дальнейшем в графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ будем отождествлять любой маршрут с последовательностью определяющих его вершин.

Отметим, что граф $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ можно рассматривать как пассивную среду, т.е. существующую, но не осуществляющую никаких действий.

МОДЕЛЬ АГЕНТА

Поскольку в графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ вершины v_{01} и $v_{n+1,1}$ соответственно начальная и целевая, то естественно ввести следующее определение.

Определение 1. Агентом на графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ назовем такую динамическую систему $\mathcal{A}(t) = (s(t), \{(P^{(i)}(t), A^{(i)}(t), B^{(i)}(t))\}_{i\in \mathbf{Z}_{n+1}})$ $(t \in \mathbf{N})$, что:

- переменная $s(t) \in \{v_{01}, v_{n+1,1}\} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{k_i}^{(i)}$ $(t \in \mathbf{N})$ является указателем положения агента на графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ в момент t;
- для всех $i \in \mathbf{Z}_{n+1}$ и $t \in \mathbf{N}$

$$P^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(i)}(t) & p_{12}^{(i)}(t) \\ \vdots & \vdots \\ p_{k_i 1}^{(i)}(t) & p_{k_i 2}^{(i)}(t) \end{pmatrix}, \quad A^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)}(t) & \ldots & a_{1k_i}^{(i)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_i 1}^{(i)}(t) & \ldots & a_{k_i k_i}^{(i)}(t) \end{pmatrix},$$

$$B^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} b_{11}^{(i)}(t) & \ldots & b_{1k_{i+1}}^{(i)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k_i 1}^{(i)}(t) & \ldots & b_{k_i k_{i+1}}^{(i)}(t) \end{pmatrix}$$

являются стохастическими матрицами, причем $P^{(0)}(1) = (0\,1)$, $P^{(0)}(t) = (1\,0)$ $(t \in \mathbf{N},\ t \geq 2)$.

Напомним, что матрица называется стохастической, если все ее элементы неотрицательны и сумма элементов, расположенных в каждой строке, равна единице. Отсюда, в частности, вытекает, что $A^{(0)}(t) = (1)$ $(t \in \mathbf{N})$ и $B^{(n)}(t) = (\underbrace{1,\ldots,1}_{k_n \text{ раз}})^{\mathrm{T}}$ $(t \in \mathbf{N})$.

Функционирование агента $\mathcal{A}(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ на графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ определим в соответствии со следующими правилами.

Правило 1. Пусть $s(t) = v_{n+1,1}$. Тогда $s(t+1) = v_{n+1,1}$.

Правило 2. Пусть $s(t) = v_{ij}$ $(i \in \mathbf{Z}_{n+1},\ j \in \mathbf{N}_{k_i})$. Тогда к $(t+1)$-му моменту агент:

- останется на i-м уровне графа $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ с вероятностью $p_{j1}^{(i)}(t)$, причем $s(t+1) = v_{ij'}$ $(j' \in \mathbf{N}_{k_i})$ с вероятностью $p_{j1}^{(i)}(t) a_{jj'}^{(i)}(t)$;
- перейдет на $(i+1)$-й уровень графа $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ с вероятностью $p_{j2}^{(i)}(t)$, причем $s(t+1) = v_{i+1,j'}$ $(j' \in \mathbf{N}_{k_{i+1}})$ с вероятностью $p_{j2}^{(i)}(t) b_{jj'}^{(i)}(t)$.

Из определения 1 и правил 1 и 2 вытекают следующие свойства.

1. Агент $\mathcal{A}(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ — конечный автономный вероятностный автомат без выхода с переменной структурой.

2. Равенство $s(t)=v_{01}$ возможно, только если $t=1$.

3. Переход агента $\mathsf{A}(t)$ $(t\in\mathbf{N})$ в момент t по петле в вершине v_{ij} $(i\in\mathbf{N},\ j\in\mathbf{N}_{k_i})$ может интерпретироваться как событие «в момент t агент $\mathsf{A}(t)$ находится в режиме ожидания». Исключение этого режима в вершине $v_{ij}(i\in\mathbf{N},\ j\in\mathbf{N}_{k_i})$ в моменты $t\in T_0$ $(T_0\subseteq\mathbf{N})$ эквивалентно выполнению условия $(\forall t\in T_0)(a_{jj}^{(i)}(t)=0)$.

4. Выбор в качестве i-го уровня $(i=1,\ldots,n)$ графа $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ любого подграфа $G_i=(V_{k_i},E_i)$ графа $K_{k_i}^{(i)}=(V_{k_i}^{(i)},E_{k_i}^{(i)})$ эквивалентен выполнению условия

$$(\forall j_1,j_2\in\mathbf{N}_{k_i})(\{v_{ij_1},v_{ij_2}\}\notin E_i\Rightarrow(\forall t\in\mathbf{N})(a_{j_1j_2}^{(i)}(t)=a_{j_2j_1}^{(i)}(t)=0)).$$

Естественно возникает следующая задача.

Задача 1. Найти вероятность достижения агентом $\mathsf{A}(t)$ $(t\in\mathbf{N})$ на графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ целевой вершины $v_{n+1,1}$ при условии, что $s(1)=v_{01}$.

Эта задача имеет следующие содержательные интерпретации.

Интерпретация 1. Граф $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ представляет лабиринт, выход из которого расположен в вершине $v_{n+1,1}$. Вычислить вероятность того, что агент $\mathsf{A}(t)$ $(t\in\mathbf{N})$, помещенный в вершину v_{01}, найдет выход из лабиринта.

Интерпретация 2. Граф $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ представляет структуру компьютерной игры, имеющей $n+1$ уровень возрастающей сложности, которым соответствуют подграфы $K_{k_0}^{(0)}$, $K_{k_1}^{(1)},\ldots$, $K_{k_n}^{(n)}$, и приз, представленный вершиной $v_{n+1,1}$, а агент $\mathsf{A}(t)$ $(t\in\mathbf{N})$ является игроком. Вершина v_{ij} $(i\in\mathbf{Z}_{n+1},\ j\in\mathbf{N}_{k_i})$ соответствует партии игры, разыгрываемой на i-м уровне. При проигрыше партии игрок остается на том же уровне игры, а при выигрыше — переходит на следующий уровень графа. При достижении вершины $v_{n+1,1}$ игрок получает приз. Вычислим вероятность того, что игрок $\mathsf{A}(t)$ $(t\in\mathbf{N})$, помещенный в вершину v_{01}, получит приз.

Интерпретация 3. В графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ подграф, определяемый множеством вершин $\bigcup\limits_{i=1}^{n+1}V_{k_i}^{(i)}$, представляет иерархическую структуру должностей отдела организации. Вершина v_{ij} $(i\in\mathbf{N}_n,\ j\in\mathbf{N}_{k_i})$ соответствует некоторой должности i-го ранга в отделе, а вершина $v_{n+1,1}$ — должности руководителя отдела. Агент $\mathsf{A}(t)$ $(t\in\mathbf{N})$, помещенный в вершину v_{01}, представляет молодого специалиста, принимаемого на работу в отдел. Вычислить вероятность того, что он достигнет должности руководителя отдела.

Интерпретация 4. Агент $\mathsf{A}(t)$ $(t\in\mathbf{N})$, помещенный в вершину v_{01}, представляет техническое устройство, получившее команду активироваться. В графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ подграф, определяемый множеством вершин $\bigcup\limits_{i=1}^{n+1}V_{k_i}^{(i)}$, представляет иерархическую структуру уровней активации этого устройства. Вершина v_{ij} $(i\in\mathbf{N}_n,\ j\in\mathbf{N}_{k_i})$ соответствует некоторой ситуации, возможной на i-м уровне активации устройства, а вершина $v_{n+1,1}$ — полной его активации. Вычислить вероятность того, что получившее команду устройство $\mathsf{A}(t)$ $(t\in\mathbf{N})$ будет полностью активировано.

Рассмотрим решение задачи 1.

Пусть $\mathsf{P}(\mathsf{A}(t),G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}\,|\,s(1)=v_{01})$ — вероятность того, что агент $\mathsf{A}(t)$ $(t\in\mathbf{N})$ на графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$, помещенный в вершину v_{01}, достигнет целевой вершины $v_{n+1,1}$, а $\mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}$ — множество всех маршрутов в графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$, идущих из вершины v_{01} в вершину $v_{n+1,1}$, у которых каждая вершина, начиная со второй, расположена в уровне, номер которого не меньше номера уровня, содержащего предыдущую вершину. Тогда

$$\mathsf{P}(A(t), G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}} \mid s(1)=v_{01}) = \sum_{\mathsf{m}\in \mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}} \mathsf{P}_{\mathsf{m}}(A(t), G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}), \quad (1)$$

где $\mathsf{P}_{\mathsf{m}}(A(t), G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}})$ — вероятность того, что агент $A(t)$ $(t\in\mathbf{N})$ на графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ пройдет по маршруту m.

Зафиксируем наборы чисел $(j_1,\ldots,j_n)\in \mathop{\times}\limits_{l=1}^{n} \mathbf{N}_{k_l}$ и $(r_1,\ldots,r_n)\in \mathop{\times}\limits_{l=1}^{n} \mathbf{Z}_+$. Обозначим $\mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_n \\ r_1 & \cdots & r_n\end{pmatrix}$ множество всех маршрутов $\mathsf{m}\in \mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}$, имеющих вид

$$\begin{aligned} \mathsf{m} = v_{01},\ & v_{1j_1} \xrightarrow[h_1^{(1)},\ldots,h_{r_1}^{(1)}]{}, v_{2j_2} \xrightarrow[h_1^{(2)},\ldots,h_{r_2}^{(2)}]{}, \ldots \\ & \ldots, v_{nj_n} \xrightarrow[h_1^{(n)},\ldots,h_{r_n}^{(n)}]{}, v_{n+1,1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $v_{lj_l} \xrightarrow[h_1^{(l)},\ldots,h_{r_l}^{(l)}]{}$ $(l\in\mathbf{N}_n; h_1^{(l)},\ldots,h_{r_l}^{(l)}\in\mathbf{N}_{k_l})$ — маршрут $v_{lj_l}, v_{lh_1^{(l)}},\ldots,v_{lh_{r_l}^{(l)}}$.

Очевидно, что

$$\left|\mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_n \\ r_1 & \cdots & r_n\end{pmatrix}\right| = \prod_{l=1}^{n} k_l^{r_l} \quad ((r_1,\ldots,r_n)\in \mathop{\times}\limits_{l=1}^{n} \mathbf{Z}_+, (j_1,\ldots,j_n)\in \mathop{\times}\limits_{l=1}^{n}\mathbf{N}_{k_l}). \quad (3)$$

Поскольку

$$\mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}} = \bigcup_{(r_1,\ldots,r_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{Z}_+} \ \bigcup_{(j_1,\ldots,j_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{N}_{k_l}} \mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_n \\ r_1 & \cdots & r_n\end{pmatrix}, \quad (4)$$

а множества $\mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_n \\ r_1 & \cdots & r_n\end{pmatrix}$ $((r_1,\ldots,r_n)\in \mathop{\times}\limits_{l=1}^{n} \mathbf{Z}_+, (j_1,\ldots,j_n)\in \mathop{\times}\limits_{l=1}^{n}\mathbf{N}_{k_l})$ попарно не пересекаются, из (1) и (4) вытекает

$$\mathsf{P}(A(t), G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}} \mid s(1)=v_{01}) =$$

$$= \sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{Z}_+} \ \sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{N}_{k_l}} \ \sum_{\mathsf{m}\in \mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}\begin{pmatrix} j_1\ldots j_n \\ r_1\ldots r_n\end{pmatrix}} \mathsf{P}_{\mathsf{m}}(A(t), G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}). \quad (5)$$

Вычислим вероятность $\mathsf{P}_{\mathsf{m}}(A(t), G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}})$, где m — маршрут, определенный равенством (2).

Так как при построении маршрута m осуществляется независимый выбор ребер, имеем

$$\mathsf{P}_{\mathsf{m}}(A(t), G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}) =$$

$$= b_{1j_1}^{(0)}(1)\left(\prod_{l=1}^{n-1} \mathsf{p}(v_{lj_l} \xrightarrow[h_1^{(l)},\ldots,h_{r_l}^{(l)}]{}, v_{l+1,j_{l+1}})\right)\mathsf{p}(v_{nj_n} \xrightarrow[h_1^{(n)},\ldots,h_{r_n}^{(n)}]{}, v_{n+1,1}), \quad (6)$$

где $\mathsf{p}(v_{lj_l} \xrightarrow[h_1^{(l)},\ldots,h_{r_l}^{(l)}]{} , v_{l+1,j_{l+1}})$ $(l \in \mathbf{N}_{n-1})$ (соответственно $\mathsf{p}(v_{nj_n} \xrightarrow[h_1^{(n)},\ldots,h_{r_n}^{(n)}]{} , v_{n+1,1})$) — вероятность построения агентом $\mathsf{A}(t)$ $(t \in \mathbf{N})$, находящимся в вершине v_{lj_l} (соответственно v_{nj_n}), маршрута $v_{lj_l} \xrightarrow[h_1^{(l)},\ldots,h_{r_l}^{(l)}]{} , v_{l+1,j_{l+1}}$ (соответственно $v_{nj_n} \xrightarrow[h_1^{(n)},\ldots,h_{r_n}^{(n)}]{} , v_{n+1,1}$)).

Вычислим вероятности $\mathsf{p}(v_{lj_l} \xrightarrow[h_1^{(l)},\ldots,h_{r_l}^{(l)}]{} , u_{l+1,j_{l+1}})$ $(l \in \mathbf{N}_{n-1})$ и $\mathsf{p}(v_{nj_n} \xrightarrow[h_1^{(n)},\ldots,h_{r_n}^{(n)}]{} , v_{n+1,1})$.

Пусть ω_l $(l \in \mathbf{N}_n)$ и ω_{n+1} — моменты первого достижения агентом $\mathsf{A}(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ соответственно вершин v_{lj_l} и $v_{n+1,1}$. Так как $\omega_1 = 2$ и $\omega_{l+1} = \omega_l + r_l + 1$ $(l \in \mathbf{N}_n)$, имеем

$$(\forall l \in \mathbf{N}_{n-1})(r_l = 0 \Rightarrow \mathsf{p}(v_{lj_l} \xrightarrow[h_1^{(l)},\ldots,h_{r_l}^{(l)}]{} , v_{l+1,j_{l+1}}) = p_{j_l 2}^{(l)}(\omega_{l+1}) b_{j_l j_{l+1}}^{(l)}(\omega_{l+1})), \tag{7}$$

$$r_n = 0 \Rightarrow \mathsf{p}(v_{nj_n} \xrightarrow[h_1^{(n)},\ldots,h_{r_n}^{(n)}]{} , v_{n+1,1}) = p_{j_n 2}^{(n)}(\omega_{n+1}), \tag{8}$$

$$(\forall l \in \mathbf{N}_{n-1})(r_l \ge 1 \Rightarrow \mathsf{p}(v_{lj_l} \xrightarrow[h_1^{(l)},\ldots,h_{r_l}^{(l)}]{} , v_{l+1,j_{l+1}}) = p_{j_1 1}^{(l)}(\omega_l + 1) a_{j_1 h_1^{(l)}}^{(l)}(\omega_l + 1) \times$$

$$\times \left(\prod_{s=1}^{r_l - 1} p_{h_s^{(l)} 1}^{(l)}(\omega_l + s + 1) a_{h_s^{(l)} h_{s+1}^{(l)}}^{(l)}(\omega_l + s + 1) \right) p_{h_{r_l}^{(l)} 2}^{(l)}(\omega_{l+1}) b_{h_{r_l}^{(l)} j_{l+1}}^{(l)}(\omega_{l+1})), \tag{9}$$

$$r_n \ge 1 \Rightarrow \mathsf{p}(v_{nj_n} \xrightarrow[h_1^{(n)},\ldots,h_{r_n}^{(n)}]{} , v_{n+1,1}) = p_{j_n 1}^{(n)}(\omega_n + 1) a_{j_n h_1^{(n)}}^{(n)}(\omega_n + 1) \times$$

$$\times \left(\prod_{s=1}^{r_n - 1} p_{h_s^{(n)} 1}^{(n)}(\omega_n + s + 1) a_{h_s^{(n)} h_{s+1}^{(n)}}^{(n)}(\omega_n + s + 1) \right) p_{h_{r_n}^{(n)} 2}^{(n)}(\omega_{n+1}). \tag{10}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для каждого числа $n \in \mathbf{N}$ и любой такой последовательности натуральных чисел $k_0, k_1, \ldots, k_{n+1}$, что $k_0 = k_{n+1} = 1$, вероятность достижения агентом $\mathsf{A}(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ на графе $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$ целевой вершины $v_{n+1,1}$ при условии, что $s(1) = v_{01}$, вычисляется в соответствии с формулами (5), (6), где вероятности $\mathsf{p}(v_{lj_l} \xrightarrow[h_1^{(l)},\ldots,h_{r_l}^{(l)}]{} , v_{l+1,j_{l+1}})$ $(l \in \mathbf{N}_{n-1})$ и $\mathsf{p}(v_{nj_n} \xrightarrow[h_1^{(n)},\ldots,h_{r_n}^{(n)}]{} , v_{n+1,1})$ вычисляются в соответствии с формулами (7)–(10).

Громоздкость формул (5)–(10) обусловлена тем, что агент $\mathsf{A}(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ — нестационарная система общего вида. Рассмотрим специальный случай, когда $\mathsf{A}(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ — стационарная система (т.е. $P^{(i)}(t) = P^{(i)}$ $(i \in \mathbf{N}_n)$, $A^{(i)}(t) = A^{(i)}$ $(i \in \mathbf{N}_n)$ и $B^{(i)}(t) = B^{(i)}$ $(i \in \mathbf{Z}_n)$ для всех $t \in \mathbf{N}$).

Пример 1. Пусть агент $\mathsf{A}(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ — такая стационарная система, что каждая строка каждой матрицы $P^{(i)}$ $(i \in \mathbf{N}_n)$, $A^{(i)}$ $(i \in \mathbf{N}_n)$ и $B^{(i)}$ $(i \in \mathbf{Z}_n)$ определяет равномерное распределение вероятностей, т.е.

$$P^{(i)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ \vdots & \vdots \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \ (i \in \mathbf{N}_n), \quad A^{(i)} = \begin{pmatrix} k_i^{-1} & \ldots & k_i^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_i^{-1} & \ldots & k_i^{-1} \end{pmatrix} \ (i \in \mathbf{N}_n),$$

$$B^{(i)}=\begin{pmatrix} k_{i+1}^{-1} & \dots & k_{i+1}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i+1}^{-1} & \dots & k_{i+1}^{-1} \end{pmatrix} \quad (i\in \mathbf{Z}_n). \tag{11}$$

Из (7)–(10) вытекает

$$(\forall l\in \mathbf{N}_{n-1})(r_l=0 \Rightarrow \mathsf{p}(v_{lj_l} \xrightarrow[h_1^{(l)},\dots,h_{r_l}^{(l)}]{}, v_{l+1,j_{l+1}})=0.5k_{l+1}^{-1}), \tag{12}$$

$$r_n=0 \Rightarrow \mathsf{p}(v_{nj_n} \xrightarrow[h_1^{(n)},\dots,h_{r_n}^{(n)}]{}, v_{n+1,1})=0.5, \tag{13}$$

$$(\forall l\in \mathbf{N}_{n-1})(r_l\ge 1 \Rightarrow \mathsf{p}(v_{lj_l} \xrightarrow[h_1^{(l)},\dots,h_{r_l}^{(l)}]{}, v_{l+1,j_{l+1}})=(0.5)^{r_l+1}k_l^{-r_l}k_{l+1}^{-1}), \tag{14}$$

$$r_n\ge 1 \Rightarrow \mathsf{p}(v_{nj_n} \xrightarrow[h_1^{(n)},\dots,h_{r_n}^{(n)}]{}, v_{n+1,1})=(0.5)^{r_n+1}k_n^{-r_n}. \tag{15}$$

Из (12) и (14) следует

$$(\forall l\in \mathbf{N}_{n-1})(\forall r_l\in \mathbf{Z}_+)(\mathsf{p}(v_{lj_l} \xrightarrow[h_1^{(l)},\dots,h_{r_l}^{(l)}]{}, v_{l+1,j_{l+1}})=(0.5)^{r_l+1}k_l^{-r_l}k_{l+1}^{-1}), \tag{16}$$

а из (13) и (15) имеем

$$(\forall r_n\in \mathbf{Z}_+)(\mathsf{p}(v_{nj_n} \xrightarrow[h_1^{(n)},\dots,h_{r_n}^{(n)}]{}, v_{n+1,1})=(0.5)^{r_n+1}k_n^{-r_n}). \tag{17}$$

Подставив в (6) $b_{1j_1}^{(0)}=k_1^{-1}$ и использовав формулы (16) и (17), получим

$$\mathsf{P}_{\mathsf{m}}(A(t),G_{k_0,k_1,\dots,k_n,k_{n+1}})=(0.5)^{n+\sum_{l=1}^{n}r_l}\prod_{l=1}^{n}k_l^{-r_l-1}. \tag{18}$$

Подставив (18) в (5) и применив формулу (3), получим

$$\mathsf{P}(A(t),G_{k_0,k_1,\dots,k_n,k_{n+1}}\mid s(1)=v_{01})=$$

$$=\sum_{(r_1,\dots,r_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{Z}_+}\ \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{N}_{k_l}}\ \sum_{\mathsf{m}\in \mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}\binom{j_1\dots j_n}{r_1\dots r_n}}(0.5)^{n+\sum_{l=1}^{n}r_l}\prod_{l=1}^{n}k_l^{-r_l-1}=$$

$$=\sum_{(r_1,\dots,r_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{Z}_+}\ \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{N}_{k_l}}(0.5)^{n+\sum_{l=1}^{n}r_l}\prod_{l=1}^{n}k_l^{-r_l-1}\left(\sum_{\mathsf{m}\in \mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}\binom{j_1\dots j_n}{r_1\dots r_n}}1\right)=$$

$$=\sum_{(r_1,\dots,r_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{Z}_+}\ \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{N}_{k_l}}(0.5)^{n+\sum_{l=1}^{n}r_l}\prod_{l=1}^{n}k_l^{-r_l-1}\left|\mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}\binom{j_1\dots j_n}{r_1\dots r_n}\right|=$$

$$=\sum_{(r_1,\dots,r_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{Z}_+}\ \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{N}_{k_l}}(0.5)^{n+\sum_{l=1}^{n}r_l}\prod_{l=1}^{n}k_l^{-r_l-1}\prod_{l=1}^{n}k_l^{r_l}=$$

$$=\sum_{(r_1,\dots,r_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{Z}_+}(0.5)^{n+\sum_{l=1}^{n}r_l}\prod_{l=1}^{n}k_l^{-1}\left(\sum_{(j_1,\dots,j_n)\in \times_{l=1}^{n}\mathbf{N}_{k_l}}1\right)=$$

$$= \sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in \times_{l=1}^{n} \mathbf{Z}_+} (0.5)^{n+\sum_{l=1}^{n} r_l} \prod_{l=1}^{n} k_l^{-1} \prod_{l=1}^{n} k_l = (0.5)^n \sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in \times_{l=1}^{n} \mathbf{Z}_+} (0.5)^{\sum_{l=1}^{n} r_l} =$$

$$= (0.5)^n \left(1 + \sum_{\substack{(r_1,\ldots,r_n)\in \times_{l=1}^{n} \mathbf{Z}_+ \\ r_1+\ldots+r_n\in \mathbf{N}}} (0.5)^{\sum_{l=1}^{n} r_l} \right). \qquad (19)$$

Используя в (19) формулу для количества упорядоченных разбиений натурального числа на n неотрицательных слагаемых, получаем

$$\mathsf{P}(A(t), G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}} \mid s(1) = v_{01}) = (0.5)^n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (0.5)^m C_{m+n-1}^{n} \right), \qquad (20)$$

где C_{m+n-1}^{n} — число сочетаний из $m+n-1$ по n.

МОДЕЛЬ СРЕДЫ

По аналогии с приведенным выше определим понятие среды в предположении, что агент пассивен, т.е. он только присутствует на графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$, но не производит никаких действий.

Определение 2. Средой на графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ назовем такую динамическую систему $E(t) = (s(t), \{Q^{(i)}(t), C^{(i)}(t), D^{(i)}(t)\}_{i\in \mathbf{N}_n})$ $(t \in \mathbf{N})$, что:

- переменная $s(t) \in \{v_{01}\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} V_{k_i}^{(i)}$ $(t \in \mathbf{N})$ является указателем положения агента $A(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ на графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ в момент t;
- для всех $i \in \mathbf{N}_n$ и $t \in \mathbf{N}$

$$Q^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} q_{11}^{(i)}(t) & q_{12}^{(i)}(t) \\ \vdots & \vdots \\ q_{k_i 1}^{(i)}(t) & q_{k_i 2}^{(i)}(t) \end{pmatrix}, \quad C^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} c_{11}^{(i)}(t) & \cdots & c_{1k_i}^{(i)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k_i 1}^{(i)}(t) & \cdots & c_{k_i k_i}^{(i)}(t) \end{pmatrix},$$

$$D^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} d_{11}^{(i)}(t) & \ldots & d_{1k_{i-1}}^{(i)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k_i 1}^{(i)}(t) & \ldots & d_{k_i k_{i-1}}^{(i)}(t) \end{pmatrix}$$

являются стохастическими матрицами.

Отметим, что из определения 2, в частности, вытекает $D^{(1)}(t) = (\underbrace{1,\ldots,1}_{k_1 \text{ раз}})^{\mathrm{T}}$ $(t \in \mathbf{N})$.

Функционирование среды $E(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ на графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ определим в соответствии со следующими правилами.

Правило 3. Пусть $s(t) = v_{01}$. Тогда $s(t+1) = v_{01}$.

Правило 4. Пусть $s(t) = v_{ij}$ $(i \in \mathbf{N}_n, j \in \mathbf{N}_{k_i})$. Тогда указатель $s(t+1)$:

- останется на i-м уровне графа $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ с вероятностью $q_{j1}^{(i)}(t)$, причем $s(t+1) = v_{ij'}$ $(j' \in \mathbf{N}_{k_i})$ с вероятностью $q_{j1}^{(i)}(t)\, c_{jj'}^{(i)}(t)$;
- будет передвинут на $(i-1)$-й уровень графа $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ с вероятностью $q_{j2}^{(i)}(t)$, причем $s(t+1) = v_{i-1,j'}$ $(j' \in \mathbf{N}_{k_{i-1}})$ с вероятностью $q_{j2}^{(i)}(t) d_{jj'}^{(i)}(t)$.

Из определения 2 и правил 3, 4 вытекают следующие свойства.

1. Среда $E(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ — конечный автономный вероятностный автомат без выхода с переменной структурой.

2. Перевод указателя положения агента в момент t по петле в вершине v_{ij} $(i \in \mathbf{N}, j \in \mathbf{N}_{k_i})$ может интерпретироваться как событие «в момент t среда $E(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ находится в режиме ожидания». Исключение режима ожидания в вершине v_{ij} $(i \in \mathbf{N}, j \in \mathbf{N}_{k_i})$ в моменты $t \in T_0$ $(T_0 \subseteq \mathbf{N})$ эквивалентно условию $(\forall t \in T_0)(c_{jj}^{(i)}(t)=0)$.

3. Выбор в качестве i-го уровня $(i=1,\ldots,n)$ графа $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ любого подграфа $G_i=(V_{k_i},E_i)$ графа $K_{k_i}^{(i)}=(V_{k_i}^{(i)},E_{k_i}^{(i)})$ эквивалентен выполнению условия

$$(\forall j_1,j_2 \in \mathbf{N}_{k_i})(\{v_{ij_1},v_{ij_2}\} \notin E_i \Rightarrow (\forall t \in \mathbf{N})(c_{j_1j_2}^{(i)}(t)=c_{j_2j_1}^{(i)}(t)=0)).$$

Естественно возникает следующая задача.

Задача 2. Вычислить вероятность перевода средой $E(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ указателя $s(1)=v_{ij_i}$ $(i \in \mathbf{N}, j_i \in \mathbf{N}_{k_i})$ положения агента на графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ в начальную вершину v_{01}.

Эта задача имеет следующие содержательные интерпретации.

Интерпретация 5. В графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ подграф, определяемый множеством вершин $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_{k_i}^{(i)}$, представляет иерархическую структуру уровней активации технического устройства, а вершина v_{ij_i} $(i \in \mathbf{N}_{n+1}, j_i \in \mathbf{N}_{k_i})$ — некоторую ситуацию, возможную на i-м уровне активации устройства. Вершина v_{01} соответствует полной деактивации устройства, а вершина $v_{n+1,1}$ — его полной активации, из которой деактивация невозможна. Среда $E(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ определяет все возможные процессы, возникающие при получении устройством команды его деактивации. Вычислить вероятность того, что устройство, находящееся в ситуации, представленной вершиной v_{ij_i} $(i \in \mathbf{N}_{n+1}, j_i \in \mathbf{N}_{k_i})$, при получении им команды будет полностью деактивировано.

Интерпретация 6. Граф $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ представляет иерархическую структуру позиционирования сбыта товара на рынке. Вершина v_{ij_i} $(i \in \mathbf{N}_{n+1}, j_i \in \mathbf{N}_{k_i})$ соответствует некоторой ситуации на i-м уровне позиционирования сбыта, вершина $v_{n+1,1}$ — абсолютному лидерству в сбыте, а вершина v_{01} — уходу товара с рынка. Фирма F — абсолютный лидер в сбыте товара, разработала комплекс мер (действие которых определяется средой $E(t)$ $(t \in \mathbf{N})$) для ослабления позиции конкурентов на рынке. Вычислить вероятность того, что конкурент F_1, находящийся в ситуации v_{ij_i} $(i \in \mathbf{N}_n, j_i \in \mathbf{N}_{k_i})$, будет вытеснен с рынка.

Из сравнения определений 1, 2, а также правил функционирования агента $A(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ и среды $E(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ вытекает, что решение задачи 2 осуществляется по той же схеме, что и решение задачи 1, и состоит в следующем.

Зафиксируем наборы чисел $(r_i,\ldots,r_1) \in \mathop{\times}_{l=0}^{i-1} \mathbf{Z}_+$ и $(j_{i-1},\ldots,j_1) \in \mathop{\times}_{l=1}^{i-1} \mathbf{N}_{k_{i-l}}$.

Обозначим $\mathsf{S}_{v_{ij_i},v_{01}}\begin{pmatrix} j_i \cdots j_1 \\ r_i \ldots r_1 \end{pmatrix}$ множество всех маршрутов вида

$$\mathsf{m}=v_{ij_i} \xrightarrow[h_1^{(i)},\ldots,h_{r_i}^{(i)}]{}, v_{i-1,j_{i-1}} \xrightarrow[h_1^{(i-1)},\ldots,h_{r_{i-1}}^{(i-1)}]{}, \ldots, v_{1j_1} \xrightarrow[h_1^{(1)},\ldots,h_{r_1}^{(1)}]{}, v_{01}, \quad (21)$$

где $v_{lj_l} \xrightarrow[h_1^{(l)}, \ldots, h_{r_l}^{(l)}]{} = v_{lj_l}, v_{lh_1^{(l)}}, \ldots, v_{lh_{r_l}^{(l)}}$ $(l \in \mathbf{N}_i;\, h_1^{(l)}, \ldots, h_{r_l}^{(l)} \in \mathbf{N}_{k_l})$. Отметим, что

$$\left| \mathsf{S}_{v_{ij_i}, v_{01}} \begin{pmatrix} j_i \ldots j_1 \\ r_i \ldots r_1 \end{pmatrix} \right| = \prod_{l=0}^{i-1} k_{i-l}^{r_{i-l}} \quad ((r_i, \ldots, r_1) \in \mathop{\times}_{l=0}^{i-1} \mathbf{Z}_+, (j_{i-1}, \ldots, j_1) \in \mathop{\times}_{l=1}^{i-1} \mathbf{N}_{k_{i-l}}). \quad (22)$$

Вероятность $\mathsf{P}(E(t), G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}} \mid s(1) = v_{ij_i})$ $(i \in \mathbf{N},\, j_i \in \mathbf{N}_{k_i})$ перевода средой $E(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ указателя $s(1) = v_{ij_i}$ положения агента на графе $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$ в начальную вершину v_{01} вычисляется по формуле

$$\mathsf{P}(E(t), G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}} \mid s(1) = v_{ij_i}) =$$

$$= \sum_{(r_i, \ldots, r_1) \in \mathop{\times}_{l=0}^{i-1} \mathbf{Z}_+} \; \sum_{(j_{i-1}, \ldots, j_1) \in \mathop{\times}_{l=0}^{i-1} \mathbf{N}_{k_{i-l}}} \; \sum_{\mathsf{m} \in \mathsf{S}_{v_{01}, v_{n+1,1}} \begin{pmatrix} j_i \ldots j_1 \\ r_i \ldots r_1 \end{pmatrix}} \mathsf{P}_{\mathsf{m}}(E(t), G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}), \quad (23)$$

где $\mathsf{P}_{\mathsf{m}}(E(t), G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}})$ — вероятность того, что сдвиг указателя положения агента из вершины v_{ij_i} в начальную вершину v_{01} осуществляется по маршруту m, определенному формулой (21). Очевидно, что

$$\mathsf{P}_{\mathsf{m}}(E(t), G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}} \mid s(1) = v_{ij_i}) =$$

$$= \left(\prod_{l=0}^{i-2} \mathsf{p}(v_{i-l, j_{i-l}} \xrightarrow[h_1^{(i-l)}, \ldots, h_{r_{i-l}}^{(i-l)}]{}, v_{i-l-1, j_{i-l-1}}) \right) \mathsf{p}(v_{1j_1} \xrightarrow[h_1^{(1)}, \ldots, h_{r_{i-l}}^{(1)}]{}, v_{01}), \quad (24)$$

где $\mathsf{p}(v_{i-l, j_{i-l}} \xrightarrow[h_1^{(i-l)}, \ldots, h_{r_{i-l}}^{(i-l)}]{}, v_{i-l-1, j_{i-l-1}})$ $(l \in \mathbf{Z}_{i-1})$ (соответственно $\mathsf{p}(v_{1j_1} \xrightarrow[h_1^{(1)}, \ldots, h_{r_1}^{(1)}]{}, v_{01})$ — вероятность перемещения средой $E(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ указателя положения агента из вершины $v_{i-l, j_{i-l}}$ (соответственно v_{1j_1}) в вершину $v_{i-l-1, j_{i-l-1}}$ (соответственно v_{01}) по маршруту $v_{i-l, j_{i-l}} \xrightarrow[h_1^{(i-l)}, \ldots, h_{r_{i-l}}^{(i-l)}]{}, v_{i-l-1, j_{i-l-1}}$ (соответственно $v_{1j_1} \xrightarrow[h_1^{(1)}, \ldots, h_{r_1}^{(1)}]{}, v_{01}$).

Пусть $\tilde{\omega}_{i-l}$ $(l \in \mathbf{Z}_{i-1})$ и $\tilde{\omega}_0$ — моменты, в которые указатель положения агента при движении по маршруту m, определенному формулой (21), в первый раз находится соответственно в вершинах $v_{i-l, j_{i-l}}$ и v_{01}. Так как $\tilde{\omega}_i = 1$ и $\tilde{\omega}_{i-l-1} = \tilde{\omega}_{i-l} + r_{i-l} + 1$ $(l \in \mathbf{Z}_{i-1})$, имеем

$$(\forall l \in \mathbf{Z}_{i-1})(r_{i-l} = 0 \Rightarrow \mathsf{p}(v_{i-l, j_{i-l}} \xrightarrow[h_1^{(i-l)}, \ldots, h_{r_{i-l}}^{(i-l)}]{}, v_{i-l-1, j_{i-l-1}}) =$$

$$= q_{j_{i-l}2}^{(i-l)}(\tilde{\omega}_{i-l-1}) d_{j_{i-l}j_{i-l-1}}^{(i-l)}(\tilde{\omega}_{i-l-1})), \quad (25)$$

$$r_1 = 0 \Rightarrow \mathsf{p}(v_{1j_1} \xrightarrow[h_1^{(1)}, \ldots, h_{r_1}^{(1)}]{}, v_{01}) = q_{j_1 2}^{(1)}(\tilde{\omega}_0), \quad (26)$$

$$(\forall l \in \mathbf{Z}_{i-1})(r_{i-l} \ge 1 \Rightarrow \mathsf{p}(v_{i-l, j_{i-l}} \xrightarrow[h_1^{(i-l)}, \ldots, h_{r_{i-l}}^{(i-l)}]{}, v_{i-l-1, j_{i-l-1}}) = q_{j_{i-l}1}^{(i-l)}(\tilde{\omega}_{i-l} + 1) \times$$

$$\times c_{j_{i-l}h_1^{(i-l)}}^{(i-l)}(\tilde{\omega}_{i-l} + 1) \left(\prod_{s=1}^{r_{i-l}-1} q_{h_s^{(i-l)}1}^{(i-l)}(\tilde{\omega}_{i-l} + s + 1) c_{h_s^{(i-l)}h_{s+1}^{(i-l)}}^{(i-l)}(\tilde{\omega}_{i-l} + s + 1) \right) \times$$

$$\times q_{h_{r_{i-l}}^{(i-l)}2}^{(i-l)}(\tilde{\omega}_{i-l-1}) d_{h_{r_{i-l}}^{(i-l)}j_{i-l-1}}^{(i-l)}(\tilde{\omega}_{i-l-1})), \quad (27)$$

$$r_1 \ge 1 \Rightarrow \mathrm{p}(v_{1j_1} \xrightarrow[h_1^{(1)},\ldots,h_{r_1}^{(1)}]{} , v_{01}) = q_{j_1 1}^{(1)}(\tilde{\omega}_1+1) c_{j_1 h_1^{(1)}}^{(1)}(\tilde{\omega}_1+1) \times$$

$$\times \left(\prod_{s=1}^{r_1-1} q_{h_s^{(1)} 1}^{(1)}(\tilde{\omega}_1+s+1) c_{h_s^{(1)} h_{s+1}^{(1)}}^{(1)}(\tilde{\omega}_1+s+1) \right) q_{h_{r_1}^{(1)} 2}^{(1)}(\tilde{\omega}_0). \qquad (28)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Для каждого числа $n \in \mathbf{N}$ и любой такой последовательности натуральных чисел $k_0, k_1, \ldots, k_{n+1}$, что $k_0 = k_{n+1} = 1$, вероятность перевода средой $E(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ указателя $s(1) = v_{ij_i}$ $(i \in \mathbf{N},\, j_i \in \mathbf{N}_{k_i})$ положения агента на графе $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$ в начальную вершину v_{01} вычисляется в соответствии с формулами (23) и (24), где вероятности $\mathrm{p}(v_{i-l, j_{i-l}} \xrightarrow[h_1^{(i-l)},\ldots,h_{r_{i-l}}^{(i-l)}]{} , v_{i-l-1, j_{i-l-1}})$ $(l \in \mathbf{Z}_{i-1})$ и $\mathrm{p}(v_{1j_1} \xrightarrow[h_1^{(1)},\ldots,h_{r_1}^{(1)}]{} , v_{01})$ определяются в соответствии с формулами (25)–(28).

Громоздкость формул (23)–(28) обусловлена тем, что среда $E(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ — нестационарная система общего вида. Рассмотрим специальный случай, когда среда $E(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ — стационарная система (т.е. $Q^{(i)}(t) = Q^{(i)}$, $C^{(i)}(t) = C^{(i)}$ и $D^{(i)}(t) = D^{(i)}$ для всех $i \in \mathbf{N}_n$, $t \in \mathbf{N}$).

Пример 2. Пусть среда $E(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ является такой стационарной системой, что каждая строка каждой из матриц $Q^{(i)}$, $C^{(i)}$ и $D^{(i)}$ определяет равномерное распределение вероятностей для всех $i \in \mathbf{N}_n$, т.е.

$$Q^{(i)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ \vdots & \vdots \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \ (i \in \mathbf{N}_n), \quad C^{(i)} = \begin{pmatrix} k_i^{-1} & \ldots & k_i^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_i^{-1} & \ldots & k_i^{-1} \end{pmatrix} \ (i \in \mathbf{N}_n),$$

$$D^{(i)} = \begin{pmatrix} k_{i-1}^{-1} & \ldots & k_{i-1}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i-1}^{-1} & \ldots & k_{i-1}^{-1} \end{pmatrix} \ (i \in \mathbf{N}_n). \qquad (29)$$

Выполняя операции, как при выводе формул (16) и (17), получаем

$$(\forall l \in \mathbf{Z}_{i-1})(\forall r_{i-l} \in \mathbf{Z}_+)(\mathrm{p}(v_{i-l, j_{i-l}} \xrightarrow[h_1^{(i-l)},\ldots,h_{r_{i-l}}^{(i-l)}]{} , v_{i-l-1, j-l-1}) =$$

$$= (0.5)^{r_{i-l}+1} k_{i-l}^{-r_{i-l}} k_{i-l-1}^{-1}), \qquad (30)$$

$$(\forall r_1 \in \mathbf{Z}_+)(\mathrm{p}(v_{1j_1} \xrightarrow[h_1^{(1)},\ldots,h_{r_1}^{(1)}]{} , v_{01}) = (0.5)^{r_1+1} k_1^{-r_1}). \qquad (31)$$

Применив в (24) формулы (30) и (31), получим

$$\mathrm{P_m}(E(t), G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}) = (0.5)^{i + \sum_{l=0}^{i-1} r_{i-l}} \left(\prod_{l=0}^{i-1} k_{i-l}^{-r_{i-l}} \right) \prod_{l=1}^{i-1} k_{i-l}^{-1}. \qquad (32)$$

Подставив (32) в (23) и использовав формулу (22), по аналогии с выводом формулы (20) получим

$$\mathrm{P}(E(t), G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}} \mid s(1) = v_{ij_j}) = (0.5)^i \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (0.5)^m C_{m+i-1}^i \right). \qquad (33)$$

Поскольку агент $\mathcal{A}(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ и среда $\mathcal{E}(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ на графе $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$ — автоматы, модель взаимодействия агента со средой естественно определить в терминах некоторой композиции этих автоматов.

Определение 3. Моделью взаимодействия агента $\mathcal{A}(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ и среды $\mathcal{E}(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ на графе $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$ назовем такую динамическую систему

$$\mathcal{M}(t) = (s(t), \{(P^{(i)}(t), A^{(i)}(t), B^{(i)}(t))\}_{i \in \mathbf{Z}_{n+1}},$$

$$\{(Q^{(i)}(t), C^{(i)}(t), D^{(i)}(t))\}_{i \in \mathbf{N}_n}, \mathrm{A}(t), \mathrm{B}(t), \Gamma(t), \Delta(t)),$$

что:

• $\mathcal{A}(t) = (s(t), \{(P^{(i)}(t), A^{(i)}(t), B^{(i)}(t))\}_{i \in \mathbf{Z}_{n+1}})$ $(t \in \mathbf{N})$ — агент на графе $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$;

• $\mathcal{E}(t) = (s(t), \{Q^{(i)}(t), C^{(i)}(t), D^{(i)}(t))\}_{i \in \mathbf{N}_n})$ $(t \in \mathbf{N})$ — среда на графе $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$;

• $\mathrm{A}(t) = (\boldsymbol{\alpha}_1(t), \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n(t))$ $(t \in \mathbf{N})$, где $\boldsymbol{\alpha}_i(t) = (\alpha_{i1}(t), \ldots, \alpha_{ik_i}(t))^{\mathrm{T}}$ $(i \in \mathbf{N}_n)$, причем $0 \le \alpha_{ij}(t) < 1$ для всех $j \in \mathbf{N}_{k_i}$;

• $\mathrm{B}(t) = (\boldsymbol{\beta}_1(t), \ldots, \boldsymbol{\beta}_n(t))$ $(t \in \mathbf{N})$, где $\boldsymbol{\beta}_i(t) = (\beta_{i1}(t), \ldots, \beta_{ik_i}(t))^{\mathrm{T}}$ $(i \in \mathbf{N}_n)$, причем $0 \le \beta_{ij}(t) < 1$ для всех $j \in \mathbf{N}_{k_i}$;

• $\Gamma(t) = (\boldsymbol{\gamma}_1(t), \ldots, \boldsymbol{\gamma}_n(t))$ $(t \in \mathbf{N})$, где $\boldsymbol{\gamma}_i(t) = (\gamma_{i1}(t), \ldots, \gamma_{ik_i}(t))^{\mathrm{T}}$ $(i \in \mathbf{N}_n)$, причем $0 \le \gamma_{ij}(t) < 1$ для всех $j \in \mathbf{N}_{k_i}$;

• $\Delta(t) = (\boldsymbol{\delta}_1(t), \ldots, \boldsymbol{\delta}_n(t))$ $(t \in \mathbf{N})$, где $\boldsymbol{\delta}_i(t) = (\delta_{i1}(t), \ldots, \delta_{ik_i}(t))^{\mathrm{T}}$ $(i \in \mathbf{N}_n)$, причем $0 \le \delta_{ij}(t) < 1$ для всех $j \in \mathbf{N}_{k_i}$.

Функционирование системы $\mathcal{M}(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ определим в терминах игры двух лиц (агента и среды) на графе $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$ со «штрафами», в которой агент и среда осуществляют свои ходы соответственно в нечетные и четные моменты времени, а «ущерб противнику» наносит игрок, совершающий ход. Такая игра определяется следующими правилами.

Правило 5. В первый такой момент $t \ge 2$, что $s(t) \in \{v_{01}, v_{n+1,1}\}$, игра заканчивается. Если $s(t) = v_{01}$, то партию выиграла среда, а если $s(t) = v_{n+1,1}$ — то агент.

Правило 6. Пусть $s(t) = v_{ij}$ $(i \in \mathbf{Z}_{n+1}, j \in \mathbf{N}_{k_i})$ и $t = 2m-1$ $(m \in \mathbf{N})$. Тогда к $(t+1)$-му моменту агент:

• останется на i-м уровне графа $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$ с вероятностью $p_{j1}^{(i)}(t)$, причем $s(t+1) = v_{ij'}$ $(j' \in \mathbf{N}_{k_i})$ с вероятностью $p_{j1}^{(i)}(t)\, a_{jj'}^{(i)}(t)$,

$$s(t+1) = v_{ij'} \Rightarrow (\forall t' > t)(q_{j'1}^{(i)}(t') := \min\{q_{j'1}^{(i)}(t') + \alpha_{ij'}(t'), 1\} \&$$

$$\& \, q_{j'2}^{(i)}(t') := \max\{q_{j'2}^{(i)}(t') - \alpha_{ij'}(t'), 0\});$$

• перейдет на $(i+1)$-й уровень графа $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$ с вероятностью $p_{j2}^{(i)}(t)$, причем $s(t+1) = v_{i+1,j'}$ $(j' \in \mathbf{N}_{k_{i+1}})$ с вероятностью $p_{j2}^{(i)}(t) b_{jj'}^{(i)}(t)$,

$$s(t+1) = v_{i+1,j'} \Rightarrow (\forall t' > t)(q_{j'1}^{(i+1)}(t') := \min\{q_{j'1}^{(i+1)}(t') + \beta_{i+1,j'}(t'), 1\} \&$$

$$\& \, q_{j'2}^{(i+1)}(t') := \max\{q_{j'2}^{(i+1)}(t') - \beta_{i+1,j'}(t'), 0\}).$$

Правило 7. Пусть $s(t)=v_{ij}$ $(i\in \mathbf{N}_n,\ j\in \mathbf{N}_{k_i})$ и $t=2m$ $(m\in \mathbf{N})$. Тогда к $(t+1)$-му моменту агент:

• останется на i-м уровне графа $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ с вероятностью $q_{j1}^{(i)}(t)$, причем $s(t+1)=v_{ij'}$ $(j'\in \mathbf{N}_{k_i})$ с вероятностью $q_{j1}^{(i)}(t)\,c_{jj'}^{(i)}(t)$,

$$(\forall j\in \mathbf{N}_{k_i})(\forall t'>t)(p_{j1}^{(i)}(t'):=\min\{p_{j1}^{(i)}(t')+\gamma_{ij}(t'),1\}\,\&$$

$$\&\ p_{j2}^{(i)}(t'):=\max\{p_{j2}^{(i)}(t')-\gamma_{ij}(t'),0\});$$

• перейдет на $(i-1)$-й уровень графа $G_{k_0,\,k_1,\,\ldots,\,k_n,\,k_{n+1}}$ с вероятностью $q_{j2}^{(i)}(t)$, причем $s(t+1)=v_{i-1,j'}$ $(j'\in \mathbf{N}_{k_{i+1}})$ с вероятностью $q_{j2}^{(i)}(t)\,d_{jj'}^{(i)}(t)$,

$$(\forall j\in \mathbf{N}_{k_{i-1}})(\forall t'>t)(p_{j1}^{(i-1)}(t'):=\min\{p_{j1}^{(i-1)}(t')+\delta_{i-1,j}(t'),1\}\,\&$$

$$\&\ p_{j2}^{(i-1)}(t'):=\max\{p_{j2}^{(i-1)}(t')-\delta_{i-1,j}(t'),0\}).$$

Естественно возникает следующая задача.

Задача 3. Найти вероятность $\mathsf{P}(\mathit{M}(t),G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}})$ перевода системой $\mathit{M}(t)$ $(t\in \mathbf{N})$ указателя положения агента на графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ из вершины v_{01} в вершину $v_{n+1,1}$.

Эта задача имеет следующую содержательную интерпретацию.

Интерпретация 7. В графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ вершина $v_{n+1,1}$ представляет компьютерную сеть с критической областью применения, а вершина v_{01} — внешнюю среду, содержащую вредоносную программу, которая, достигнув компьютерной сети, осуществляет дестабилизацию ее функционирования. Подграф, определяемый множеством вершин $\bigcup_{i=1}^{n} V_{k_i}^{(i)}$, представляет сеть устройств, содержащих эшелонированную систему $\{(Q^{(i)}(t),C^{(i)}(t),D^{(i)}(t))\}_{i\in \mathbf{N}_n}$ $(t\in \mathbf{N})$ защиты компьютерной сети (i-й уровень $(i\in \mathbf{N}_n)$ системы защиты расположен на подграфе $K_{k_i}^{(i)}$). Система $\{(P^{(i)}(t),A^{(i)}(t),B^{(i)}(t))\}_{i\in \mathbf{Z}_{n+1}}$ $(t\in \mathbf{N})$ определяет действия вредоносной программы, созданной для преодоления системы защиты компьютерной сети. Вычислить вероятность того, что вредоносная программа достигнет компьютерной сети.

Если $\mathit{M}(t)$ $(t\in \mathbf{N})$ — нестационарная система общего вида, то решение задачи 3 осуществляется по следующей схеме. Рассматривается множество $\mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}$ всех маршрутов в графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$, идущих из вершины v_{01} в вершину $v_{n+1,1}$. Для каждого маршрута $\mathsf{m}\in \mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}$ находятся условия $\mathsf{c_m}$, при которых перевод указателя положения агента по этому маршруту имеет положительную вероятность $\mathsf{p}(\mathsf{m}\,|\,\mathsf{c_m})$. Находится множество $\mathsf{U}_{v_{01},v_{n+1,1}}=\{\mathsf{u}_{v_{01},v_{n+1,1}}^{(i)}\,|\,i\in I\}$ всех таких максимальных (по включению) подмножеств множества $\mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}$, что для каждого $i\in I$ условия, соответствующие маршрутам, принадлежащим множеству $\mathsf{u}_{v_{01},v_{n+1,1}}^{(i)}$, попарно не противоречивы. Решение задачи 3 имеет вид

$$\bigwedge_{\mathsf{m}\in \mathsf{u}_{v_{01},v_{n+1,1}}^{(i)}} \mathsf{c_m} \Rightarrow \mathsf{P}_{\mathit{M}(t)}=\sum_{\mathsf{m}\in \mathsf{u}_{v_{01},v_{n+1,1}}^{(i)}} \mathsf{p}(\mathsf{m}\,|\,\mathsf{c_m})\ \ (i\in I)\,. \tag{34}$$

Формула (34) малозначима как с теоретической, так и прикладной точки зрения. Чтобы исключить такую ситуацию, естественно выделить во множестве $\mathsf{S}_{v_{01},v_{n+1,1}}$ некоторое обозримое подмножество, представляющее интерес. Таковым является множество всех кратчайших маршрутов агента $A(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ из начальной вершины v_{01} в целевую вершину $v_{n+1,1}$, которые могут быть реализованы в системе $M(t)$ $(t \in \mathbf{N})$. С учетом сказанного дадим следующее определение.

Определение 4. Блицкригом агента $A(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ в системе $M(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ назовем переход им из начальной вершины v_{01} в целевую вершину $v_{n+1,1}$ по маршруту длиной $2n+1$.

С учетом определения 4 переформулируем задачу 3 следующим образом.

Задача 4. Вычислить вероятность $\mathsf{P}^{BK}(M(t), G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}})$ перевода системой $M(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ указателя положения агента $A(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ на графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ из вершины v_{01} в вершину $v_{n+1,1}$ при условии, что агент реализует блицкриг.

Рассмотрим решение задачи 4.

Пусть $\mathsf{S}^{BK}_{v_{01},v_{n+1,1}}$ — множество всех маршрутов, по которым агент $A(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ реализует блицкриг в системе $M(t)$ $(t \in \mathbf{N})$. Тогда

$$\mathsf{P}^{BK}(M(t), G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}) = \sum_{\mathsf{m} \in \mathsf{S}^{BK}_{v_{01},v_{n+1,1}}} \mathsf{P}_{\mathsf{m}}(M(t), G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}), \tag{35}$$

где $\mathsf{P}_{\mathsf{m}}(M(t), G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}})$ — вероятность того, что блицкриг реализован по маршруту m.

Из правил 5–7 вытекает, что среди маршрутов длиной $2n+1$, идущих в графе $G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}$ из вершины v_{01} в вершину $v_{n+1,1}$, системой $M(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ могут быть реализованы только маршруты вида

$$\mathsf{m} = v_{01}, v_{1j_1^{(1)}}, v_{1j_2^{(1)}}, v_{2j_1^{(2)}}, v_{2j_2^{(2)}}, \ldots, v_{nj_1^{(n)}}, v_{nj_2^{(n)}}, v_{n+1,1}. \tag{36}$$

При этом для маршрута m, определенного формулой (36), имеем

$$\mathsf{P}_{\mathsf{m}}(M(t), G_{k_0,k_1,\ldots,k_n,k_{n+1}}) = b^{(0)}_{1j_1^{(1)}}(1)\tilde{q}^{(1)}_{j_1^{(1)}1}(2)c^{(1)}_{j_1^{(1)}j_2^{(1)}}(2) \times$$

$$\times \left(\prod_{l=1}^{n-1} \tilde{p}^{(l)}_{j_2^{(l)}2}(2l+1) b^{(l)}_{j_2^{(l)}j_1^{(l+1)}}(2l+1) \tilde{q}^{(l+1)}_{j_1^{(l+1)}1}(2l+2) c^{(l+1)}_{j_1^{(l+1)}j_2^{(l+1)}}(2l+2) \right) \tilde{p}^{(n)}_{j_2^{(n)}2}(2n+1), \tag{37}$$

где $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ означает, что вероятности пересчитаны в соответствии с правилами 6 и 7.

Множество $\mathsf{S}^{BK}_{v_{01},v_{n+1,1}}$ состоит из всех таких маршрутов m, определенных формулой (36), что

$$b^{(0)}_{1j_1^{(1)}}(1) > 0 \,\&\, (\forall l \in \mathbf{N}_{n-1})(b^{(l)}_{j_2^{(l)}j_1^{(l+1)}}(2l+1) > 0) \,\&\, (\forall l \in \mathbf{N}_n)(c^{(l)}_{j_1^{(l)}j_2^{(l)}}(2l) > 0), \tag{38}$$

$$(\forall l \in \mathbf{N}_n)(\tilde{p}^{(l)}_{j_2^{(l)}2}(2l+1) > 0 \,\&\, \tilde{q}^{(l)}_{j_1^{(l)}1}(2l) > 0).$$

Из правил 5–7 вытекает

$$(\forall l \in \mathbf{N}_n)(\tilde{p}^{(l)}_{j_2^{(l)}2}(2l+1) > 0) \Leftrightarrow (\forall l \in \mathbf{N}_n)(p^{(l)}_{j_2^{(l)}2}(2l+1) > \gamma_{lj_2^{(l)}}(2l+1)), \tag{39}$$

$$(\forall l \in \mathbf{N}_n)(\tilde{q}^{(l)}_{j_1^{(l)}1}(2l) > 0) \Leftrightarrow (\forall l \in \mathbf{N}_n)(\min\{q^{(l)}_{j_1^{(l)}1}(2l), \beta_{lj_1^{(l)}}(2l)\} > 0). \tag{40}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Для каждого числа $n \in \mathbf{N}$ и любой такой последовательности натуральных чисел $k_0, k_1, \ldots, k_{n+1}$, что $k_0 = k_{n+1} = 1$, вероятность $\mathsf{P}^{BK}(M(t), G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}})$ перевода системой $M(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ указателя положения агента $A(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ на графе $G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}$ из вершины v_{01} в вершину $v_{n+1,1}$ при условии, что агент реализует блицкриг, вычисляется в соответствии с формулами (35)–(37). При этом $\mathsf{P}^{BK}(M(t), G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}) > 0$ тогда и только тогда, когда существует последовательность вершин $v_{1 j_1^{(1)}}, v_{1 j_2^{(1)}}, v_{2 j_1^{(2)}}, v_{2 j_2^{(2)}}, \ldots, v_{n j_1^{(n)}}, v_{n j_2^{(n)}}$, удовлетворяющая условиям (38)–(40).

Пример 3. Пусть $M(t)$ $(t \in \mathbf{N})$ — такая система, что $\boldsymbol{\beta}_i(t) = \boldsymbol{\gamma}_i(t) = (\underbrace{0.25k_i^{-1}, \ldots, 0.25k_i^{-1}}_{k_i \text{ раз}})^{\mathrm{T}}$ $(i \in \mathbf{N}_n)$, $P^{(i)}(t) = P^{(i)}$ $(i \in \mathbf{N}_n)$, $B^{(i)}(t) = B^{(i)}$ $(i \in \mathbf{Z}_n)$, $Q^{(i)}(t) = Q^{(i)}$ $(i \in \mathbf{N}_n)$ и $C^{(i)}(t) = C^{(i)}$ $(i \in \mathbf{N}_n)$ для всех $t \in \mathbf{N}$, где матрицы $P^{(i)}$ и $B^{(i)}$ определены равенствами (11), а матрицы $Q^{(i)}$ и $C^{(i)}$ — равенствами (29). Подставив данные в (37), получим, что для любого маршрута m, определенного формулой (36), имеем

$$\mathsf{P}_{\mathsf{m}}(M(t), G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}) = 0.25 k_1^{-2}(2 + k_1^{-1}) \times$$

$$\times \left(\prod_{l=2}^{n} (0.25)^2 (4 - k_l^{-2}) k_l^{-2} \right) 0.25 (2 - k_n^{-1}) =$$

$$= (0.25)^{2n} (2 + k_1^{-1})(2 - k_n^{-1}) \left(\prod_{l=2}^{n-1} (4 - k_l^{-2})^2 \right) \left(\prod_{l=1}^{n} k_l^{-2} \right). \tag{41}$$

Из (36) и (41) вытекает

$$| \mathsf{S}^{BK}_{v_{01}, v_{n+1,1}} | = \prod_{l=1}^{n} k_l^2. \tag{42}$$

Подставив (41) и (42) в (35), получим

$$\mathsf{P}_{\mathsf{m}}(M(t), G_{k_0, k_1, \ldots, k_n, k_{n+1}}) = (0.25)^{2n} (2 + k_1^{-1})(2 - k_n^{-1}) \prod_{l=2}^{n} (4 - k_l^{-2}).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена и исследована дискретная нестационарная модель взаимодействия агента с противодействующей ему эшелонированной средой, представленная в виде композиции двух конечных вероятностных автоматов с переменной структурой. Предложенная композиция автоматов является игрой двух лиц, в которой ущерб противнику наносит игрок, делающий ход.

Полученные формулы для вероятности достижения агентом цели достаточно громоздки в силу общности модели. Выделение подкласса моделей агента и среды, предназначенного для решения нетривиальных прикладных и/или теоретических задач при условии, что существенно упрощаются формулы для вероятности достижения агентом цели, представляет одно из возможных направлений дальнейших исследований.

Рассмотренная модель адекватно характеризует «безусловное» взаимодействие, при котором все необходимые программы действий «зашиты» в модели агента и среды до начала их взаимодействия. Для организации «адаптивного» взаимодействия необходимо в явном виде представить механизмы «обучения» агента и среды. Разработка таких механизмов представляет другое направление исследований. Еще одним направлением является обобщение полученных результатов на мультиагентные системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hewitt C. PLANNER: a language for proving theorems in robots // Proc. of the 1st Intern. Joint Conf. on AI (IJCAI-69). — Washington, 1969. — P. 295–301.
2. Hewitt C., Bishop P., Steiger R. A universal modular ACTOR formalism for artificial intelligence // Proc. of the 3rd Intern. Joint Conf. on AI (IJCAI-73). — Stanford, 1973. — P. 235–245.
3. Цетлин М.Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. — М.: Наука, 1969. — 316 с.
4. Фогель Л., Оуэнс А., Уолш М. Искусственный интеллект и эволюционное моделирование. — М.: Мир, 1969. — 230 с.
5. Варшавский В.И. Коллективное поведение автоматов. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
6. Срагович В.Г. Теория адаптивных систем. — М.: Наука, 1976. — 319 с.
7. Lenat D.B. On automated scientific theory formation: a case study using the AM program // Machine Intelligence. — 1977. — **9.** — P. 251–256.
8. Lesser V.R., Wileden J.C. Issues in the design of tools for distributed software system development // Software Development Tools / W.E. Riddle, R. Fairley (Eds.). — Springer-Verlag, 1980. — P. 1104–1113.
9. Shoham Y. Agent-oriented programming // Artificial Intelligence. — 1993. — **60**, N 1. — P. 51– 92.
10. Vogiatzis G., MacGillivray I., Chli M. A probabilistic model for trust and reputation // Proc. of "The 9th Intern. Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems." — 2010. — P. 225–232.
11. Кондратьев М.А. Методы прогнозирования и модели распространения заболеваний // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — № 5. — С. 863–882.
12. Тимофеев А.В., Сырцев А.В. Модели и методы маршрутизации потоков данных в телекоммуникационных системах с изменяющейся динамикой. — М.: Новые технологии, 2005. — 85 с.
13. Alon N., Feldman M., Procaccia A.D., Tennenholtz M. A note on competitive diffusion through social networks // Information Processing Letters. — 2010. — N 6. — P. 221–225.
14. Formal approaches to agent-based systems // LNAI. — 2005. — **3228**. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. — 290 p.
15. Fraigniaud P., Ilcinkas D., Peer G. et al. Graph exploration by a finite automaton // Theor. Comput. Sci. — 2005. — **345**, N 2-3. — P. 331–344.
16. Kranakis E., Krizanc D., Rajsbaum S. Mobile agent rendezvous: A survey // LNCS. — 2006. — **4056.** — P. 1–9.
17. Abbas S., Mosbah M., Zemmari A. A probabilistic model for distributed merging of mobile agents // Proc. of the 2nd Intern. Workshop on Verification and Evaluation of Computer and Communication Systems. — 2008. — P. 1–10.
18. Jiang A.X., Leyton-Brown K., Bhat N.A.R. Action-graph games // Games and Economic Behavior. — 2010. — **71**. — P. 141–173.
19. Поспелов Д.А. От коллектива автоматов к мультиагентным системам // Proc. of the Intern. Workshop "Distributed Artificial Intelligence and Multi-Agent Systems." — 1997. — St. Petersburg, 1997. — P. 319–325.
20. Bianco A., de Alfaro L. Model checking of probabilistic and nondeterministic systems // LNCS. — 1995. — **1026.** — P. 499–513.
21. Валиев М.К., Дехтярь М.И. О сложности верификации недетерминированных вероятностных мультиагентных систем // Моделирование и анализ информационных систем. — 2010. — № 4. — С. 41–50.

Поступила 06.04.2015