



Б.Е. ПАНЧЕНКО, И.Н. САЙКО

УДК 004.652, 539.3

**ВЫСОКОТОЧНЫЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ  
НАПРЯЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ  
УПРУГИХ ВОЛН С СИСТЕМОЙ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЕЙ  
В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

**Аннотация.** Рассмотрена схема высокоточного параллельного решения задачи о дифракции упругих волн на системе цилиндрических полостей некруговой формы. Задача сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений, которая реализована численно. Приведены зависимости напряжений на границе полостей от динамических и геометрических характеристик. Впервые приведены высокоточные значения максимальных напряжений на контурах отверстий от воздействия  $P$ - и  $SV$ -волн.

**Ключевые слова:** динамические задачи теории упругости, изотропные среды с произвольными отверстиями, волны плоской деформации, сингулярные интегральные уравнения, параллельные вычисления.

**ВВЕДЕНИЕ**

Концентрации динамических напряжений вблизи различного рода препятствий [1] представляют значительный интерес при проектировании современных конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок.

Задачи дифракции плоских гармонических волн на цилиндрических неоднородностях произвольного поперечного сечения изучались многими авторами. В работе [2] использован метод разложения в ряд по собственным функциям. В [3] построены интегральные представления для упругих потенциалов, через которые выражаются компоненты вектора перемещений и тензора напряжений. В настоящей статье развивается методика, предложенная в [4, 5], где основной характеристикой напряженно-деформированного состояния выступает вектор перемещений.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИФРАКЦИИ**

Рассмотрим в неограниченной изотропной среде  $D$  систему бесконечных вдоль оси  $OZ$  полых цилиндров, поперечное сечение которых ограничено замкнутыми (без общих точек) контурами  $L_j, j=1, l$ , типа Ляпунова;  $L$  — совокупность контуров (рис. 1).

Пусть из бесконечности набегают на цилиндры монохроматическая  $P$ -волна ( $P$ -случай)

$$U_1^{(0)} = 0, U_2^{(0)} = \tau e^{-i\gamma_1 y}, \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1)$$

или  $SV$ -волна ( $SV$ -случай)

$$U_1^{(0)} = \tau e^{-i\gamma_2 y}, U_2^{(0)} = 0, \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (1a)$$

© Б.Е. Панченко, И.Н. Сайко, 2015

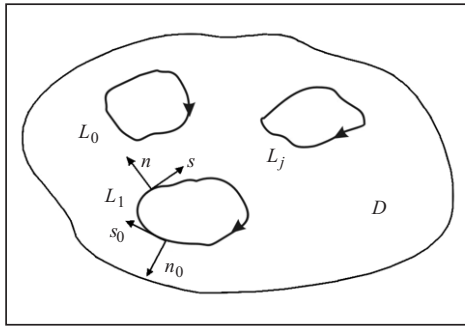


Рис. 1

Здесь  $c_1, c_2$  — скорости продольной и поперечной волн соответственно,  $\omega$  — частота колебаний,  $t$  — время,  $\lambda$  и  $\mu$  — постоянные Лямэ,  $\rho$  — плотность среды,  $i$  — мнимая единица ( $i^2 = -1$ ), зависимость от времени выражается множителем  $e^{-i\omega t}$ .

В результате взаимодействия входящей волны с каждой цилиндрической полостью возникает сложное волновое поле. Амплитуды отраженных

$$U = U_1^{(0)} + U_1, \quad V = U_2^{(0)} + U_2.$$

продольной и поперечной волн перемещений обозначим  $U_1$  и  $U_2$ . Тогда общее поле амплитуд перемещений имеет вид

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 U &= 0, \\ \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 V &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Амплитудные значения напряжений связаны с амплитудами перемещений  $U$  и  $V$  формулами, при этом  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ :

$$\begin{aligned} \tau_{11} + \tau_{22} &= 2(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial(U + iV)}{\partial z} + \frac{\partial(U - iV)}{\partial \bar{z}} \right), \\ \tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12} &= -4\mu \frac{\partial(U - iV)}{\partial z}, \quad \tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12} = -4\mu \frac{\partial(U + iV)}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Как указано выше,  $L_j, j = \overline{1, l}$ , — некоторая замкнутая кривая в поперечном сечении каждой цилиндрической полости. Для упрощения выражений индекс  $j$  опустим. Обозначим  $S_1$  и  $S_2$  амплитуды тангенциальной и нормальной компонент вектора напряжений на  $L$ , т.е. на любой кривой из  $L$ -совокупности. Тогда в произвольной точке  $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$  эти напряжения выражаются через компоненты тензора амплитуд напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned} 2i(S_1 + iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22})e^{i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12})e^{-i\varphi_0}, \\ -2i(S_1 - iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22})e^{-i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12})e^{i\varphi_0}, \end{aligned}$$

где  $\varphi_0$  — угол положительной касательной к  $L$  в точке  $\zeta_0 \in L$  с осью  $Ox$ .

На границе любого инородного включения представляют интерес распределения компонент  $\tau_{s_0}, \tau_{n_0}, \tau_{n_0 s_0}$  тензора амплитуд напряжений по формулам

$$\begin{aligned} \tau_{n_0} &= S_1 \sin \varphi_0 - S_2 \cos \varphi_0, \quad \tau_{s_0} = (\tau_{11} + \tau_{22}) - \tau_{n_0}, \\ \tau_{n_0 s_0} &= S_1 \cos \varphi_0 + S_2 \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Однако на границе отверстий ненулевыми будут только напряжения  $\tau_{s_0}$ . Запишем интегральные представления амплитуд перемещений возмущенного поля, на основании которых будем решать поставленную задачу дифракции. На общем контуре  $L$ -совокупности они имеют вид (суммирование по  $j$ )

$$U_m(x, y) = \int_L U_m^{(k)}(x, y, \xi, \eta) f_k(s) ds,$$

$$\tau_{mn}(x, y) = \int_L \tau_{mn}^{(k)}(x, y, \xi, \eta) f_k(s) ds, \quad m, n, k = 1, 2. \quad (5)$$

Здесь  $f_k(s)$  — неизвестные функции,  $U_m^{(k)}$  — функции Грина, представляющие собой амплитуды перемещений в среде при действии гармонической сосредоточенной силы, приложенной в точке  $\zeta = \xi + i\eta \in L$  и направленной вдоль оси  $Ox$  ( $k=1$ ) или  $Oy$  ( $k=2$ ). С учетом условий излучения на бесконечности (условий Зоммерфельда) для амплитуд получены следующие выражения:

$$U_1^{(1)} + iU_2^{(1)} = U_1^{(2)} - iU_2^{(2)} = w \left( \frac{\chi}{4} \Phi_{20} - c \Phi_{00} \right),$$

$$U_1^{(1)} - iU_2^{(1)} = \frac{w}{4} e^{-2i\alpha} \Phi_{22}, \quad U_1^{(2)} + iU_2^{(2)} = \frac{w}{4} e^{2i\alpha} \Phi_{22},$$

$$w = \frac{i}{4\mu(1-\nu)}, \quad \chi = 3 - 4\nu, \quad c = \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \gamma_2^2,$$

$$z - \zeta = r e^{i\alpha}, \quad \Phi_{kj} = \frac{\gamma_1^k H_j^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^k H_j^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \quad (6)$$

где  $H_j^{(1)}(x)$  — функция Ханкеля 1-го рода  $j$ -го порядка,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Очевидно, что представления (5) удовлетворяют уравнениям движения (2). Кроме того, за счет выбора функции  $U_m^{(k)}$  (6) они выполняют условия излучения на бесконечности, т.е. представляют собой расходящиеся волны. Остается удовлетворить граничные условия на контуре каждой полости (на  $L$ ), которые запишем в виде

$$S_1 \pm iS_2 = 0. \quad (7)$$

Выпишем необходимые для (7) производные

$$e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (U_1^{(1)} + iU_2^{(1)}) = e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (U_1^{(2)} - iU_2^{(2)}) = -\frac{w}{8} (\chi \Phi_{31} - 4c \Phi_{11}),$$

$$e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (U_1^{(1)} - iU_2^{(1)}) = e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (U_1^{(2)} + iU_2^{(2)}) = \frac{w}{8} \Phi_{31}. \quad (8)$$

Можно показать, что ядро  $\Phi_{11}$  является непрерывным, а ядро  $\Phi_{31}$  (как и ядро  $\Phi_{33}$ ) сингулярно. Имеем

$$\Phi_{31} = \frac{2i}{\pi r} + F_{31}, \quad \Phi_{33} = \frac{2i}{\pi r} + F_{33},$$

где  $F_{31}$  и  $F_{33}$  — непрерывные функции. Используя производные (8), можно вычислить ядра интегральных представлений (5)  $\tau_{mn}^{(k)}$  — амплитуд тензора напряжений возмущенного поля с помощью формул (3), подставляя в них вместо  $U$  и  $V$  функции Грина  $U_m^{(k)}$ . Выделяя в ядрах полученных интегралов сингулярные члены и используя предельные значения интегралов типа Коши [6], приводим граничные условия (7) к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}f_1(s_0) + \int_L (f_1(s)E_{11}(s, s_0) + f_2(s)E_{12}(s, s_0)) ds &= K_1(s_0), \\
-\frac{1}{2}f_2(s_0) + \int_L (f_1(s)E_{21}(s, s_0) + f_2(s)E_{22}(s, s_0)) ds &= K_2(s_0), \\
E_{11} &= h \left( w_1 + \frac{1}{4}w_2F_{31} - w_3\Phi_{11} \right), \\
E_{12} &= h \left( -\bar{w}_4 + \left( \frac{1}{4}F_{31} - \frac{\gamma^2}{4}\Phi_{11} \right) e^{i(\alpha_0 + \varphi_0)} - \frac{1}{4}F_{33}e^{i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right), \\
E_{21} &= h \left( w_4 + \left( \frac{1}{4}F_{31} - \frac{\gamma^2}{4}\Phi_{11} \right) e^{-i(\alpha_0 + \varphi_0)} - \frac{1}{4}F_{33}e^{-i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right), \\
E_{22} &= h \left( -\bar{w}_1 + \frac{1}{4}\bar{w}_2F_{31} - \bar{w}_3\Phi_{11} \right), \\
w_1 &= \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{e^{i\varphi_0}}{\xi - \xi_0} - \chi \frac{e^{-i\varphi_0}}{\bar{\xi} - \bar{\xi}_0} \right), \quad w_2 = e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)} - \chi e^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)}, \\
w_3 &= \frac{\gamma^2}{4} e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)} - ce^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)}, \quad w_4 = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-i\varphi_0} - e^{-i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\xi - \xi_0},
\end{aligned}
\tag{9}$$

$$h = \frac{1}{4(1-\nu)}, \quad \xi - \xi_0 = r_0 e^{i\alpha_0}, \quad K_1(s_0) = S_1^{(0)} + iS_2^{(0)}, \quad K_2(s_0) = S_1^{(0)} - iS_2^{(0)},$$

$$S_1^{(0)} \pm iS_2^{(0)} = \frac{\mu\gamma_1\tau}{(1/2) - \nu} e^{-i\gamma_1\eta_0} [\pm(1-\nu)\cos\varphi_0 + i\nu\sin\varphi_0] \text{ для } P\text{-случая,}$$

$$S_1^{(0)} \pm iS_2^{(0)} = -i\mu\gamma_2\tau e^{-i\gamma_2\eta_0} e^{\mp i\varphi_0} \text{ для } SV\text{-случая.}$$

Здесь  $\bar{w}$  — величина, сопряженная с комплексной величиной  $w$ , ядра  $E_{11}$  и  $E_{22}$  являются сингулярными,  $E_{12}$  и  $E_{21}$  — непрерывны. Следовательно, уравнения (9) являются сингулярными интегральными уравнениями 2-го рода.

#### ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

**Схема вычислений.** В целях исследования достоверности предложенного алгоритма рассмотрим случай нормального падения волн на систему эллиптических или ромбических (со скруглениями) отверстий, расположенных вдоль одной линии на одинаковом расстоянии  $d$  один от другого (рис. 2). В работе проводились вычисления контурных напряжений  $\sigma_\beta$  вдоль контуров центрального  $L_0$  и крайнего  $L_q$  отверстий в случае решетки, имеющей нечетное число неоднородностей, при этом  $p = q$ . В общем несимметричном случае число отверстий составляет  $l = q + p + 1$ .

Отсчет угла  $\beta$  ведется от нуля (теневая точка) до  $\pi$  (лобовая точка) для центрального отверстия (учитывается симметрия в случае нормального падения волны) и от 0 до  $2\pi$  — для крайних отверстий (в силу симметрии распределения напряжений на контурах  $L_q$  и  $L_{-q}$  зеркальны).

Численная реализация алгоритма проводилась методом, теоретически обоснованным в работе [6]. Проведем параметризацию каждого контура  $L$  по формулам

$$\xi = \xi(\beta), \quad \xi_0 = \xi(\beta_0), \quad 0 \leq \beta, \beta_0 \leq 2\pi.$$

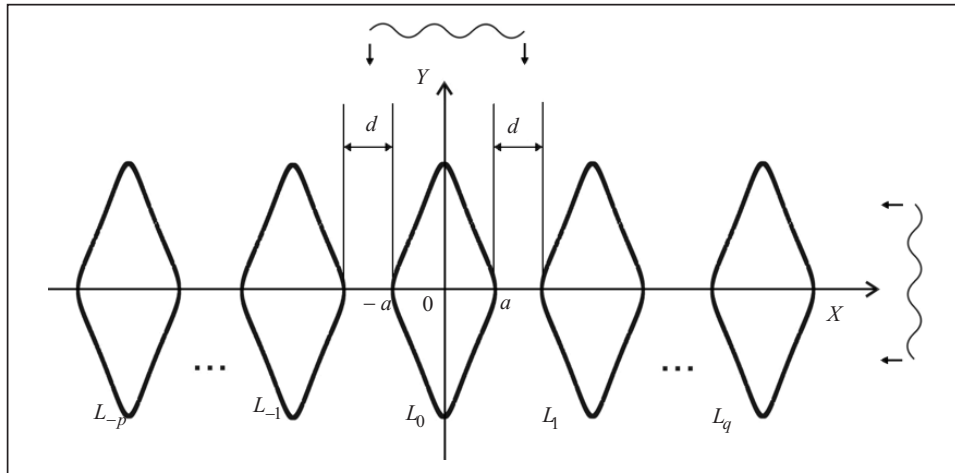


Рис. 2

Тогда интерполяционный многочлен [6] для неизвестных плотностей интегральных уравнений (9) имеет вид

$$f(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) \sin \frac{N(\beta_k - \beta)}{2} \cdot \frac{1}{g(\beta)}, \quad \beta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad (10)$$

где  $g(\beta) = \sin \frac{\beta_k - \beta}{2}$ , поскольку в алгоритме использовано нечетное  $N = 2n + 1$ .

При подстановке (10) в интегралы с сингулярными ядрами имеем

$$\int_0^{2\pi} f(\beta) R(\beta, \beta_0^m) d\beta \approx \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) R(\beta_k, \beta_0^m), \quad \beta_0^m = \frac{2m-1}{N} \pi, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

если  $R(\beta, \beta_0)$  — непрерывное ядро, и

$$\int_0^{2\pi} f(\beta) \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0^m}{2} d\beta \approx \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) \operatorname{ctg} \frac{\beta_k - \beta_0^m}{2} \quad (12)$$

в случае ядра Гильберта.

Как и в работах [3–6], формула (12) соответствует правилу приближенного вычисления регулярных интегралов (11). Поэтому при численной реализации сингулярных интегралов ядро Гильберта не выделялось. Как для регулярных, так и для сингулярных интегралов использовалась квадратурная формула (11). В качестве примера рассматривалась среда, содержащая систему цилиндрических полостей эллиптического и ромбического поперечных сечений:

$$\xi = a \sin \beta, \quad \eta = -b \cos \beta, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi.$$

На контуре полостей проводилось вычисление напряжений  $\sigma_\beta = |\tau_{s_0}| / Q$ , где компоненты тензора амплитуд напряжений  $\tau_{s_0}$  находились по формуле (4),  $Q$  — максимальное значение напряжения в падающей волне, равное  $\gamma_1 \tau(\lambda + 2\mu)$  в случае излучения  $P$ -волны (1) и  $\gamma_2 \tau \mu$  — в случае излучения  $SV$ -волны (1а).

При численной реализации применялось распараллеливание [7] алгоритма по схеме из работы [5]. Точность вычислений проверялась путем сравнения результатов при различных значениях  $N$ . Для большинства задач этого класса достаточно 1000 точек коллокации контура для вычисления контурных напряжений с точностью  $10^{-8}$ . Обусловленность матриц при этом проверялась на основании алгоритма, описанного в [8].

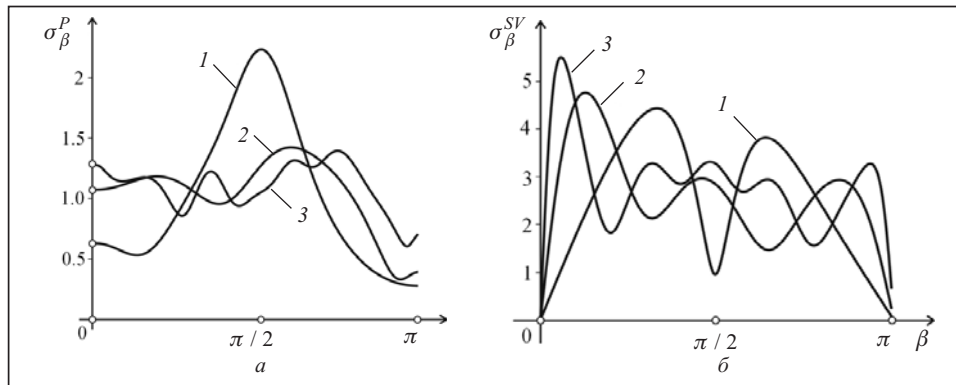


Рис. 3

Применение метода параллельных вычислений, проведенных на кластере «Инпарком-256», подтверждает вывод о том, что сходимость решения СИУ практически не зависит от числа отражателей.

**Сравнение результатов для одиночного отверстия.** Проводилось сравнение новых результатов с результатами, приведенными в [4], для случая одиночного эллиптического отверстия, полученного удалением элементов системы на значительное расстояние один от другого — до  $10^{+6}$ . Сравнения с результатами работы [4] показали хорошую достоверность используемых вычислительных алгоритмов.

Как и в работе [4], кривые 1, 2 и 3 на рис. 3, а (*P*-случай) и 3, б (*SV*-случай) отвечают значениям параметра  $b/a$ , равным 0.5, 2.0 и 5.0 соответственно. При этом коэффициент Пуассона среды  $\nu = 0.3$ . Расчеты показывают, что в случае  $b/a \leq 1$ , т.е. когда фокусы эллипса находятся на оси, параллельной фронту падающей волны, вблизи точки соскальзывания ( $\beta = \pi/2$ ) напряжение  $\sigma_\beta$  имеет локальный максимум при излучении *P*-волны и локальный минимум — в случае *SV*-волны. Если  $b/a > 1$ , т.е. когда эллиптическая полость вытянута вдоль оси, перпендикулярной фронту падающей волны, то с увеличением параметра  $b/a$  характер изменения  $\sigma_\beta$  усложняется, причем число точек максимума и минимума увеличивается.

**Сравнение результатов для периодической системы отверстий.** Численное исследование показало, что при воздействии из бесконечности *P*- и *SV*-волн в описанной системе также наблюдается эффект насыщения [9], однако не строго (как и в [5, 10]). И хотя при линейном и симметричном относительно нагрузки расположении геометрически одинаковых отверстий для усредненного исследования достаточно не более 20 отражателей, при дальнейшем наращивании их числа в распределении напряжений наблюдаются незначительные пульсации.

Используя тот факт, что при насыщении решетки напряженно-деформированное состояние исследуемой системы стремится к аналогичному состоянию в периодическом случае [5, 9], в настоящей работе проводилось сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [11] для случая периодической системы эллиптических отверстий. Сравнение с результатами из работы [11] также показало хорошую достоверность используемых вычислительных схем.

На рис. 4 показано распределение напряжений  $\sigma_\beta$  на контуре эллиптической полости, находящейся на оси симметрии системы, состоящей из 17 отверстий, в случае *P*-волны (рис. 4, а) и *SV*-волны (рис. 4, б). Кривые 1, 2 и 3 приведены для  $\nu = 0.3$ ,  $\gamma_{1,2}a = 1.0$  и соответствуют значениям  $a/d = 0.3, 0.5$  и  $0.7$  при  $b/a = 0.5$ , где  $d$  (расстояние между отверстиями) соответствует периоду решетки в [11].

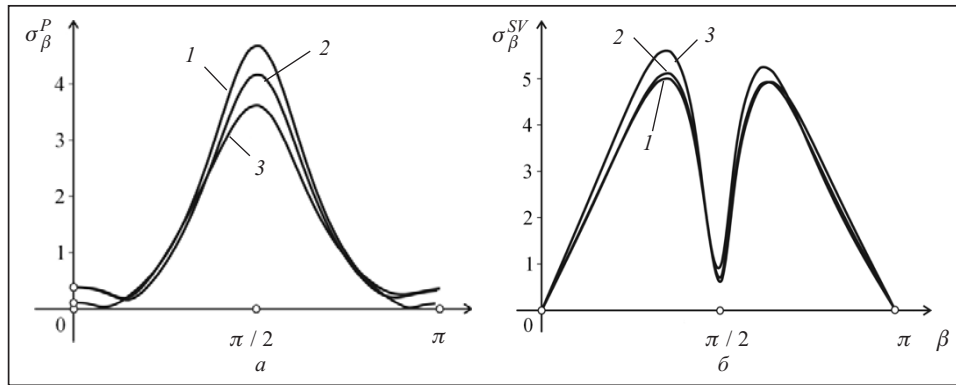


Рис. 4

Анализ полученных результатов свидетельствует, что распределения контурных напряжений для  $P$ - и  $SV$ -случаев принципиально отличается одно от другого. Так, при  $b/a < 1$  вблизи точки соскальзывания ( $\beta = \pi/2$ ) напряжение  $\sigma_\beta$  имеет максимум при излучении  $P$ -волны и локальный минимум в случае  $SV$ -волны. С увеличением параметра  $b/a$  ( $b/a > 1$ ) характер распределения  $\sigma_\beta$  усложняется, причем число точек максимума и минимума возрастает. В  $SV$ -случае напряжение  $\sigma_\beta$  в лобовой ( $\beta = \pi$ ) и теневой ( $\beta = 0$ ) точках равно нулю, что полностью совпадает с результатами аналогичных исследований, приведенными в работе [11].

**Система отверстий.** Для трех отверстий эллиптического или ромбического сечения время вычислений контурных напряжений (для одного варианта) на 15 процессорах кластера типа «Инпарком» составляет около трех часов. Решение аналогичной задачи процедурным методом с использованием типовых вычислительных средств с точностью до  $10^{-6}$  (700 точек коллокации) осуществлялось несколько суток.

Приведем графики распределения касательных напряжений  $\sigma_\beta$  на контуре крайнего (рис. 5, а–8, а) и центрального (рис. 5, б–8, б) отверстий эллиптической (рис. 5, 6) и ромбической (рис. 7, 8) форм. На рис. 5, 7 показан случай  $P$ -волн, а на рис. 6, 8 — случай  $SV$ -волн. Везде на рисунках кривые 1, 2 получены для систем неоднородностей, которые своей большей осью параллельны (вытянуты вдоль) оси ординат и набегающей волне, а кривые 3, 4 получены для систем, вытянутых вдоль оси абсцисс. Значения безразмерного волнового числа  $\gamma_{1,2}a$  равны соответственно 1.5 для кривых 1, 3 и 2.5 для кривых 2, 4. Соотношение осей неоднородностей соответствует  $b/a = 2.0$ .

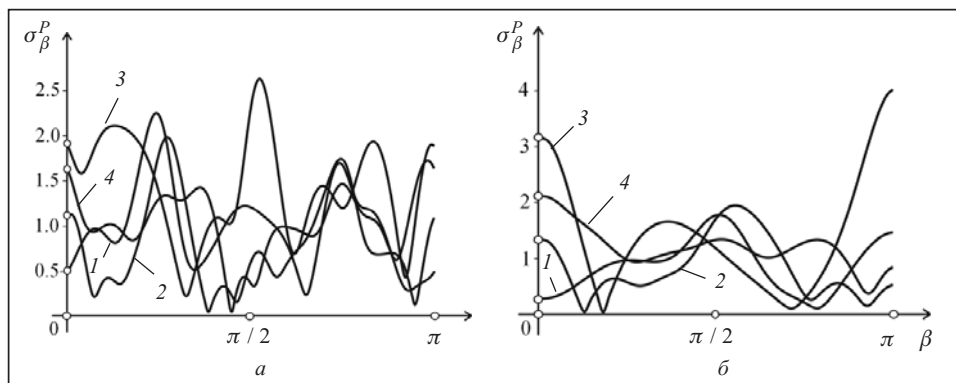


Рис. 5

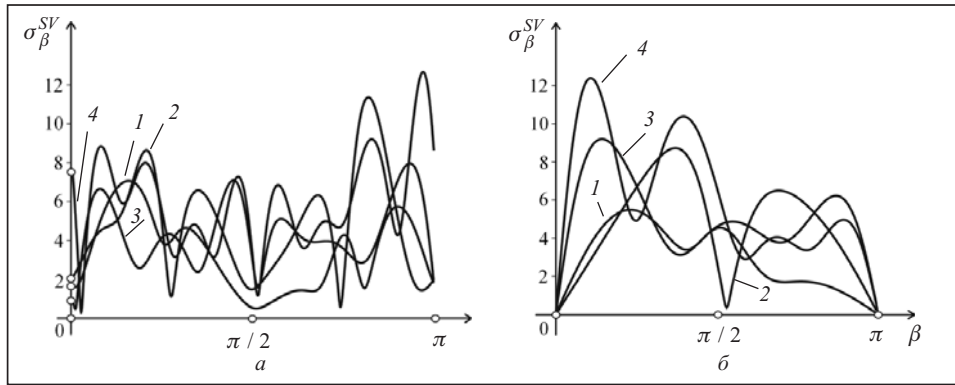


Рис. 6

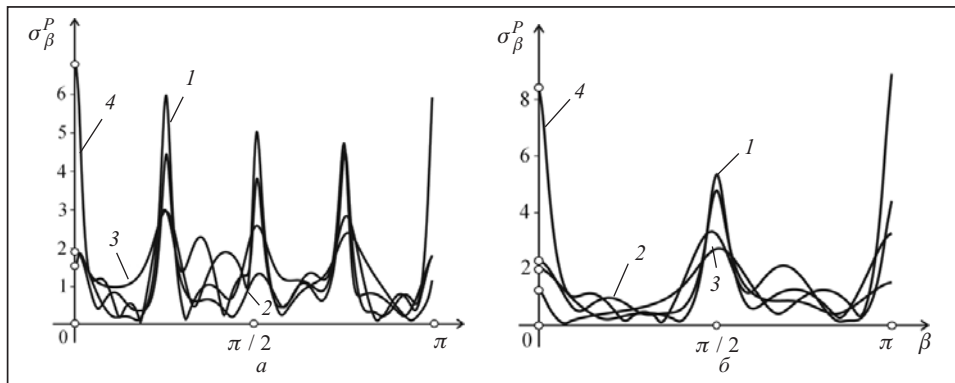


Рис. 7

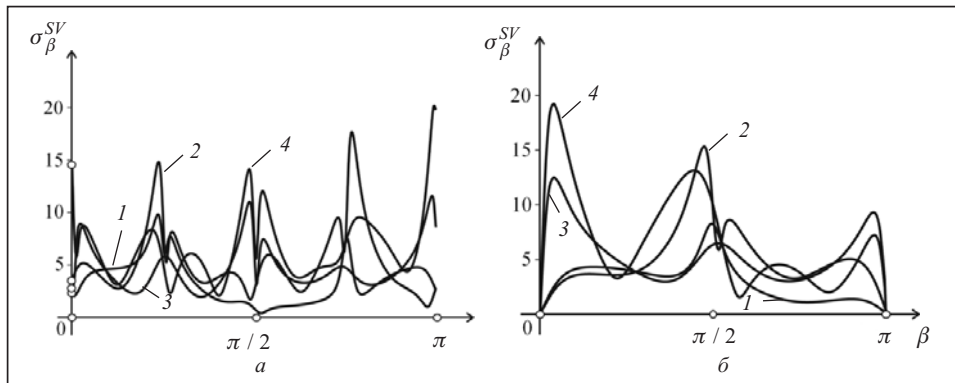


Рис. 8

Расчеты показывают, что в случае  $b/a \leq 1$ , т.е. когда фокусы эллипса находятся на оси, параллельной фронту падающей волны, вблизи точки соскальзывания ( $\beta = \pi/2$ ) напряжение  $\sigma_\beta$  имеет локальный максимум при излучении  $P$ -волны и локальный минимум — в случае  $SV$ -волны. При значениях  $b/a \geq 1$ , т.е. когда эллиптические полости вытянуты вдоль оси, перпендикулярной фронту падающей волны, с увеличением параметра  $b/a$  характер изменения напряжения  $\sigma_\beta$  усложняется, причем число точек максимума и минимума увеличивается.

На рис. 9 приведены зависимости максимальных касательных напряжений  $\sigma_\beta^*$  от расстояния  $d$  (см. рис. 2) в случае воздействия  $SV$ -волн на систему из трех



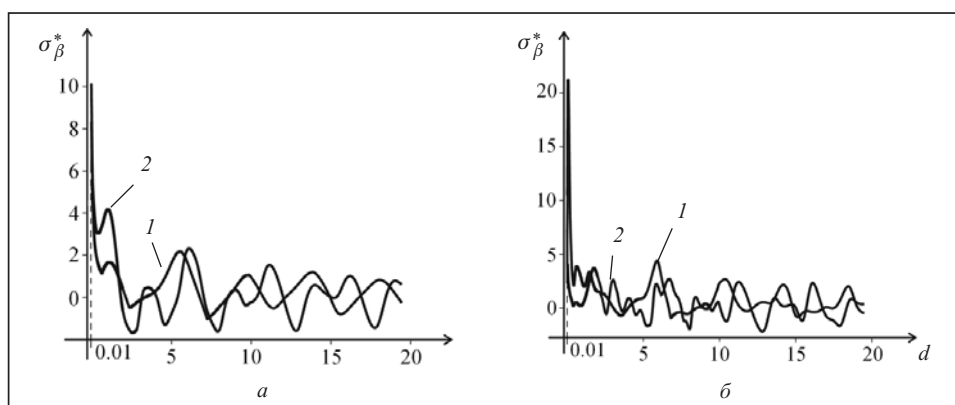


Рис. 9

Таблица 1

Тип волны	Тип контура	Расположение отверстия	$\gamma_{1,2}a$	Угол $\beta$ , в радианах	Максимум $\sigma_\beta$
<i>SV</i>	Эллипс	Центральное	1.5	0.45046764	9.20952152
<i>SV</i>	Эллипс	Крайнее справа	1.5	0.45139920	7.95555354
<i>SV</i>	Ромб	Центральное	1.5	6.15793145	12.48014108
<i>SV</i>	Ромб	Крайнее справа	1.5	0.10875301	11.55062885
<i>P</i>	Эллипс	Центральное	1.5	3.14085470	4.02922054
<i>P</i>	Эллипс	Крайнее справа	1.5	3.03160079	2.62768336
<i>P</i>	Ромб	Центральное	1.5	3.14085470	9.15393000
<i>P</i>	Ромб	Крайнее справа	1.5	3.11755021	4.98452764
<i>SV</i>	Эллипс	Центральное	2.5	0.34062599	12.40656230
<i>SV</i>	Эллипс	Крайнее справа	2.5	0.22919939	12.68570398
<i>SV</i>	Ромб	Центральное	2.5	6.16310674	19.21981031
<i>SV</i>	Ромб	Крайнее справа	2.5	0.06393689	20.42869115
<i>P</i>	Эллипс	Центральное	2.5	0	2.115216725
<i>P</i>	Эллипс	Крайнее справа	2.5	0.156298146	1.72461236
<i>P</i>	Ромб	Центральное	2.5	0	8.51053409
<i>P</i>	Ромб	Крайнее справа	2.5	0	6.56620420

(рис. 9, а) и семи (рис. 9, б) эллиптических отверстий на контуре центрального отверстия. Соотношение осей эллипсов, вытянутых вдоль оси ординат (и набегающей волны), соответствует  $b/a = 2.0$ . Для кривых 1, 2 значения безразмерного волнового числа  $\gamma_{1,2}a$  равны соответственно 1.5 (кривая 1) и 2.5 (кривая 2).

Разработанная схема численного эксперимента позволила сформировать уникальную таблицу высокоточных значений (до  $10^{-8}$ ) максимумов касательных напряжений и соответствующих угловых координат на контуре эллиптических или ромбических центральных или крайних отверстий (в системе от трех до 13 объектов), аналогичную в работе [10]. Воздействие — гармонические *P*- и *SV*-волны для любых геометрических соотношений отверстий и большинства волновых чисел. По мнению авторов, такая таблица сформирована впервые. В табл. 1 приведен фрагмент этого результата. Система состоит из трех эллиптических или ромбических отверстий с соотношением осей  $b/a = 2.0$  и волновых чисел  $\gamma_{1,2}a$ , равных 1.5 и 2.5 соответственно.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сочетание метода интегральных уравнений, позволяющих на единицу снизить размерность задачи, и параллельных алгоритмов существенно экономит время

и повышает точность вычислений (несмотря на использование увеличенного числа вариантов исходных данных). Для задачи дифракции упругих волн на системе отверстий некруговой формы параллельные алгоритмы дают возможность более детально проанализировать характеристики волнового поля — получить точные величины резонансных максимумов контурных напряжений, а также определить точные координаты дислокации резонансных максимумов. Это позволяет избежать разрушений конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г., Яковлев В. В. Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах. — К.: Наук. думка, 1985. — 136 с.
2. Гузь А. Н. О концентрации напряжений около нескольких отверстий в элементах конструкций // Прикладная механика. — 1994. — 30, № 4. — С. 6–13.
3. Фильштинский Л. А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1991. — № 4. — С. 119–127.
4. Панченко Б. Е. Решение двумерных задач дифракции упругих волн на цилиндрических неоднородностях: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / Сум. гос. ун-т. — Сумы, 1996. — 125 с.
5. Панченко Б. Е., Назаренко А. М. Каркасный анализ предметной области: стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 1. — С. 172–187.
6. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. — Киев: Наук. думка, 1984. — 344 с.
7. Вертгейм И. И., Терпугов В. Н. Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДТТ: Уч. пособие. — Пермь: ПГУ, 2007. — 84 с.
8. Химич А. Н., Молчанов И. Н., Попов А. В. Численное программное обеспечение интеллектуального MIMD-компьютера «Инпарком». — К.: Наук. думка, 2007. — 220 с.
9. Кюркчан А. Г., Скородумова Е. А. Решение трехмерной задачи дифракции волн на группе объектов // Акустический журнал. — 2007. — 53, № 1. — С. 5–14.
10. Панченко Б. Е., Сайко И. Н. Высокоточная схема параллельных вычислений максимальных контурных SH-напряжений на системе некруговых отверстий в бесконечной упругой среде // Наукові записки НАУКМА. Комп'ютерні науки. — 2012. — 121. — С. 10–18.
11. Назаренко А. М., Ложкин А. М. Дифракция упругих волн на периодических системах цилиндрических полостей и жестких включений // Акустический вестник. — 2006. — 9, № 4. — С. 35–42.

*Поступила 10.11.2014*