

ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ МОДЕЛИ ПУАССОНОВСКОГО ТИПА ДЛЯ НАКОПЛЕННОЙ ИЗБЫТОЧНОЙ ДОХОДНОСТИ

Аннотация. Анализируется регрессионное уравнение для накопленной избыточной доходности с остатками, имеющими условную дисперсию в виде GARCH(1,1)-процесса, и статистической неопределенностью в виде AR(1)-процесса с параметром корреляции ρ . В предположении, что длины интервалов между транзакциями независимы и экспоненциально распределены с достаточно малым средним h , построена система уравнений диффузионной аппроксимации. Предельное стохастическое уравнение позволяет сделать вывод о существовании стационарного распределения условной дисперсии в виде обратного гамма-распределения и анализировать зависимость этого распределения от параметра корреляции ρ .

Ключевые слова: диффузионная аппроксимация, волатильность избыточной доходности, корреляция остатков регрессии.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАКОПЛЕННОЙ ИЗБЫТОЧНОЙ ДОХОДНОСТИ

При анализе рисков финансовых инструментов наиболее часто используется понятие избыточной доходности (Excess Return), которое определяется как разность между доходностью данного инвестиционного актива или инвестиционного портфеля и безрискового актива [1, 2]. В качестве математической модели для логарифма величины накопленной избыточной доходности Y_t в финансовой эконометрии используется система разностных уравнений типа ARMA-GARCH [3]

$$Y_t = Y_{t-1} + c\sigma_t^2 + \sigma_t Z_t, \quad (1)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \sigma_t^2[\beta + \alpha Z_t^2], \quad (2)$$

где t — детерминированные моменты времени, $t=1, 2, \dots$; σ_t^2 — волатильность портфеля; $\{Z_t\}$ — последовательность независимых стандартных нормально распределенных случайных величин, отражающая наличие статистической неопределенности на рынке. Анализируя реальную ситуацию управления финансовыми активами, Д. Нельсон в работе [1] делает вывод, что интервалы h между изменениями цен сравнительно малы, и за это время параметры модели (1), (2) изменяются незначительно. Поэтому более реалистичной является модель в виде разностной схемы

$${}_h Y_{kh} = {}_h Y_{(k-1)h} + h \cdot c \cdot {}_h \sigma_{kh}^2 + {}_h \sigma_{kh} \cdot {}_h Z_{kh}, \quad (3)$$

$${}_h \sigma_{(k+1)h}^2 = \omega_h + {}_h \sigma_{kh}^2 [\beta_h + h^{-1} \alpha_h \cdot {}_h Z_{kh}^2], \quad (4)$$

где $k=1, 2, \dots$ и $\{{}_h Z_{kh}\}$ — последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин с нулевым средним и дисперсией h . Учитывая малость параметра h при условии существования пределов

$$\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} \omega_h = \omega \geq 0, \quad \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (1 - \beta_h - \alpha_h) = \omega,$$

Д. Нельсон строит диффузионную аппроксимацию для кусочно-постоянных случайных процессов ${}_h Y_t = {}_h Y_{kh}$ и ${}_h \sigma_t^2 = {}_h \sigma_{kh}^2$ для $kh \leq t < (k+1)h$ в виде

системы стохастических дифференциальных уравнений на фильтрованном вероятностном пространстве (Ω, F, F^t, P)

$$\begin{cases} dY_t = c\sigma_t^2 dt + \sigma_t dW_{1,t}, & (5) \\ d\sigma_t^2 = (\omega - \theta\sigma_t^2)dt + \alpha\sigma_t^2 dW_{2,t}, & (6) \end{cases}$$

$\{F^t\}$ — минимальная фильтрация, соответствующая статистической неопределенности $\{Z_t\}$. Система стохастических уравнений (5), (6) более удобна для анализа избыточной доходности. Во-первых, из уравнения (6) легко получить условие существования устойчивого стационарного распределения для волатильности, а также убедиться, что плотность обратного значения стационарной волатильности имеет гамма-распределение $\Gamma\left(1 + \frac{2(\theta - \alpha^2)}{\alpha^2}; \frac{\alpha^2}{2\omega}\right)$. Во-вторых,

из уравнения (5) можно найти соответствующие стационарной волатильности моменты значения избыточной доходности.

Следует отметить, что в работах [1, 3] регрессионная модель предполагает отсутствие автокорреляции последовательности $\{Z_t\}$. Это предположение соответствует гипотезе о некоррелированности остатков $\{\sigma_t Z_t\}$ в уравнении для логарифма избыточной доходности (1). Действительно, если $\{Z_t\}$ не зависит от $\{Z_{t-1}\}$, то

$$\begin{aligned} E\{\sigma_t Z_t \sigma_{t-1} Z_{t-1}\} &= E\{E\{\sigma_t Z_t \sigma_{t-1} Z_{t-1} / F^t\}\} = \\ &= E\{\sigma_t \sigma_{t-1} Z_{t-1} E\{Z_t / F^t\}\} = E\{\sigma_t \sigma_{t-1} Z_{t-1} E\{Z_t\}\} = 0. \end{aligned}$$

Однако, как отмечают многие исследователи (например, [4–6] и ссылки в этих работах), ввиду присутствия неучтенных факторов в реальных моделях динамики финансовых активов наблюдается значительная автокорреляция в остатках для уравнения избыточной доходности, и этот факт влияет на прогнозирование стоимости портфелей. В исследованиях многих авторов указано на необходимость учета автокорреляции в моделях статистической неопределенности финансовых рынков. Наиболее простой способ учета автокорреляции в модели Нельсона (1), (2) при сохранении стационарности и нормального распределения $N(0, 1)$ случайных величин $\{Z_t\}$ — это задание последовательности $\{Z_t\}$ с помощью разностного уравнения

$$Z_{t+1} = \rho Z_t + \xi_{t+1} \sqrt{1 - \rho^2},$$

где $\{\xi_t\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение $N(0, 1)$.

Анализируя более миллиона транзакций на валютном рынке Японии, авторы работы [7] показали, что в реальных моделях финансового рынка моменты времени покупки–продажи финансовых активов случайны, и это обстоятельство следует учесть при моделировании статистической неопределенности. В аннотации работы [7] авторы пишут: «Мы показали, что марковская модель транзакций в нормализованном времени хорошо аппроксимируется пуассоновским процессом». Здесь в качестве нормированной длины интервала используется отношение реальной длины интервала к скользящему среднему предшествующих длин интервалов. Заметим, что в настоящей статье речь идет об анализе предельных установившихся распределений достаточно больших выборок с интервалами очень малой длины h . Поэтому в анализируемой математической модели финансового рын-

ка предполагаем, что величины интервалов $\{t_k - t_{k-1}, k = 1, 2, \dots\}$ между скачками независимы и одинаково экспоненциально распределены, $E\{t_k - t_{k-1}\} \equiv h$. Это предположение позволяет моделировать статистическую неопределенность в виде заданного на (Ω, F, F^t, P) непрерывного справа кусочно-постоянного марковского процесса $\{Z_t\}$ со скачками в моменты времени $T := \{t_k, k = 1, 2, \dots\}$, где $\{F^t, t \geq 0\}$ — минимальная фильтрация для $\{Z_t\}$ и

$$P(t_{k+1} - t_k > s) = e^{-\frac{1}{h}s}, \quad s \geq 0,$$

а величина скачка определяется вложенной цепью Маркова, заданной уравнением

$$Z_{t_{k+1}} = \rho Z_{t_k} + \sqrt{1 - \rho^2} \xi_{t_{k+1}}, \quad (7)$$

где $\{\xi_{t_k}\}$ — последовательность независимых нормально распределенных с параметрами 0 и 1 случайных величин, т.е.

$$Z_t = \begin{cases} Z_0 & \text{при } t = 0, \\ Z_{t_{k-1}} & \text{при } t \in (t_{k-1}, t_k), \\ \rho Z_{t_{k-1}} + \sqrt{1 - \rho^2} \xi_{t_k} & \text{при } t \in T, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (8)$$

Здесь и далее $t_0 = 0$. В этом случае двумерный кусочно-постоянный процесс для логарифма от накопленной избыточной доходности Y_t и условной дисперсии σ_t^2 является двумерным сложным пуассоновским процессом с моментами времени скачков $\{t_k, k = 1, 2, \dots\}$ и вложенной цепью Маркова и задается уравнениями

$${}_h Y_t = \begin{cases} Y_0 & \text{при } t = 0, \\ {}_h Y_{t-0} & \text{при } t \notin T, \\ {}_h Y_{t-0} + hc\sigma_{t-0}^2 + \sqrt{h}\sigma_{t-0}Z_t & \text{при } t \in T; \end{cases} \quad (9)$$

$${}_h \sigma_t^2 = \begin{cases} {}_h \sigma_0^2 & \text{при } t = 0, \\ {}_h \sigma_{t-0}^2 & \text{при } t \notin T, \\ {}_h \sigma_{t-0}^2 + h(\omega - \theta {}_h \sigma_{t-0}^2) + \frac{Z_t^2 - 1}{\sqrt{2}} \sigma_{t-0}^2 \alpha \sqrt{h} & \text{при } t \in T. \end{cases} \quad (10)$$

В последующих разделах построим диффузионную аппроксимацию модели (8)–(10) и проанализируем зависимость предельного процесса от параметров модели.

ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Как и в работе Д. Нельсона [1], при описании модели (3), (4) параметр h задается в виде левого нижнего индекса изучаемых процессов. Легко увидеть, что при любом h определенный формулами (8)–(10) векторный случайный процесс

$${}_h \vec{X}_t = \begin{pmatrix} {}_h Y_t \\ {}_h \sigma_t^2 \\ Z_t \end{pmatrix}$$

является заданным на (Ω, F, F^t, P) марковским процессом. Будем учитывать

зависимость от параметра h в виде аргумента слабого инфинитезимального оператора $L(h)$ [8, 9] этого процесса. По определению [9], для произвольной непрерывной функции $v(Y, \sigma^2, Z)$ оператор $L(h)$ задается равенством

$$\begin{aligned}
 & [L(h)v](Y, \sigma^2, Z) = \\
 & = \lim_{\Delta \downarrow 0} E \left\{ \frac{v({}_h Y(t+\Delta), {}_h \sigma^2(t+\Delta), Z(t+\Delta)) - v(Y, \sigma^2, Z)}{\Delta} \Bigg|_{\substack{{}_h Y(t)=Y, \\ {}_h \sigma^2(t)=\sigma^2, \\ Z(t)=Z}} \right\} = \\
 & = \frac{1}{h\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} v \left(Y + hc\sigma^2 + x\sqrt{h\sigma^2}, \sigma^2 + h(\omega - \theta\sigma^2) + \frac{x^2-1}{\sqrt{2}}\sigma^2\alpha\sqrt{h}, x \right) \times \\
 & \quad \times \exp\left(-\frac{(x-\rho z)^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx - v(Y, \sigma^2, Z). \tag{11}
 \end{aligned}$$

Можно интерпретировать рассматриваемую модель как импульсную динамическую систему с быстрыми марковскими переключениями и применить методику построения диффузионной аппроксимации, предложенную в работах [8, 10]. Для вычисления слабого инфинитезимального оператора L_0 предельного диффузионного процесса для семейства процессов $\begin{pmatrix} {}_h Y_t \\ {}_h \sigma_t^2 \end{pmatrix}$ при $h \rightarrow 0$ потребуется

пространство $C^2(R, R_+)$ дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций, зависящих от аргументов $Y \in R, \sigma^2 \in R_+$. Для каждой функции $v \in C^2(R, R_+)$ определенным образом подберем непрерывно дифференцируемые по Y и σ^2 функции $u_1(Y, \sigma^2, Z)$ и $u_2(Y, \sigma^2, Z)$ и применим формулу Дынкина

$$\begin{aligned}
 & E \{ v({}_h Y_{t+\delta}, {}_h \sigma_{t+\delta}^2, Z_{t+\delta}) \Big|_{{}_h Y_t, {}_h \sigma_t^2, Z_t} \} = \\
 & = v({}_h Y_t, {}_h \sigma_t^2, Z_t) + \int_t^{t+\delta} E \{ (L(h)v_h)({}_h Y_s, {}_h \sigma_s^2, Z_s) \} ds
 \end{aligned}$$

при $t \geq 0$ и $\delta > 0$ к функции

$$v_h(Y, \sigma^2, Z) = v_0(Y, \sigma^2) + \sqrt{h} \cdot u_1(Y, \sigma^2, Z) + h \cdot u_2(Y, \sigma^2, Z). \tag{12}$$

Далее покажем, что существует такой определенный на $C^2(R, R_+)$ диффузионный оператор L_0 , что

$$\lim_{h \rightarrow 0} (L(h)v_h)(Y, \sigma^2, Z) = (L_0 v_0)(Y, \sigma^2).$$

Тогда в соответствии с классическим результатом [8, теорема 1, с. 82] последовательность процессов $\begin{pmatrix} {}_h Y_t \\ {}_h \sigma_t^2 \end{pmatrix}$ сходится по распределению к определенному

оператором L_0 диффузионному процессу $\begin{pmatrix} Y_t \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix}$ на любом конечном интервале времени. Более того, как показано в работах [10, 11], по предельному уравнению можно судить о существовании устойчивых стационарных решений исход-

ной импульсной динамической системы. Поэтому, используя диффузионную аппроксимацию модели (9), (10), можно анализировать влияние автокорреляции ρ на существование и закон распределения стационарной волатильности ${}_h\hat{\sigma}_t^2$ при достаточно малых значениях параметра h .

Чтобы избежать громоздких записей, для дальнейшего изложения используем обозначения

$$\begin{aligned}(G_p u)(Z) &:= E \{u(\rho Z + \xi_1(1 - \rho^2))\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\rho Z + x(1 - \rho^2)) e^{-x^2/2} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - \rho^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \exp\left(-\frac{(x - \rho Z)^2}{2(1 - \rho^2)}\right) dx, \\ (Qu)(Z) &:= (G_p u)(Z) - u(Z).\end{aligned}$$

Применяя формулу (11) для инфинитезимального оператора и финитной дважды непрерывно дифференцируемой по Y и σ^2 функции $v(Y, \sigma^2, Z)$, для дальнейшего анализа можно воспользоваться разложением этого оператора в виде

$$\begin{aligned}[L(h)v](Y, \sigma^2, Z) &= \frac{1}{h}(Qv)(Y, \sigma^2, Z) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{h}}(L_1v)(Y, \sigma^2, Z) + (L_2v)(Y, \sigma^2, Z) + O(h),\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}(L_1v)(Y, \sigma^2, Z) &:= \sigma G_p(ZD'_Y v)(Y, \sigma^2, Z) + \sigma^2 \alpha G_p\left(\frac{Z^2 - 1}{\sqrt{2}} D'_{\sigma^2} v\right)(Y, \sigma^2, Z), \\ (L_2v)(Y, \sigma^2, Z) &:= c\sigma^2 G_p(D'_Y v)(Y, \sigma^2, Z) + (\omega - \theta\sigma^2) G_p(D'_{\sigma^2} v)(Y, \sigma^2, Z) + \\ &+ \frac{\sigma^2}{2} G_p(Z^2 D''_{YY} v)(Y, \sigma^2, Z) + \frac{\sigma^4 \alpha^2}{4} G_p((Z^2 - 1)^2 D''_{\sigma^2 \sigma^2} v)(Y, \sigma^2, Z) + \\ &+ \sigma^3 \alpha G_p\left(\frac{Z^2 - 1}{\sqrt{2}} D'_{\sigma^2} v\right)(Y, \sigma^2, Z).\end{aligned}\quad (14)$$

Здесь и далее $O(h)$ означает ограниченную при достаточно малых h функцию, стремящуюся к нулю при $h \rightarrow 0$, а штрих в верхнем индексе буквы D означает дифференцирование по соответствующему нижнему индексу. Результат применения оператора (13) к функции (12) можно представить в виде разложения по степеням \sqrt{h} :

$$\begin{aligned}[L(h)v_h](Y, \sigma^2, Z) &= \frac{1}{h}(Qv_0)(Y, \sigma^2) + \frac{1}{\sqrt{h}}[(L_1v_0)(Y, \sigma^2) + (Qu_1)(Y, \sigma^2, Z)] + \\ &+ [(L_2v_0)(Y, \sigma^2) + (L_1u_1)(Y, \sigma^2, Z) + (Qu_2)(Y, \sigma^2, Z) - (L_0v_0)(Y, \sigma^2)] + \\ &+ (L_0v_0)(Y, \sigma^2) + O(h).\end{aligned}\quad (15)$$

Согласно определению $(Qv_0)(Y, \sigma^2) \equiv 0$. Для того чтобы перейти к пределу в формуле (15), необходимо подобрать функции $u_1(Y, \sigma^2, Z)$ и $u_2(Y, \sigma^2, Z)$ так, чтобы выражения в квадратных скобках равенства (15) равнялись нулю. Для этого сначала в соответствии с формулой (14) решим уравнение

$$(Qu_1)(Y, \sigma^2, Z) = -\left(\sigma G_p(Z)D'_Y v_0(Y, \sigma^2) + \sigma^2 \alpha G_p\left(\frac{Z^2 - 1}{\sqrt{2}}\right)D'_{\sigma^2} v_0(Y, \sigma^2)\right).\quad (16)$$

По теореме Фредгольма уравнение вида

$$(Qu)(Z) = -f(Z) \quad (17)$$

имеет решение тогда и только тогда, когда функция $f(Z)$ ортогональна ядру $K(Q^*)$ оператора Q^* , определенному на сопряженном пространстве непрерывных финитных функций $C_0(R)$ в пространстве счетно-аддитивных мер $C_0^*(R) = rca(R)$. Поскольку ядро $K(Q^*)$ определяется равенством $Q^* \mu(dx) = 0$, то элементами ядра являются меры, соответствующие предельным распределениям марковского процесса Z_t , заданного формулой (8). Можно показать, что в данном случае этот процесс эргодичен и имеет единственное предельное распределение, соответствующее стационарному распределению вложенной цепи Маркова (7), т.е. стандартному нормальному распределению $N(0, 1)$. Следовательно, уравнение (17) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\overline{f(Z)} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2/2} dx = 0.$$

Для упрощения последующих выкладок воспользуемся следующим известным результатом из теории цепей Маркова. Пусть $p(z, dx)$ — переходная вероятность эргодической цепи Маркова $\{Z_n\}$ на пространстве X и $\mu(dx)$ — эргодическое распределение, т.е. $\int_X p(z, dx) \mu(dx) = E \{ \mu(dx) \}$, $E \{ \cdot \}$ — соответствующее этому распределению математическое ожидание, и случайная величина Z_0 имеет эргодическое распределение. Тогда

$$\begin{aligned} E \{ u(Z_1) \} &= E \{ E \{ u(Z_1) / Z_0 \} \} = E \left\{ \int_X p(Z_0, dx) u(x) \right\} = \\ &= \int_X \left(\int_X p(z, dx) \mu(dx) \right) u(x) = \int_X u(x) \mu(dx) = E \{ u(Z_0) \}. \end{aligned}$$

Поэтому далее будем использовать очевидное равенство

$$\overline{G_p(u(Z))} := E \{ u(Z_1) \} = E \{ u(Z_0) \} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-x^2/2} dx,$$

где $Z_0 \sim N(0, 1)$. Тогда поскольку

$$\overline{G_p(Z)} = E \{ Z_1 \} = E \{ Z_0 \} = 0, \quad G_p \left(\frac{Z^2 - 1}{\sqrt{2}} \right) = E \left\{ \frac{Z_0^2 - 1}{\sqrt{2}} \right\} = 0,$$

правая часть в формуле (16) удовлетворяет условию теоремы Фредгольма и можно приступить к решению уравнения

$$(Qu_1)(Y, \sigma^2, Z) = - \left(\sigma \rho Z D'_Y + \sigma^2 \alpha \rho^2 \frac{Z^2 - 1}{\sqrt{2}} D'_{\sigma^2} \right) v_0(Y, \sigma^2). \quad (18)$$

Так как нуль является точкой спектра оператора Q , то выбор решения этого уравнения в некоторой степени произвольный. Выберем такое решение, которое ортогонально ядру сопряженного оператора Q^* , т.е. соответствует условию $\overline{u_1(Y, \sigma^2, Z)} = 0$. Легко увидеть, что решение уравнения (18) можно ис-

касть в виде полинома второй степени от переменной Z , умноженной на $D'_*v_0(Y, \sigma^2)$. Описанным выше условиям удовлетворяет решение в виде

$$u_1(Y, \sigma^2, Z) = \left[\frac{\rho}{1-\rho} \sigma Z D'_Y + \sigma^2 \alpha \frac{\rho^2 (Z^2 - 1)}{(1-\rho^2)\sqrt{2}} D'_{\sigma^2} \right] v_0(Y, \sigma^2).$$

Это решение следует подставить в уравнение для функции $u_2(Y, \sigma^2, Z)$:

$$(Qu_2)(Y, \sigma^2, Z) = -(L_2v_0)(Y, \sigma^2) - (L_1u_1)(Y, \sigma^2, Z) + (L_0v_0)(Y, \sigma^2).$$

Используя условие нормальной разрешимости этого уравнения, необходимо подобрать слагаемое таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$(L_0v_0)(Y, \sigma^2) = \overline{(L_2v_0)(Y, \sigma^2)} + \overline{(L_1u_1)(Y, \sigma^2, Z)}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} (L_2v_0)(Y, \sigma^2) &= c\sigma^2 D'_Y v_0(Y, \sigma^2) + (\omega - \theta\sigma^2) D'_{\sigma^2} v_0(Y, \sigma^2) + \\ &+ \frac{\sigma^2}{2} G_p(Z^2) D''_{YY} v_0(Y, \sigma^2) + \frac{\sigma^4 \alpha^2}{4} G_p((Z^2 - 1)^2) D''_{\sigma^2 \sigma^2} v_0(Y, \sigma^2) + \\ &+ \sigma^3 \alpha G_p \left(\frac{Z^2 - 1}{\sqrt{2}} \right) D'_{\sigma^2} v_0(Y, \sigma^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (L_1u_1)(Y, \sigma^2, Z) &= \sigma G_p(ZD'_Y u_1)(Y, \sigma^2, Z) + \sigma^2 \alpha G_p \left(\frac{Z^2 - 1}{\sqrt{2}} D'_{\sigma^2} u_1 \right) (Y, \sigma^2, Z) = \\ &= \frac{\rho\sigma^2}{1-\rho^2} G_p(Z^2) D'_Y v_0(Y, \sigma^2) + \frac{\rho^2 \sigma^4 \alpha^2}{1-\rho^2} G_p \left(\frac{Z^2 - 1}{\sqrt{2}} \right) D'_{\sigma^2} v_0(Y, \sigma^2). \end{aligned}$$

С помощью этих формул вычислим в отдельности слагаемые в формуле (19):

$$\begin{aligned} \overline{(L_2v_0)(Y, \sigma^2)} &= c\sigma^2 D'_Y v_0(Y, \sigma^2) + (\omega - \theta\sigma^2) D'_{\sigma^2} v_0(Y, \sigma^2) + \\ &+ \frac{\sigma^2}{2} \overline{G_p(Z^2) D''_{YY} v_0(Y, \sigma^2)} + \frac{\sigma^4 \alpha^2}{4} \overline{G_p((Z^2 - 1)^2) D''_{\sigma^2 \sigma^2} v_0(Y, \sigma^2)} + \\ &+ \sigma^3 \alpha G_p \left(\frac{Z^2 - 1}{\sqrt{2}} \right) D'_{\sigma^2} v_0(Y, \sigma^2) = c\sigma^2 D'_Y v_0(Y, \sigma^2) + \\ &+ (\omega - \theta\sigma^2) D'_{\sigma^2} v_0(Y, \sigma^2) + \frac{\sigma^2}{2} D''_{YY} v_0(Y, \sigma^2) + \frac{\sigma^4 \alpha^2}{4} D''_{\sigma^2 \sigma^2} v_0(Y, \sigma^2), \\ \overline{(L_1u_1)(Y, \sigma^2, Z)} &= \overline{\sigma G_p(ZD'_Y u_1)(Y, \sigma^2, Z)} + \overline{\sigma^2 \alpha G_p \left(\frac{Z^2 - 1}{\sqrt{2}} D'_{\sigma^2} u_1 \right) (Y, \sigma^2, Z)} = \\ &= \frac{\rho\sigma^2}{1-\rho^2} \overline{G_p(Z^2) D'_Y v_0(Y, \sigma^2)} + \frac{\rho^2 \sigma^4 \alpha^2}{1-\rho^2} \overline{G_p \left(\frac{Z^2 - 1}{\sqrt{2}} \right) D'_{\sigma^2} v_0(Y, \sigma^2)} = \\ &= \frac{\rho\sigma^2}{1-\rho^2} D'_Y v_0(Y, \sigma^2) + \frac{\rho^2 \sigma^4 \alpha^2}{1-\rho^2} D'_{\sigma^2} v_0(Y, \sigma^2). \end{aligned}$$

Окончательно находим вид предельного диффузионного оператора для стохастической аппроксимации двумерного процесса $\{Y_t, \sigma_t^2\}$:

$$L_0 v_0(Y, \sigma^2) = c\sigma^2 D'_Y v_0(Y, \sigma^2) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{1+\rho}{1-\rho} D''_{YY} v_0(Y, \sigma^2) + \left((\omega - \theta\sigma^2) + \frac{\sigma^2 \alpha^2 \rho^2}{1-\rho^2} \right) D'_{\sigma^2} v_0(Y, \sigma^2) + \frac{\sigma^4 \alpha^2}{2} \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} D''_{\sigma^2 \sigma^2} v_0(Y, \sigma^2).$$

Этот оператор соответствует системе стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dY = c\sigma^2 dt + \sigma_t \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} dw_1(t), \\ d\sigma_t^2 = \left(\omega - \sigma_t^2 \left(\theta - \alpha^2 \frac{\rho^2}{1-\rho^2} \right) \right) dt + \sigma_t^2 \alpha \sqrt{\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}} dw_2(t), \end{cases} \quad (20)$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — независимые стандартные процессы броуновского движения.

При $\rho = 0$ полученный результат совпадает с системой уравнений (5), (6), полученной Д. Нельсоном в предположении, что интервалы между транзакциями постоянны [1].

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для дальнейшего изложения целесообразно ввести обозначения

$$A = \theta - \alpha^2 \frac{\rho^2}{1-\rho^2}, \quad B = \alpha \sqrt{\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}}$$

и переписать уравнение (20) в виде

$$d\sigma_t^2 = (\omega - A\sigma_t^2) dt + B\sigma_t^2 dw(t). \quad (21)$$

Предположим, что существует стационарное решение $\hat{\sigma}_t^2$ уравнения (20). Тогда разность $x_t = \sigma_t^2 - \hat{\sigma}_t^2$ должна удовлетворять соответствующему (21) однородному уравнению

$$dx_t = -Ax_t dt + Bx_t dw(t), \quad (22)$$

решения которого имеют вид

$$x_t = x_0 \exp \left\{ \left(-A - \frac{B^2}{2} + B \frac{w(t)}{t} \right) t \right\}.$$

Поскольку $\mathbf{P} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t} = 0 \right) = 1$, то условие устойчивости стационарного решения уравнения (21) с вероятностью единица имеет вид

$$-A - \frac{B^2}{2} < 0. \quad (23)$$

Это условие является необходимым для стабилизации распределения процесса волатильности (22). С учетом введенных выше обозначений легко убедиться, что условие (23) имеет вид $\theta + \alpha^2 / 2 > 0$, т.е. не зависит от коэффициента корреляции ρ .

В монографии [11] показано, что условие (23) также является достаточным для существования стационарного распределения уравнения (21). Следовательно, условие (23) является необходимым и достаточным для стабилизации распре-

деления волатильности избыточной доходности. Со временем заданное с помощью уравнения (10) распределение волатильности приближается к распределению стационарного марковского процесса, соответствующего уравнению (21). Плотность стационарного распределения можно найти, решив соответствующее (21) дифференциальное уравнение второго порядка. Как показано в работе [1], при условии (23) стационарным распределением для (21) является обратное гамма-распределение с параметрами $1 + \frac{2A}{B^2}$ и $\frac{B^2}{2\omega}$, т.е. случайные величины $(\sigma_t^2)^{-1}$ имеют распределение $\Gamma\left(1 + \frac{2A}{B^2}; \frac{B^2}{2\omega}\right)$. Можно допустить, что поскольку показатель

Ляпунова для уравнения (22) не зависит от коэффициента корреляции, то и скорость сходимости моментов распределения процесса волатильности к стационарным значениям также не зависит от ρ . Однако это не так. Из уравнения (22) легко найти зависимость моментов $m_t^{(n)} := E\{|x_t|^n\}$ решения этого уравнения от времени:

$$m_t^{(n)} = m_0^{(n)} \exp\left\{\left[-n\left(\theta - \alpha^2 \frac{n-1+(n+1)\rho^2}{2(1-\rho^2)}\right)\right]t\right\}. \quad (24)$$

Отсюда следует, что найденное стационарное решение $\hat{\sigma}_t^2$ имеет n -й момент только тогда, когда $\frac{\theta}{\alpha^2} > \frac{n-1+(n+1)\rho^2}{2(1-\rho^2)}$ или

$$0 < \rho^2 < \frac{1-n+2\psi}{1+n+2\psi}, \quad (25)$$

где $\psi = \theta/\alpha^2$. Следует заметить, что в приложениях наиболее часто выбор распределения основан на статистических оценках среднего значения, дисперсии, коэффициента асимметрии и коэффициента эксцесса. Из формулы (25) следует, что оценивать указанные выше параметры и проверять гипотезы об этих параметрах имеет смысл лишь при условии, что при гипотетическом распределении стационарной волатильности $\hat{\sigma}_t^2$ существуют первые четыре момента. Эти условия в виде неравенств приведены во втором столбце табл. 1.

Поскольку $(\hat{\sigma}_t^2)^{-1}$ имеет легко моделируемое гамма-распределение, то в приложениях обычно проверяют гипотезу по преобразованной выборке. В этом случае

Таблица 1. Моменты распределения стационарной волатильности $\hat{\sigma}_t^2$ и $(\hat{\sigma}_t^2)^{-1}$

Момент стационарного распределения	Условия существования моментов стационарного распределения	
	для $\hat{\sigma}_t^2$	для $(\hat{\sigma}_t^2)^{-1}$
Математическое ожидание	$\rho^2 < \frac{\psi}{\psi + 1}$	$\rho^2 < \psi$
Дисперсия	$\rho^2 < \frac{2\psi - 1}{2\psi + 3}$	$\rho^2 < \frac{\psi - 1}{2}$
Коэффициент асимметрии	$\rho^2 < \frac{\psi - 1}{\psi + 2}$	$\rho^2 < \frac{2\psi - 1}{3}$
Коэффициент эксцесса	$\rho^2 < \frac{2\psi - 3}{2\psi + 5}$	$\rho^2 < \frac{2\psi - 3}{5}$

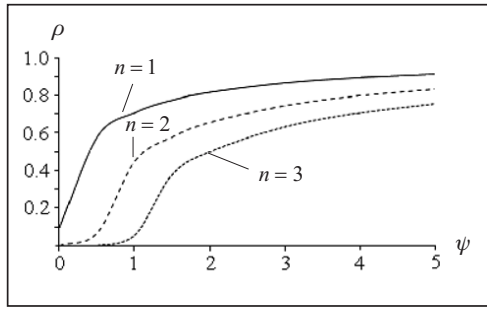


Рис. 1. Зависимость верхней границы ρ от ψ для n -го момента

также следует проверять наличие нужных параметров распределения. В третьем столбце табл. 1 приведены условия существования первых четырех моментов стационарного распределения случайных величин $(\hat{\sigma}_t^2)^{-1}$. Указанные выше параметры стационарного распределения $\hat{\sigma}_t^2$ также зависят от величины коэффициента корреляции:

$$E\hat{\sigma}_t^2 = \frac{\omega(1-\rho^2)}{\theta - \rho^2(\theta + \alpha^2)} \quad (\varphi > 1),$$

$$D\hat{\sigma}_t^2 = \frac{\omega^2 \alpha^2 (1+\rho^2)(1-\rho^2)^2}{(\theta - \rho^2(\theta + \alpha^2))^2 ((2\theta - \alpha^2) - \rho^2(2\theta + 3\alpha^2))} \quad (\varphi > 2),$$

$$Skew\hat{\sigma}_t^2 = \frac{4\sqrt{\varphi-2}}{\varphi-3} \quad (\varphi > 3), \quad Kurt\hat{\sigma}_t^2 = \frac{30\varphi-66}{(\varphi-3)(\varphi-4)} \quad (\varphi > 4),$$

где $\varphi = \frac{(1-\rho^2)(1+2\psi)}{1+\rho^2}$.

Как видно из приведенных на рис. 1 графиков, с увеличением параметра $\psi = \theta/\alpha^2$ влияние корреляции на существование моментов стационарного распределения дисперсии значительно уменьшается.

На рис. 2 показана зависимость асимметрии и эксцесса от коэффициента корреляции. Как видим, асимметрия и эксцесс возрастают с увеличением корреляции ρ для $\theta=1$ и $\alpha=0.1$.

При анализе выборки также важно знать, насколько выборка соответствует стационарному распределению. Поэтому следует отметить, что определяемая в формуле (24) показателем экспоненты скорость сходимости монотонно уменьшается с возрастанием корреляции. Если судить о стабилизации процесса волатильности по второму моменту

$$E\{|\sigma_t^2 - \hat{\sigma}_t^2|^2\} = m_t^{(2)} = m_0^{(2)} \exp\left\{\left[-2\left(\theta - \alpha^2 \frac{1+3\rho^2}{2(1-\rho^2)}\right)\right]t\right\},$$

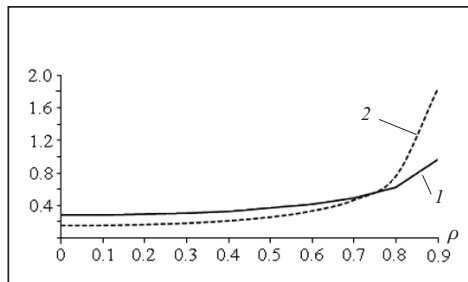


Рис. 2. Зависимость асимметрии (1) и эксцесса (2) от коэффициента корреляции

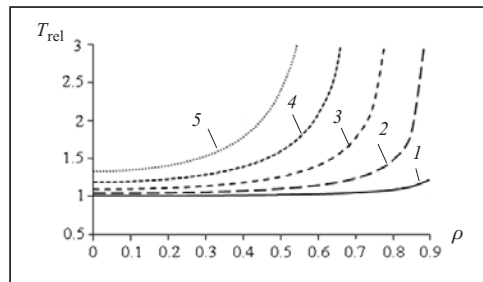


Рис. 3. Зависимость времени релаксации от корреляции при $\alpha = 0.1$ (1), $\alpha = 0.2$ (2), $\alpha = 0.3$ (3), $\alpha = 0.4$ (4), $\alpha = 0.5$ (5)

то при проверке гипотезы о параметре распределения следует убедиться, что с момента начала генерации соответствующих случайных величин прошло время релаксации T_{rel} , равное обратной величине показателя экспоненты процесса стабилизации волатильности:

$$T_{rel} = \left[2 \left(\theta - \alpha^2 \frac{1 + 3\rho^2}{2(1 - \rho^2)} \right) \right]^{-1}.$$

На рис. 3 показана зависимость времени релаксации от корреляции при различных значениях параметра α при $\theta = 0.5$. Из графиков заметим, что с увеличением α время релаксации более интенсивно возрастает при увеличении коэффициента корреляции.

Как видно из приведенных выше результатов, предложенный нами метод построения стохастических дифференциальных уравнений для накопленной избыточной доходности позволяет учесть влияние корреляции остатков регрессионных уравнений выборочных наблюдений. При отсутствии корреляции наши результаты совпадают с классическим результатом работы [1]. Систему стохастических дифференциальных уравнений (20) можно в дальнейшем использовать для анализа влияния корреляции при хеджировании опционов и других производных финансовых инструментов.

При анализе быстро осциллирующих регрессионных моделей динамики финансовых инструментов с гетероскедастичной условной дисперсией следует принимать во внимание возможную корреляцию остатков. Наличие автокорреляции сказывается не только на параметрах диффузионной аппроксимации, но и значительно уменьшает скорость стабилизации выборочной последовательности. Поэтому даже при статистической оценке параметров модели может возникнуть ошибка, связанная с тем, что анализируемая выборка не соответствует гипотезе об идентичности закона распределения наблюдаемых переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nelson D. B. ARCH models as diffusion approximation // *Journal of Econometrics*. — 1990. — **45**. — P. 7–38.
2. Canova F., Marrinan J. Predicting excess returns in financial markets // *European Economic Review*. — 1995. — **39**. — P. 35–69.
3. Engle R. F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation // *Econometrica*. — 1982. — **50**. — P. 987–1008.
4. Lo A., MacKinlay A. C. When are contrarian profits due to stock market overreaction? // *Review of Financial Studies*. — 1990. — **3**. — P. 175–205.
5. Boudoukh J., Richardson M. P., Whitelaw R. F. A tale of three schools: insights on autocorrelations of short-horizon stock returns // *The Review of Financial Studies*. — 1994. — **7**. — P. 539–573.
6. Sias R. W., Starks L. T. Return autocorrelation and institutional investors // *Journal of Financial Economics*. — 1997. — **46**. — P. 103–131.
7. Misako Takayasu, Hideki Takayasu, Mitsuhiro P. Okazaki. Transaction interval analysis of high resolution foreign exchange data // *Empirical Science of Financial Fluctuations* / H. Takayasu (ed.). — Tokyo: Springer-Verlag, 2002. — P. 18–25.
8. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1987. — 327 с.
9. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
10. Tsarkov Ye. Averaging in dynamical systems with Markov jumps // *University of Bremen, Germany*. — Report Nr. 282, April, 1993. — 41 p.
11. Korolyuk V. S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. — Singapore: World Scientific Publishers, 2005. — 330 p.

Поступила 08.07.2014