



В.А. СТОЯН

УДК 517.95:519.86

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ НЕ ПОЛНОСТЬЮ НАБЛЮДАЕМЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Аннотация. Сделан аналитический отчет об исследованиях в области математического моделирования динамики линейных пространственно распределенных систем в условиях ограниченности информации об их начально-краевом состоянии. Даны решения задач управления такими системами с помощью произвольной комбинации внешнединамических возмущающих факторов. Задачи решаются при непрерывно и дискретно определенных наблюдениях за начально-краевыми возмущениями системы и ее желаемом состоянии.

Ключевые слова: моделирование, системы с распределенными параметрами, динамические системы, начально-краевые задачи, управление.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие науки и техники, обусловленное необходимостью совершенствования новых гидро-, аэро- и космотехнологий второй половины прошлого века, предъявило новые требования и к их инженерно-математическим основам. В частности, модификации и дальнейшего развития потребовалось от надежных и классически простых физико-механических моделей [1, 2] упруго-гидродинамических процессов, от классически выверенных математических методов исследования этих моделей. Новые математические модели классически старых динамических процессов [3–5] и процессов, связанных с новейшими физико-механическими системами [6] при этом усложнились так, что не всегда удавалось математически корректно сформулировать задачу по их исследованию, а значит, получить корректное, точное и математически обоснованное решение задачи. Даже при наличии обозримых для практики математических методов проблема исследования современных моделей физико-механических и инженерных систем усложняется ввиду неполноты информации о начально-краевых внешнединамических возмущениях, которые в требуемом математической моделью объеме и качестве не всегда удается получить на практике. Примером таких систем, в частности, могут быть как сложные пространственно распределенные сооружения [7], так и неклассические элементы механических конструкций [3, 4] и современные физико-механические системы [8]. В настоящей статье рассмотрен один из возможных подходов к исследованию дифференциально описанных пространственно-временных процессов и явлений в условиях неполноты информации об их начально-краевом состоянии. Особенность подхода заключается в том, что он позволяет получить точное решение линейной дифференциальной модели процесса, согласованное по среднеквадратическому критерию с внешнединамическими (начальными, краевыми, поточными) наблюдениями за ним даже при малом количестве и плохом качестве (непрерывные, дискретные) последних. По этим же критериям

© В.А. Стоян, 2015

успешно решаются и задачи управления такими процессами при произвольной комбинации внешнединамических управляющих факторов (начальных, краевых и распределенных в области). Методика решения упомянутых задач была предложена в [9] и развита в [10] автором данной публикации в тесном сотрудничестве с профессором Н.Ф. Кириченко [11] и член-корреспондентом НАН Украины В.В. Скопецким [12], от которых он получил всестороннюю поддержку.

ПРОБЛЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ НЕ ПОЛНОСТЬЮ НАБЛЮДАЕМЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Математические модели динамики не полностью наблюдаемых пространственно распределенных систем. Рассмотрим пространственно распределенную в ограниченной контуром $\Gamma_0 \in R^n$ области $S_0 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n\}$ динамическую по $t \in [0, T]$ систему, функция $y(s)$, ($s = (x, t)$) которой удовлетворяет уравнению

$$L(\partial_s)y(s) = u(s), \quad (1)$$

где $\partial_s = (\partial_x, \partial_t) = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}, \partial_t)$, $L(\partial_s)$ — линейный дифференциальный оператор, $u(s)$ — пространственно распределенное внешнединамическое возмущение. Дифференциальное уравнение (1), описывающее физику исследуемого процесса, может быть дополнено начально-краевыми и поточными наблюдениями за ним, которые определяются соотношениями

$$L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0} = Y_r^0(x) \quad (x \in S; r = \overline{1, R_0}), \quad (2)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)|_{s \in \Gamma \times [0, T]} = Y_\rho^\Gamma(s) \quad (\rho = \overline{1, R_\Gamma}) \quad (3)$$

или соотношениями

$$L_i(\partial_s)y(s)|_{s \in S_0^T = S_0 \times [0, T]} = Y_i(s) \quad (i = \overline{1, I}); \quad (4)$$

$$L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0, x=x_l^0} = Y_{rl}^0 \quad (l = \overline{1, L_0}; \rho = \overline{1, R_0}), \quad (5)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)|_{s=s_l^\Gamma} = Y_{\rho l}^\Gamma \quad (l = \overline{1, L_\Gamma}; \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \quad (6)$$

$$L_i(\partial_s)y(s)|_{s=s_i} = Y_{il} \quad (l = \overline{1, L}; i = \overline{1, I}). \quad (7)$$

Здесь и далее $L_r^0(\partial_t)$, $L_\rho^\Gamma(\partial_x)$, $L_i(\partial_s)$ — линейные дифференциальные операторы, $Y_r^0(x)$, $Y_\rho^\Gamma(s)$, $Y_i(s)$ — непрерывно заданные функции, Y_{rl}^0 , $Y_{\rho l}^\Gamma$, Y_{il} — значения этих функций в точках $x_l^0 \in S_0$, $s_l^\Gamma \in \Gamma \times [0, T]$, $s_l \in S_0^T$, а $S \subset S_0$, $\Gamma \subset \Gamma_0$, $T \subset T_0$.

Для системы (1) поставим и решим два комплекса задач:

1) прямые задачи, решением которых будет функция $y(s)$ состояния системы (1) при наблюдениях (2)–(4) или (5)–(7) за ней;

2) обратные задачи, т.е. задачи управления системой (1)–(4) и (1), (5)–(7) при непрерывно и дискретно заданных желаемых состояниях

$$Y_i^*(s) = L_i^*(\partial_s)y(s)|_{s \in S_0^T} \quad (i = \overline{1, I^*}), \quad (8)$$

$$Y_{il}^* = L_i^*(\partial_s)y(s)|_{s=s_l^* \in S_0^T} \quad (l = \overline{1, L^*}; i = \overline{1, I^*}) \quad (9)$$

и одном, двух или трех из возможных для управления внешнединамических факторов $u(s)$, $Y_r^0(x)$, $Y_\rho^\Gamma(s)$.

Следует отметить, что такие задачи не считаются простыми и могут быть решены численно (тем более аналитически) только для определенного типа операторов $L_i^*(\partial_s)$ ($i = \overline{1, I^*}$), $L_r^0(\partial_t)$ ($r = \overline{1, R_0}$), $L_\rho^\Gamma(\partial_x)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$), в канонических про-

странственно-временных областях, при порядке согласования дифференциальных операторов $L_i(\partial_s)$, $L_r^0(\partial_t)$, $L_\rho^\Gamma(\partial_x)$ с количеством R_0 , R_Γ начально-краевых условий, которые, как правило, формулируются при заданных в определенном классе функциях $Y_r^0(x)$ ($r=1, R_0$), $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho=1, R_\Gamma$). Исследование дискретно (согласно (5)–(7)) наблюдаемой системы (1) при произвольных значениях R_0 , R_Γ , $L_i(\partial_s)$ ($i=1, I$), $L_r^0(\partial_t)$ ($r=1, R_0$), $L_\rho^\Gamma(\partial_x)$ ($\rho=1, R_\Gamma$) является задачей неразрешимой.

Следуя научным результатам работ [10, 12], представим решения задач (1)–(4), (8) и (1), (5)–(7), (9) как в прямой, так и обратной постановках без ограничений на операторы $L_i^*(\partial_s)$ ($i=1, I^*$), на количество, структуру и качество (дискретные, непрерывные) начально-краевых, поточных и желаемых наблюдений за системой, при произвольном подборе управляющих внешнединамических факторов.

Учитывая произвольность в постановках задач, что связано с их математической некорректностью, решения построим так, чтобы функция $y(s)$ состояния системы точно удовлетворяла уравнению (1), а также согласовывалась с начально-краевыми (2), (3) или (5), (6), поточными (4), (7) наблюдениями и желаемым состоянием (8), (9) за среднеквадратическим критерием независимо от количества и качества последних.

В зависимости от конкретных постановок задач элементами таких критериев являются

$$\Phi_1 \equiv \Phi_{01} = \sum_{r=1}^{R_0} \int_S (L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx \rightarrow \min_{y(s)}, \quad (10)$$

$$\Phi_2 \equiv \Phi_{02} = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0, x=x_l^0} - Y_{rl}^0)^2 \rightarrow \min_{y(s)}, \quad (11)$$

$$\Phi_3 \equiv \Phi_{\Gamma 1} = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} (L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s) - Y_\rho^\Gamma(s))^2 ds \rightarrow \min_{y(s)}, \quad (12)$$

$$\Phi_4 \equiv \Phi_{\Gamma 2} = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)|_{s=s_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 \rightarrow \min_{y(s)}, \quad (13)$$

$$\Phi_5 \equiv \bar{\Phi}_1 = \sum_{i=1}^I \int_{S_0^\Gamma} (L_i(\partial_s)y(s) - Y_i(s))^2 ds \rightarrow \min_{y(s)}, \quad (14)$$

$$\Phi_6 \equiv \bar{\Phi}_2 = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L (L_i(\partial_s)y(s)|_{s=s_l} - Y_{il})^2 \rightarrow \min_{y(s)}, \quad (15)$$

$$\Phi_7 \equiv \Phi_1^* = \sum_{i=1}^{I^*} \int_{S_0^{\Gamma^*}} (L_i^*(\partial_s)y(s) - Y_i^*(s))^2 ds \rightarrow \min_{y(s)}, \quad (16)$$

$$\Phi_8 \equiv \Phi_2^* = \sum_{i=1}^{I^*} \sum_{l=1}^{L^*} (L_i^*(\partial_s)y(s)|_{s=s_l^*} - Y_{il}^*)^2 \rightarrow \min_{y(s)}. \quad (17)$$

При решении рассматриваемых задач дифференциальную модель (1) исследуемой системы заменим [10] интегральным эквивалентом

$$y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s-s')u(s')ds'. \quad (18)$$

Здесь $G(s-s')$ является функцией Грина системы (1) в неограниченной про-

Псевдоинверсный подход к исследованию линейных алгебраических, интегральных и функциональных систем. Рассмотрим особенности математической модели (18), в частности математические результаты ее решения или псевдообращения в общем случае. С учетом специфики исследуемых ниже задач рассмотрим случай, когда соотношение (18) точками $s_l \in S_0^T$ ($l = \overline{1, L}$) и $s'_m \in S_0^T$ ($m = \overline{1, M}$) дискретизировано по координатам S, S' соответственно. В результате имеем систему алгебраических уравнений

$$A\vec{u} = \vec{y}, \quad (20)$$

где

$$\vec{u} = \text{col}(u(s'_m), m = \overline{1, M}),$$

$$\vec{y} = \text{col}(y(s_l), l = \overline{1, L}),$$

$$A = [G(s_l - s'_m)]_{l,m=1}^{l=L, m=M}.$$

Рассмотрим также случаи, когда система (18) дискретизирована по одной из двух координатных систем; в результате имеем систему интегральных уравнений

$$\int_{S_0^T} A(s')u(s')ds' = \vec{y} \quad (21)$$

или функциональных уравнений

$$B(s)\vec{u} = y(s) \quad (s \in S_0^T), \quad (22)$$

в которых при определенных выше \vec{u}, \vec{y}

$$A(s') = \text{col}(G(s_l - s'), l = \overline{1, L}), \quad B(s) = \text{str}(G(s - s'_m), m = \overline{1, M}).$$

Учитывая, что задачи решения уравнений (20)–(22) относительно функции $u(s)$ и вектора \vec{u} не всегда разрешимы, остановимся на вопросах построения и исследования множеств

$$\Omega_1 = \{\vec{u}: \|A\vec{u} - \vec{y}\|^2 \rightarrow \min_{\vec{u}}\}, \quad (23)$$

$$\Omega_2 = \left\{ u(s): \left\| \int_{S_0^T} A(s')u(s')ds' - \vec{y} \right\|^2 \rightarrow \min_{u(s)} \right\}, \quad (24)$$

$$\Omega_3 = \left\{ \vec{u}: \left\| \int_{S_0^T} (B(s)\vec{u} - y(s))ds \right\|^2 \rightarrow \min_{\vec{u}} \right\} \quad (25)$$

при определенных выше матрице A , столбце-функции $A(s)$ и строке-функции $B(s)$. При этом будем исходить из результатов [14] псевдообращения систем линейных алгебраических уравнений (20) и их обобщений, предложенных в [11] и развитых в [10].

Согласно работы [14]

$$\Omega_1 = \text{Arg} \min_{\vec{u} \in R^m} \|A\vec{u} - \vec{y}\|^2 = \{\vec{u}: \vec{u} = A^+ \vec{y} + \vec{v} - A^+ A \vec{v}\} \quad (26)$$

при произвольном M -мерном векторе \vec{v} , тождественно равно нулю, если $\det A^T A > 0$. Точность псевдообращения (26) системы (20) определяется величиной

$$\varepsilon^2 = \min_{\vec{u} \in \Omega_1} \|A\vec{u} - \vec{y}\|^2 = \vec{y}^T \vec{y} - \vec{y} A A^+ \vec{y}.$$

Заметим, что символом + здесь и далее обозначена операция обращения (псевдообращения) матрицы такая, что $A^+ = A^T (AA^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T$.

Для системы (21) согласно [10, 11]

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \text{Arg min}_{u(s)} \left\| \int_{S_0^T} A(s')u(s')ds' - \bar{y} \right\|^2 = \\ &= \{u(s): u(s) = A^T(s)P_1^+ \bar{y} + \nu(s) - A^T(s)P_1^+ A_\nu\}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\nu(s)$ — интегрируемая в области S_0^T произвольная функция, тождественно равная нулю, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det [A^T(s_l)A(s'_m)]_{l,m=1}^{l=N,m=N} > 0$$

для $s_l, s'_m \in S_0^T$, а также

$$P_1 = \int_{S_0^T} A(s)A^T(s)ds, \quad A_\nu = \int_{S_0^T} A(s)\nu(s)ds.$$

При этом

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s) \in \Omega_2} \left\| \int_{S_0^T} A(s')u(s')ds' - \bar{y} \right\|^2 = \bar{y}^T \bar{y} - \bar{y}^T P_1 P_1^+ \bar{y}.$$

Следуя [10,11], запишем

$$\Omega_3 = \text{Arg min}_{\bar{u} \in R^M} \left\| \int_{S_0^T} (B(s)\bar{u} - y(s))ds \right\|^2 = P_2^+ B_y + \bar{v} - P_2^+ P_2 \bar{v}, \quad (28)$$

где \bar{v} — произвольный M -мерный вектор, $P_2 = \int_{S_0^T} B^T(s)B(s)ds$, $B_y = \int_{S_0^T} B^T(s)y(s)ds$.

Однозначность множества Ω_3 ($\bar{v}=0$) определяется условием $\det P_2 > 0$, а точность псевдорешения (28) системы (22) — величиной

$$\varepsilon^2 = \min_{\bar{u} \in \Omega_3} \left\| \int_{S_0^T} (B(s)\bar{u} - y(s))ds \right\|^2 = y^2 - B_y^T P_2^+ B_y,$$

где $y^2 = \int_{S_0^T} y^2(s)ds$.

Идейные основы математического моделирования начально-краевых внешнединамических возмущающих факторов. Приведенные выше возможности по построению и исследованию на точность и однозначность общих решений (26)–(28) линейных алгебраических, интегральных и функциональных систем (20) – (22), которые являются частным случаем математической модели (18) процесса (1), рассматриваемого в неограниченной пространственно-временной области, могут быть использованы при решении уравнения (1), дополненного начально-краевыми наблюдениями (2)–(4) и (5)–(7).

Эффект действия начально-краевых возмущающих факторов, заданных непрерывными функциями $Y_r^0(x)$ ($r=1, R_0$), $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho=1, R_\Gamma$) или их дискретными значениями Y_{rl}^0 ($r=1, R_0, l=1, L_0$), $Y_{\rho l}^\Gamma$ ($\rho=1, R_\Gamma, l=1, L_\Gamma$), будем имитировать функциями $u_0(s)$ и $u_\Gamma(s)$, определенными при $s \in S^0 = S_0 \times [-\infty, 0]$ и $s \in S^\Gamma = (R^n / S_0) \times [0, T]$ соответственно.

Учитывая, что при известной функции $G(s-s')$ для рассматриваемого процесса влияние функций $u_0(s)$ и $u_\Gamma(s)$ на состояние системы определяется соотношениями

$$y_0(s) = \int_{S^0} G(s-s')u_0(s')ds', \quad (29)$$

$$y_\Gamma(s) = \int_{S^\Gamma} G(s-s')u_\Gamma(s')ds', \quad (30)$$

в силу чего

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) + y_\Gamma(s), \quad (31)$$

где

$$y_\infty(s) = \int_{S_0^T} G(s-s')u(s')ds', \quad (32)$$

критерии (10)–(17) приведем к виду

$$\Phi_i \rightarrow \min_{u_0(s), u_\Gamma(s)} (i = \overline{1, 8}) \quad (33)$$

при известной функции $u(s)$ и

$$\Phi_i \rightarrow \min_{u_0(s), u_\Gamma(s), u(s)},$$

если $u(s)$ — управляющая. Наличие функции $u(s)$ известных или управляющих внешнединамических возмущающих факторов, а также моделирующих функций $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ позволит согласно (31) определить функцию $y(s)$, а затем и начально-краевые возмущающие факторы $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$), $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$), если они являются управляемыми.

Проблемы построения функции $y(s)$ в прямых задачах и управляющих функций $u(s)$, $Y_r^0(x)$, $Y_\rho^\Gamma(s)$ в обратных задачах могут быть решены и при дискретном определении моделирующих функций $u_0(s)$ и $u_\Gamma(s)$. С учетом того, что в этом случае

$$y_0(s) = \sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0)u_{0m}, \quad (34)$$

$$y_\Gamma(s) = \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s-s_m^\Gamma)u_{\Gamma m}, \quad (35)$$

где $u_{0m} = u_0(s_m^0)$ ($s_m^0 \in S^0$), $u_{\Gamma m} = u_\Gamma(s_m^\Gamma)$ ($s_m^\Gamma \in S^\Gamma$), проблема построения векторов

$$\bar{u}_0 = \text{col}(u_{0m}, m = \overline{1, M_0}),$$

$$\bar{u}_\Gamma = \text{col}(u_{\Gamma m}, m = \overline{1, M_\Gamma})$$

значений u_{0m} ($m = \overline{1, M_0}$), $u_{\Gamma m}$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) моделирующих функций $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ сведется к задаче

$$\Phi_i \rightarrow \min_{\bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma} (i = \overline{1, 8}) \quad (36)$$

при известной функции $u(s)$ и

$$\Phi_i \rightarrow \min_{\bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma, \bar{u}} (i = \overline{1, 8}) \quad (37)$$

для случая, когда

$$y_\infty(s) = \sum_{m=1}^M G(s-s'_m)u_m, \quad (38)$$

а функция $u(s)$ задается вектором $\bar{u} = \text{col}(u_m, m = \overline{1, M})$ значений $u_m = u(s'_m)$ ($s'_m \in S_0^T$) и является управляющей. Алгоритм определения управляющих функций $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) и $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) в этом случае останется неизменным.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ НЕ ПОЛНОСТЬЮ НАБЛЮДАЕМЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Математическое моделирование состояния непрерывно наблюдаемых пространственно-временных систем. Рассмотрим решение задачи построения функции $y(s)$ состояния системы (1), которая под действием внешнединамического фактора $u(s)$ функционирует в пространственно-временной области S_0^T и допускает начально-краевые наблюдения (2)–(4) за ней. Критерий решения задачи выберем в виде

$$\Phi^1 = \Phi_{01} + \Phi_{\Gamma 1} + \bar{\Phi}_1 \rightarrow \min_{y(s)}$$

Будем исходить из того, что $y(s)$ задано соотношением (31), составляющие $y_\infty(s)$, $y_0(s)$ и $y_\Gamma(s)$ которого согласно (32), (34), (35) определены компонентами u_{0m} ($m = \overline{1, M_0}$), $u_{\Gamma m}$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) векторов \bar{u}_0 , \bar{u}_Γ . Эти векторы определим из условия

$$\Phi^1 \rightarrow \min_{\bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma}. \quad (39)$$

Решением (39), построенным [10] согласно (25), являются

$$\bar{u}_0 \in \Omega_0 = \{u_0 : u_0 = Q_1 B_Y + v_0 - Q_1 P_2 \bar{v}\}, \quad (40)$$

$$\bar{u}_\Gamma \in \Omega_\Gamma = \{u_\Gamma : u_\Gamma = Q_2 B_Y + v_\Gamma - Q_2 P_2 \bar{v}\} \quad (41)$$

при

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = P_2^+, \quad P_2 = \int_{(\cdot)} B^T(s) B(s) ds, \quad B_Y = \int_{(\cdot)} B^T(s) \bar{Y}(s) ds, \quad (42)$$

произвольных $v_0 \in R^{M_0}$, $v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}$ и $\bar{v} = \text{col}(v_0, v_\Gamma)$. Здесь

$$B(s) = \text{str} \left[\begin{pmatrix} (B_{1j}(x) (x \in S)) \\ (B_{2j}(s) (s \in \Gamma \times [0, T])) \\ (B_{3j}(s) (s \in S_0^T)) \end{pmatrix}, j = \overline{1, 2} \right], \quad \bar{Y}(s) = \begin{pmatrix} (Y_0(x) (x \in S)) \\ (Y_\Gamma(s) (s \in \Gamma \times [0, T])) \\ (Y(s) (s \in S_0^T)) \end{pmatrix}$$

при

$$B_{1j}(x) = [L_r^0(\partial_t)G(s-s'_m^j)|_{t=0}]_{r,m=1}^{r=R_0, m=M_j} (x \in S),$$

$$B_{2j}(s) = [L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s'_m^j)]_{\rho,m=1}^{\rho=R_\Gamma, m=M_j} (s \in \Gamma \times [0, T]),$$

$$B_{3j}(s) = [L_i(\partial_s)G(s-s'_m^j)]_{i,m=1}^{i=I, m=M_j} (s \in S_0^T)$$

$$(s'_m^j \equiv s'_m, M_j \equiv M_0 \text{ при } j=1; s'_m^j \equiv s'_m^\Gamma, M_j \equiv M_\Gamma \text{ при } j=2),$$

$$Y_0(x) = \text{col}((Y_r^0 - L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)|_{t=0}), r = \overline{1, R_0}),$$

$$Y_\Gamma(s) = \text{col}((Y_\rho^\Gamma(s) - L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$Y(s) = \text{col}((Y_i(s) - L_i(\partial_s)y_\infty(s)), i = \overline{1, I}). \quad (43)$$

Символ (\cdot) означает, что интегрирование выполняется в области определения подынтегральной функции. Решение задачи будет однозначным $(\bar{v} \equiv 0)$, если $\det P_2 > 0$.

Построенная с учетом (40), (41) функция состояния (31) начально-краевыми и поточными наблюдениями (2)–(4) удовлетворяет с точностью

$$\varepsilon^2 = \min_{y(s)} [\Phi_{01} + \Phi_{\Gamma 1} + \bar{\Phi}_1] = \min_{\substack{\bar{u}_0 \in \Omega_0 \\ \bar{u}_\Gamma \in \Omega_\Gamma}} \Phi^1 = Y^2 - B_Y^T P_2^+ B_Y$$

$$\text{при } Y^2 = \int_{(\cdot)} \bar{Y}^T(s) \bar{Y}(s) ds.$$

Математическое моделирование состояния дискретно наблюдаемых пространственно-временных систем. Построим функцию состояния $y(s)$ системы (1) для случая, когда наблюдения за ней описываются соотношениями (5)–(7), а функция $u(s)$ задана.

Приведенные выше результаты по псевдообращению алгебраических и интегральных систем вида (20) и (21) позволяют решить эту задачу для случаев, когда составляющие $y_0(s)$ и $y_\Gamma(s)$ функции $y(s)$ состояния (31) системы (1) представляются соотношениями (34), (35) (как и выше) и (29), (30).

Определяя критерий построения функции $y(s)$ соотношением

$$\Phi^2 = \Phi_{02} + \Phi_{\Gamma 2} + \bar{\Phi}_2 \min_{y(s)},$$

в первом случае получим задачу

$$\Phi^2 \rightarrow \min_{\bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma} \quad (44)$$

построения векторов $\bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma$ значений $u_{0m}, u_{\Gamma m}$ моделирующих функций $u_0(s), u_\Gamma(s)$. Во втором случае имеется возможность решить задачу

$$\Phi^2 \rightarrow \min_{u_0(s), u_\Gamma(s)} \quad (45)$$

и получить аналитические выражения для моделирующих функций $u_0(s), u_\Gamma(s)$.

Решение задачи (44) сведется к псевдообращению линейных алгебраических систем вида (20), в результате чего получим

$$\bar{u}_0 \in \Omega_0 = \{u_0 : u_0 = Q_1 A^T (\bar{Y} - A\bar{v}) + v_0\}, \quad (46)$$

$$\bar{u}_\Gamma \in \Omega_\Gamma = \{u_\Gamma : u_\Gamma = Q_2 A^T (\bar{Y} - A\bar{v}) + v_\Gamma\} \quad (47)$$

при произвольных $v_0 \in R^{M_0}, v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}$,

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_\Gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = (A^T A)^+, A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}, \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_\Gamma \\ Y \end{pmatrix}, \quad (48)$$

а также

$$\begin{aligned} A_{1j} &= \text{str}(\text{col}((L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^j)|_{t=0, x=x_l^0}), l=\overline{1, L_0}), r=\overline{1, R_0}), m=\overline{1, M_j}), \\ A_{2j} &= \text{str}(\text{col}((L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^j)|_{s=s_l^\Gamma}), l=\overline{1, L_\Gamma}), \rho=\overline{1, R_\Gamma}), m=\overline{1, M_j}), \\ A_{3j} &= \text{str}(\text{col}((L_i(\partial_s)G(s-s_m^j)|_{s=s_l}), l=\overline{1, L}), i=\overline{1, I}), m=\overline{1, M_j}), \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} Y_0 &= \text{col}(((Y_{rl}^0 - L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)|_{t=0, x=x_l^0}), l=\overline{1, L_0}), r=\overline{1, R_0}), \\ Y_\Gamma &= \text{col}(((Y_{\rho l}^\Gamma - L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)|_{s=s_l^\Gamma}), l=\overline{1, L_\Gamma}), \rho=\overline{1, R_\Gamma}), \\ Y &= \text{col}(((Y_{il} - L_i(\partial_s)y_\infty(s)|_{s=s_l}), l=\overline{1, L}), i=\overline{1, I}), \end{aligned} \quad (50)$$

где, как и выше, $s'_m{}^j \equiv s'_m{}^0$, $M_j \equiv M_0$ при $j=1$ и $s'_m{}^j \equiv s'_m{}^\Gamma$, $M_j \equiv M_\Gamma$ при $j=2$.

Точность и однозначность ($\bar{v} \equiv 0$) решения задачи определяется величиной

$$\varepsilon^2 = \min_{y(s)} [\Phi_{02} + \Phi_{\Gamma 2} + \bar{\Phi}_2] = \min_{\substack{\bar{u}_0 \in \Omega_0 \\ \bar{u}_\Gamma \in \Omega_\Gamma}} \Phi^2 = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T A A^+ \bar{Y}$$

и условием $\det A^T A > 0$ соответственно.

Для случая, когда начально-краевые возмущения Y_{rl}^0 ($r = \overline{1, R_0}$, $l = \overline{1, L_0}$), $Y_{\rho l}^\Gamma$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$, $l = \overline{1, L_\Gamma}$) моделируются непрерывно определенными функциями $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$, которые являются решением задачи (45), согласно (27) находим

$$u_0(s) \in \Omega_0 = \{u_0(s) : u_0(s) = A_0^T(s) P_1^+ (\bar{Y} - A_v) + v_0(s)\}, \quad (51)$$

$$u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma = \{u_\Gamma(s) : u_\Gamma(s) = A_\Gamma^T(s) P_1^+ (\bar{Y} - A_v) + v_\Gamma(s)\}, \quad (52)$$

где при заданном выше векторе \bar{Y} и произвольных интегрируемых в области определения функциях $v_0(s)$ ($s \in S^0$) и $v_\Gamma(s)$ ($s \in S^\Gamma$), $v(s) = \text{col}(v_0(s), v_\Gamma(s))$ имеем

$$\begin{aligned} A(s) &= ((A_0(s) (s \in S^0)), (A_\Gamma(s) (s \in S^\Gamma))), \\ P_1 &= \int_{(\cdot)} A(s) A^T(s) ds, \quad A_v = \int_{(\cdot)} A(s) v(s) ds, \quad (53) \\ A_0(s) &= \text{col}(A_{i1}(s), i = \overline{1, 3}), \\ A_\Gamma(s) &= \text{col}(A_{i2}(s), i = \overline{1, 3}), \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} A_{1j}(s') &= \text{col}((L_r^0(\partial_t)G(s-s')|_{t=0, x=x_l^0}, l = \overline{1, L_0}), r = \overline{1, R_0}), \\ A_{2j}(s') &= \text{col}((L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s')|_{s=s_l^\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \quad (54) \\ A_{3j}(s') &= \text{col}((L_i(\partial_s)G(s-s')|_{s=s_l}, l = \overline{1, L}), i = \overline{1, I}) \quad (j = \overline{1, 2}). \end{aligned}$$

При этом $v_0(s) = v_\Gamma(s) \equiv 0$, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det [A^T(s'_i) A(s'_j)]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0 \quad (55)$$

и

$$\varepsilon^2 = \min_{y(s)} (\Phi_{02} + \Phi_{\Gamma 2} + \bar{\Phi}_2) = \min_{\substack{u_0(s) \in \Omega_0 \\ u_\Gamma(s) \in \Omega_\Gamma}} \Phi^2 = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P_1 P_1^+ \bar{Y}.$$

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Управление функцией распределенных внешнединамических воздействий. Рассмотрим задачи управления системой (1) по достижении функцией $y(s)$ состояний $Y_i^*(s)$ ($i = \overline{1, I^*}$) и Y_{il}^* ($i = \overline{1, I^*}; l = \overline{1, L^*}$), определенных соотношениями (8) и (9) соответственно.

Будем исходить из того, что математическая модель (1) может быть дополнена начально-краевыми и поточными наблюдениями (2)–(4) или (5)–(7) за ней, если последние не являются управляющими, а распределенные внешнединамические управления находятся непрерывно (функцией $u(s)$) или дискретно (значениями $u_m = u(s'_m)$ ($m = \overline{1, M}$) этой функции). При этом выделим три случая постановки и решения задачи:

1) непрерывно определенное желаемое состояние $\overline{Y_i^*}(s)$ ($i = \overline{1, I^*}$) достигается при дискретно определенных управлениях u_m ($m = \overline{1, M}$);

2) дискретно определенное желаемое состояние $\overline{Y_{il}^*}$ ($i = \overline{1, I^*}, l = \overline{1, L^*}$) достигается при дискретном управлении u_m ($m = \overline{1, M}$);

3) в состоянии (или его среднеквадратическое приближение) $\overline{Y_{il}^*}$ ($i = \overline{1, I^*}, l = \overline{1, L^*}$) функция $y(s)$ выводится непрерывно определенным управлением $u(s)$.

Задача 1. Непрерывно определенное состояние $\overline{Y_i^*}(s)$ ($i = \overline{1, I^*}$) достигается дискретными управлениями u_m ($m = \overline{1, M}$).

При наличии начально-краевых и поточных наблюдений (2)–(4) за системой критерием решения задачи будет

$$\Phi^3 = \Phi_{01} + \Phi_{\Gamma 1} + \overline{\Phi}_1 + \Phi_1^* \rightarrow \min_{y(s)}. \quad (56)$$

Определяя, как и выше, $y(s)$ соотношениями (31), (34), (35), (38), задачу (56) запишем в виде

$$\Phi^3 \rightarrow \min_{\overline{u}_0, \overline{u}_\Gamma, \overline{u}}, \quad (57)$$

где при рассматриваемых выше $\overline{u}_0, \overline{u}_\Gamma$ имеем $\overline{u} = \text{col}(u_m, m = \overline{1, M})$.

Нетрудно увидеть, что задача (57) является расширением задачи (39). С учетом решения задачи (39), которое определяется соотношениями (40), (41), запишем выражения для векторов $\overline{u}_0, \overline{u}_\Gamma, \overline{u}$. Для этого, оставляя без изменений определение столбцов-функций $B_{ij}(s)$ ($i = \overline{1, 3}; j = \overline{1, 2}$), введем в рассмотрение векторные функции

$$Y_{0*}(x) = \text{col}(Y_r^0(x), r = \overline{1, R_0}),$$

$$Y_{\Gamma*}(s) = \text{col}(Y_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$Y_*(s) = \text{col}(Y_i(s), i = \overline{1, I}),$$

$$Y^*(s) = \text{col}(Y_i^*(s), i = \overline{1, I^*}),$$

$$\overline{Y}(s) = \text{col}(Y_{0*}(x), Y_{\Gamma*}(s), Y_*(s), Y^*(s)),$$

блоки функции

$$B_{4j}(s) = [L_i^*(\partial_s)G(s - s_m^j)]_{i,m=1}^{i=I^*, m=M_j} \quad (s \in S_0^T; j = \overline{1, 3}),$$

а также аналогично (43) блоки $B_{i3}(s)$ при $i = \overline{1, 3}$ и $M_3 \equiv M, s_m^3 \equiv s_m^j \in S_0^T$.

С учетом этих изменений через матричную функцию

$$B(s) = [B_{ij}(s)]_{i,j=1}^{i=4, j=3}$$

при определенных в (42) матрице P_2 , векторе B_Y и $P_2^+ = \text{col}(Q_i, i = \overline{1, 3})$ согласно (40), (41) запишем выражения для моделирующих векторов $\overline{u}_0, \overline{u}_\Gamma$. Аналогично (40), (41) множество управляющих векторов \overline{u} получим в виде $\Omega_u = \{\overline{u} : \overline{u} = Q_3(B_Y - P_2^+ \overline{v}) + v\}$. Здесь $\overline{v} = \text{col}(v_0, v_\Gamma, v)$, где $v_0 \in R^{M_0}, v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}, v \in R^M$ — произвольные векторы, тождественно равные нулю (управление однозначное), если $\det P_2 > 0$. При этом

$$\varepsilon^2 = \min_{y(s)} (\Phi_{01} + \Phi_{\Gamma 1} + \overline{\Phi}_1 + \Phi_1^*) = \min_{\substack{\overline{u}_0 \in \Omega_0 \\ \overline{u}_\Gamma \in \Omega_\Gamma \\ \overline{u} \in \Omega_u}} \overline{\Phi}^3 = \int \overline{Y}^T(s) \overline{Y}(s) ds - B_Y^T P_2^+ B_Y. \quad (\cdot)$$

Задача 2. Определенные согласно (9) дискретные значения Y_{il}^* ($i=1, \overline{I^*}; l=1, \overline{L^*}$) достигаются вектором \bar{u} дискретных управлений $u_m = u(s'_m)$ ($m=1, M$).

Поскольку управление системой (1) выполняется при наличии наблюдений (5)–(7) за ней, критерий решения задачи запишем в виде

$$\Phi^4 = \Phi_{02} + \Phi_{\Gamma 2} + \bar{\Phi}_2 + \Phi_2^* \rightarrow \min_{y(s)}, \quad (58)$$

что при представленной соотношениями (31), (34), (35), (38) функции $y(s)$ эквивалентно

$$\Phi^4 \rightarrow \min_{\bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma, \bar{u}}. \quad (59)$$

Решение задачи (59) получим с учетом решения (46), (47) задачи (44). Для этого введем в рассмотрение векторы

$$Y_{0*} = \text{col}((Y_{rl}^0, l=1, \overline{L_0}), r=1, \overline{R_0}),$$

$$Y_{\Gamma*} = \text{col}((Y_{\rho l}^\Gamma, l=1, \overline{L_\Gamma}), \rho=1, \overline{R_\Gamma}),$$

$$Y_* = \text{col}((Y_{il}, l=1, \overline{L}), i=1, \overline{I}),$$

$$Y^* = \text{col}((Y_{il}^*, l=1, \overline{L^*}), i=1, \overline{I^*}),$$

$$\bar{Y} = \text{col}(Y_{0*}, Y_{\Gamma*}, Y_*, Y^*), \quad (60)$$

а также матрицу

$$A = [A_{ij}]_{i,j=1}^{i=4, j=3},$$

блоки A_{i3} ($i=1, 3$) которой определены согласно (49), $s_m^3 \equiv s'_m$, $A_{4j} = \text{str}(\text{col}((L_i^*(\partial_s)G(s-s_m^j)|_{s=s_i^*}, l=1, \overline{L^*}), i=1, \overline{I^*}), m=1, \overline{M_j})$ (здесь $M_3 \equiv M$, $s_m^3 \equiv s'_m \in S_0^T$).

С учетом этих изменений моделирующие векторы $\bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma$ определим соотношениями (46), (47). Для управляющего вектора \bar{u} аналогично (46), (47), получим

$$\Omega_u = \{\bar{u}: \bar{u} = Q_3 A^T (\bar{Y} - A\bar{v}) + v\},$$

где $\bar{v} = \text{col}(v_0, v_\Gamma, v)$ при произвольных M_0 - M_Γ - и M -мерных векторах v_0, v_Γ, v , тождественно равных нулю (решение задачи однозначное), если

$$\det A^T A > 0,$$

а блок Q_3 определен соотношением $\text{col}(Q_1, Q_2, Q_3) = (A^T A)^+$.

Задача 3. В дискретно определенные значения Y_{il}^* ($i=1, \overline{I^*}; l=1, \overline{L^*}$) функция состояния $y(s)$ выводится непрерывно определенным управлением $u(s)$.

Решение задачи (1), (5)–(7), (9) построим согласно критерию (58), который с учетом определения (29)–(32) функции $y(s)$ запишем в виде

$$\Phi^4 \rightarrow \min_{u_0(s), u_\Gamma(s), u(s)}. \quad (61)$$

Выражения для функций $u_0(s), u_\Gamma(s)$, определяющих решение задачи (61), получим из (51), (52) при \bar{Y} , заданном в (60), и матричной функции $A(s) = [A_{ij}(s)]_{i,j=1}^{i=4, j=3}$, где в дополнение к (54)

$$A_{4j}(s') = \text{col}((L_i^* (\partial_s) G(s-s')|_{s=s_j^*}, l=1, \overline{L^*}), i=1, \overline{I^*}),$$

а выражения для $A_{i3}(s)$ ($i=1,3$) следуют из (54) при $j=3$. Множество управляющих функций $u(s)$ аналогично (51), (52) запишем в виде

$$\Omega_u = \{u(s) : (A_{13}^T(s), A_{23}^T(s), A_{33}^T(s), A_{43}^T(s))P_1^+ (Y - A_v) + v^*(s)\},$$

где $v^*(s)$ ($s \in S_0^T$) — произвольная интегрируемая в S_0^T функция,

$$v(s) = \text{col}(v_0(s), v_\Gamma(s), v^*(s)),$$

а P_1 и A_v с учетом упомянутых изменений определяются согласно (53).

Условием однозначности ($v(s) \equiv 0$) решения задачи будет соотношение (55). Точность решения определится величиной

$$\varepsilon^2 = \min_{y(s)} (\Phi_{02} + \Phi_{\Gamma 2} + \overline{\Phi}_2 + \Phi_2^*) = \min_{u_0(s), u_\Gamma(s), u(s)} \Phi^4 = \overline{Y}^T \overline{Y} - \overline{Y}^T P_1 P_1^+ \overline{Y}.$$

Управление начальными, краевыми и начально-краевыми возмущающими факторами. Рассмотренные выше задачи управления системой (1) по достижении ее функцией состояния $y(s)$ непрерывно и дискретно определенных значений (8), (9) можно решить и в случае, если управляющая функция $u(s)$ (непрерывно и дискретно определенная) действует совместно с начальными, краевыми и начально-краевыми внешнединамическими управляющими факторами. Возможны варианты управления рассматриваемой системой и посредством этих управляющих воздействий при известной функции $u(s)$.

Поскольку управляющие начально-краевые воздействия (2), (3) могут быть определены только при известной функции $y(s)$, можем заключить, что расчетные соотношения решений названных задач являются частным случаем рассмотренных выше задач. Последнее позволяет при рассмотрении названного класса задач ограничиться чисто описательной частью.

Пространственно-временное и начально-краевое управление. Рассмотрим особенности решения задач управления системой (1) в случае, когда пространственно-временная управляющая функция $u(s)$ дополняется начально-краевыми управляющими воздействиями $Y_r^0(x)$ ($r=1, R_0$), $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho=1, R_\Gamma$), совершаемыми в отдельности и совместно.

Для случая, когда управлением являются функции $u(s)$ и $Y_r^0(x)$ ($r=1, \overline{R_0}$), в исходных соотношениях задач управления будут отсутствовать соотношения (2), (5), а в функционалах Φ^3, Φ^4 — составляющие Φ_{01}, Φ_{02} . Функция $y(s)$ состояния системы, определяющая соотношением (2) управление $Y_r^0(x)$ ($r=1, \overline{R_0}$), может быть построена с учетом результатов решения рассмотренных выше трех задач, в которых будут отсутствовать составляющие Y_{0*} и $Y_{0*}(x)$, в определении вектора \overline{Y} и вектор-функции $\overline{Y}(s)$, а матрица A и матричные функции $A(s), B(s)$ не имеют первых блок-строк.

Аналогичные изменения в рамках рассмотренных выше задач будут и для случая, когда управляющее воздействие $u(s)$ дополняется управлениями $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho=1, \overline{R_\Gamma}$). Отсутствие соотношения (3) в исходной формулировке задачи обуславливает отсутствие составляющих $\Phi_{\Gamma 1}, \Phi_{\Gamma 2}$ при определении функционалов Φ^3, Φ^4 . Выражения для управляюще-моделирующих функций $u(s), u_0(s), u_\Gamma(s)$ и векторов $\overline{u}, \overline{u}_0, \overline{u}_\Gamma$ их значений получим из соотношений, определенных выше, с учетом того, что теперь вектор \overline{Y} , вектор-функция $\overline{Y}(s)$, матрица A и матричные функции $A(s), B(s)$ не имеют второго вектор-элемента и второй блочной

строки. Управляющие гранично-определенные воздействия $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) получим из (3) с учетом функции $y(s)$, представленной соотношением (31) с соответствующей конкретной задачей расшифровки составляющих $y_\infty(s)$, $y_0(s)$, $y_\Gamma(s)$.

Расчетные формулы решений рассматриваемых задач еще больше упростятся, если управляющими для системы (1) с желаемым состоянием (8), (9) будут все три внешнединамические факторы: $u(s)$, $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$), $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$). Функцию $y(s)$, согласно (2), (3) определяющую начально-краевые управления $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$), $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$), получим из (31) с учетом решений рассмотренных выше задач, полагая при этом, что

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_* \\ Y_* \end{pmatrix}, \quad \bar{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y_*(s) \\ Y_*(s) \end{pmatrix}, \quad A = [A_{ij}]_{i=3, j=1}^{i=4, j=3},$$

$$A(s) = [A_{ij}(s)]_{i=3, j=1}^{i=4, j=3}, \quad B(s) = [B_{ij}(s)]_{i=3, j=1}^{i=4, j=3}.$$

Управление при известной функции $u(s)$. Желаемые состояния $Y_i^*(s)$ ($i = \overline{1, I^*}$) и Y_{il}^* ($i = \overline{1, I^*}; l = \overline{1, L^*}$) системы (1), определенные соотношениями (8), (9), по рассмотренным выше среднеквадратическим критериям могут достигаться при известной функции распределенных внешнединамических возмущений $u(s)$. Управляющими факторами в этом случае будут функции начально-краевых внешнединамических возмущений $Y_r^0(x)$ и $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($r = \overline{1, R_0}; \rho = \overline{1, R_\Gamma}$). Как и выше, функции эти получим согласно (2), (3) при функции $y(s)$, определяемой соотношением (31) так, чтобы

$$\Phi_{\Gamma i} + \bar{\Phi}_i + \Phi_i^* \rightarrow \min_{y(s)}, \quad \Phi_{0i} + \bar{\Phi}_i + \Phi_i^* \rightarrow \min_{y(s)}, \quad \bar{\Phi}_i + \Phi_i^* \rightarrow \min_{y(s)}$$

при управлении начальными, краевыми и начально-краевыми внешнединамическими возмущающими факторами. При этом $i = 1$ и $i = 2$, если желаемое состояние задано соотношениями (8) и (9) соответственно.

При определении моделирующих функций $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ и векторов \bar{u}_0 , \bar{u}_Γ их значений будут иметь место все соотношения, построенные в задачах (57), (59), (61), в которых

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_{\Gamma^*} \\ Y_* \\ Y_* \end{pmatrix}, \quad \bar{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y_\Gamma(s) \\ Y_*(s) \\ Y_*(s) \end{pmatrix}, \quad (A, A(s), B(s)) = [A_{ij}, A_{ij}(s), B_{ij}(s)]_{i=2, j=1}^{i=4, j=2},$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_0^* \\ Y_* \\ Y_* \end{pmatrix}, \quad \bar{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y_0(x) \\ Y_*(s) \\ Y_*(s) \end{pmatrix}, \quad (A, A(s), B(s)) = [A_{ij}, A_{ij}(s), B_{ij}(s)]_{i=1,3,4, j=1,2};$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_* \\ Y_* \end{pmatrix}, \quad \bar{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y_*(s) \\ Y_*(s) \end{pmatrix}, \quad (A, A(s), B(s)) = [A_{ij}, A_{ij}(s), B_{ij}(s)]_{i=3, j=1}^{i=4, j=2}$$

для задач управления начальными, краевыми и начально-краевыми возмущающими факторами соответственно.

Особенности решения задач управления при отсутствующих и ненаблюдаемых начально-краевых условиях. Рассмотренные выше задачи математического моделирования не полностью определенных динамических систем и задачи управления ими решались здесь при наличии R_0 , R_Γ и I наблюдений за начальными, краевыми и поточными внешнединамическими возмущениями последних. Не исключено, что одна, две, а возможно, и три из этих групп внеш-

нединамических возмущающих факторов могут отсутствовать, несмотря на ограниченность пространственно-временной области, в которой динамический процесс (1) исследуется. В этом случае соответствующее такой группе R_0, R_Γ или I равно нулю, что приведет к отсутствию определенной компоненты в векторе \bar{Y} и вектор-функции $\bar{Y}(s)$, а также блочной строки в матрице A и матричных функциях $A(s), B(s)$. Эффект влияния ненаблюдаемого начального и краевого внешнединамического фактора на состояние системы будет моделироваться функциями $u_0(s), u_\Gamma(s)$ или векторами их значений $\bar{u}_0, \bar{u}_\Gamma$. Это не приведет к изменению рассмотренного нами представления (31) функции $y(s)$.

Изложенные выше решения прямых и обратных задач динамики линейных пространственно распределенных систем (1) имеют место и для случая, когда эти системы исследуются в неограниченной пространственной области или в установившемся режиме (при отсутствии начальных условий). Особенность решений рассматриваемых выше задач состоит в том, что в случае отсутствия начальных (краевых) внешнединамических возмущений будет отсутствовать и моделирующая их функция $u_0(s)$ ($u_\Gamma(s)$) или ее дискретный аналог \bar{u}_0 (\bar{u}_Γ).

Отсутствие непрерывно или дискретно определенных моделирующих факторов $u_0(s), \bar{u}_0$ и $u_\Gamma(s), \bar{u}_\Gamma$ приведет к отсутствию соответствующих им столбцов матрицы A и матричных функций $A(s), B(s)$.

Изложенные выше решения с учетом таких изменений будут иметь место для любых практически корректно поставленных задач моделирования и управления рассматриваемыми системами в неограниченных или полуограниченных пространственно-временных областях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в [9] и развитая в [10, 12] методика исследования не полностью наблюдаемых линейных пространственно-динамических систем является практически ориентированным подходом к решению математически некорректно поставленных начально-краевых задач для линейных динамических систем с распределенными параметрами и практически нерешаемых задач управления такими системами. Особенность методики заключается в том, что задачи построения функций состояния рассматриваемых систем решаются для любой линейной дифференциально определенной модели, причем функция эта, точно удовлетворяя разрешающему уравнению системы, по среднеквадратическому критерию согласуется с начально-краевыми и поточными внешнединамическими наблюдениями за системой независимо от природы и количества таких наблюдений, их непрерывности или дискретности. Других методов решения таких задач по таким критериям не существует.

Также решены задачи управления рассматриваемыми системами по среднеквадратическому приближению их состояния к непрерывно или дискретно заданным желаемым значениям. Отметим, что управляющими факторами систем в постановках и решениях названных задач здесь могут выступать все возможные внешнединамические воздействия — распределенные, начальные и краевые возмущения, исследуемые в различных практических применяемых комбинациях.

Предложенная методика может быть использована для решения задач моделирования и управления как в ограниченных, так и неограниченных пространственно-временных областях, а также в областях с отсутствующими наблюдениями за их начально-краевым состоянием. Решения всех рассмотренных в публикации задач оценены на точность и исследованы на однозначность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Немиш Ю.Н., Хома И.Ю. Напряженно-деформируемое состояние нетонких оболочек и пластин. Трехмерная теория (Обзор) // Прикладная механика. — 1991. — 27, № 11. — С. 3–27.
2. Ладиков-Роев Ю.П., Черемных О.К. Математические модели сплошных сред. — Киев: Наук. думка, 2010. — 552 с.
3. Стоян В.А., Двирничук К.В. К построению дифференциальной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя // Проблемы управления и информатики. — 2012. — № 4. — С. 74–83.
4. Стоян В.А., Двирничук К.В. Об интегральной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя // Проблемы управления и информатики. — 2013. — № 1. — С. 70–82.
5. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердого деформируемого тела. Т. 5: Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. — М.: ВИНТИ, 1973. — 272 с.
6. Петрик М.Р. Математичне моделювання полів масопереносу в неоднорідних і нанопористих середовищах та ідентифікація їх параметрів. Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук. — Київ: Ін-т кібернетики НАН України, 2013. — 40 с.
7. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. — Киев: Наук. думка, 2009. — 639 с.
8. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. — Киев: Наук. думка, 1991. — 432 с.
9. Стоян В.А. Об одном подходе к исследованию начально-краевых задач матфизики // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 1. — С. 79–86.
10. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2011. — 319 с.
11. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 3. — С. 90–104.
12. Скопецкий В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. — Київ: Наук. думка, 2002. — 361 с.
13. Стоян В.А., Двирничук К.В. До побудови інтегрального еквіваленту лінійних диференціальних моделей // Доповіді НАН України. — 2012. — № 9. — С. 36–43.
14. Кириченко Н.Ф. Псевдообращение матриц и их рекуррентность в задачах моделирования и управления // Проблемы управления и информатики. — 1995. — № 1. — С. 114–127.

Поступила 10.12.2014