УДК 519.854

В.А. МИХАЙЛЮК, Н.В. ЛИЩУК

О СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧАХ БУЛЕВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Аннотация. Показано, что для NP-полных задач трудоемким является даже вычисление шара устойчивости радиуса 1 оптимального решения (т.е. при $P \neq NP$ для этого не существует полиномиального алгоритма). При использовании жадных алгоритмов для задачи о покрытии множествами (задачи о ранце) при радиусе устойчивости $r = O(1)$ существуют полиномиальные алгоритмы вычисления шара устойчивости радиуса r $\ln m$-приближенного решения (1-приближенного решения).

Ключевые слова: сложность анализа устойчивости, радиус устойчивости задачи, шар устойчивости радиуса r ε-приближенного решения задачи.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ устойчивости задач дискретного программирования сводится к определению таких изменений параметров (коэффициентов) исходной задачи, при которых оптимальное решение остается без изменений [1]. Как правило, устойчивость оптимального или приближенного к нему решения характеризуется некоторыми параметрами: область, шар, радиус устойчивости и т.д. [2–4]. В работе [2] рассмотрены общие понятия теории устойчивости и введено важное понятие радиуса устойчивости задачи. В [3] изучаются вопросы вычисления радиуса устойчивости ε-приближенного решения для некоторого класса дискретных экстремальных задач. Определены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых радиус устойчивости равен нулю или бесконечности. Предложен алгоритм вычисления радиуса устойчивости и выделен класс задач, для которых этот алгоритм является полиномиальным. При этом все изучаемые величины касаются изменений коэффициентов целевой функции задачи. В [4] представлены и изучены алгоритмы вычисления радиуса устойчивости ε-оптимального решения для оптимизационной задачи с разными целевыми функциями. При этом изменяются значения коэффициентов целевой функции задачи. В [5, 6] получены результаты относительно устойчивости локальных решений задач целочисленного программирования. Важное значение уделяется оценкам сложности анализа устойчивости дискретных задач оптимизации. Для NP-трудных задач это сводится к анализу существования полиномиальных алгоритмов нахождения оптимальних решений измененных задач, исходя из оптимальных решений исходной задачи. В [7] приводятся результаты относительно сложности анализа устойчивости 0/1 задач с линейной целевой функцией при изменении значений целевого вектора. Показано, что остается неизменно NP-трудным (не существует полиномиального алгоритма при $P \neq NP$) определение оптимального решения для NP-трудных задач при произвольном изменении вектора значений целевой функции. Подобных результатов по изменению коэффициентов вектора ограничений или не существует, или они малочисленны. В этом направлении следует отметить работы [8–11].

В данной статье изучаются вопросы исследования шаров устойчивости заданного радиуса для оптимальных и ε-приближенных решений (в частности, существования полиномиальных алгоритмов построения шаров устойчивости заданного радиуса для некоторых классов NP-полных задач) при изменении матрицы ограничений и правых частей задачи.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу булева программирования

$$\min\{f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)\},$$
$$x \in G \subset B^n = \{0,1\}^n . \qquad (1)$$

Предположим, что допустимая область G задачи (1) определяется параметром E (например, матрица ограничений с правыми частями). Пусть $E_I = \{E_i, i \in I\}$ — некоторое множество параметров (I может быть как конечным, так и бесконечным множеством) и $\rho(E_i, E_j)$, $i, j \in I$, — метрика, определенная на E_I (считаем, что каждому параметру $E_i, i \in I$, соответствует область G_i задачи (1)). Пусть $i^* \in I$ и E_{i^*} — некоторый фиксированный параметр.

Определение 1. Шаром параметров радиуса r с центром в E_{i^*} называется множество $\{E_j : j \in I\}$ таких параметров, что $\rho(E_{i^*}, E_j) \le r$ (обозначение $O_r(E_{i^*})$).

Пусть x^o — оптимальное решение задачи (1) и $\varepsilon \ge 0$ — целое.

Определение 2. Будем называть $x \in G$ ε-приближенным решением задачи (1), если выполняется соотношение

$$f(x) \le (1+\varepsilon) f(x^o) . \qquad (2)$$

Замечание 1. При $\varepsilon = 0$ ε-приближенное решение x преобразуется в оптимальное (точное) решение.

Замечание 2. Если (1) — задача максимизации, то (2) приобретает вид

$$\frac{f(x^o)}{1+\varepsilon} \le f(x) . \qquad (2')$$

Определение 3. Множество всех параметров $E_{I'}$ $(I' \subset I)$, для которых сохраняется свойство вектора x быть ε-приближенным решением задачи, назовем областью устойчивости ε-приближенного решения x и обозначим $S(x, \varepsilon)$.

Пусть x — ε-приближенное решение задачи (1) с параметром E_{i^*} (область G_{i^*}).

Определение 4. Если

$$O_r(E_{i^*}) \subseteq S(x, \varepsilon), \qquad (3)$$

то $O_r(E_{i^*})$ будем называть шаром устойчивости радиуса r ε-приближенного решения задачи (1).

Определение 5. Наибольшее значение r, для которого выполняется (3), назовем радиусом устойчивости ε-приближенного решения x и обозначим $\rho_\varepsilon(x, E_{i^*})$.

Возникает вопрос исследования шара устойчивости радиуса r ε-приближенного решения задачи (1) при конкретных значениях ε и r.

СЛОЖНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ШАРА УСТОЙЧИВОСТИ РАДИУСА 1 ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВАМИ И ЗАДАЧИ О РАНЦЕ

Рассмотрим задачу о покрытии множествами

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right\},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (4)$$
$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, n .$$

При этом $m\times n$-матрица $A=\{a_{ij}\}$ — булева, вектор $c=(c_1,\ldots,c_n)$ — целочисленный. В данном случае параметр E представляет матрицу A. В задаче (4) подвергать изменениям будем только матрицу A. Для произвольных булевых $m\times n$-матриц $A=\{a_{ij}\}$, $B=\{b_{ij}\}$ введем метрику $\rho(A,B)=\sum\limits_{i,j}|a_{ij}-b_{ij}|$. Задачу (4) с матрицей A будем обозначать $SetCov(A)$ и считать ее задачей (4) с экземпляром $I=A$.

Определение 6. Задачу $SetCov(A')$ с произвольной матрицей A' такой, что $\rho(A',A)=1$, назовем близкой к задаче $SetCov(A)$.

Пусть $\mathrm{Re\,opt}\,(SetCov(A))$ — задача нахождения оптимального решения задачи $SetCov(A')$, близкой к $SetCov(A)$, исходя из оптимального решения x^* задачи $SetCov(A)$.

Далее будем использовать следующие результаты.

Лемма 1 [12]. Пусть Q — NP-трудная задача и $\mathrm{mod}-Q$ — некоторая локальная модификация для Q. Задача $\mathrm{mod}-Q$ является NP-трудной, если существует полиномиальный алгоритм A, который для любого экземпляра I задачи Q вычисляет:

1) экземпляр I' для Q;

2) оптимальное решение x' для I';

3) последовательность локальных модификаций типа $\mathrm{mod}-Q$ (не более чем полиномиальную), которая преобразует I' в I.

Лемма 2 [10]. Существует полиномиальный алгоритм, который имеет не более $\dfrac{c_{\max}}{c_{\min}}\cdot n$ шагов для определения допустимого решения задачи $SetCov(A)$ ($c_{\max}=\max\limits_i\{c_i\}$; $c_{\min}=\min\limits_i\{c_i\}$).

Пусть $M=\{1,\ldots,m\}$, $N=\{1,\ldots,n\}$, $K_1=\{i_1,\ldots,i_k\}$ — некоторая выборка с N объемом k $(1\le k<n;\, k<m)$. Точка $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in B^n$ такая, что $\alpha_j=1$ при $j\in K_1$, $\alpha_j=0$ при $j\in N\setminus K_1$, а $\alpha^i=(\alpha_1^i,\ldots,\alpha_n^i)\in B^n$ такая, что $\alpha_i^i=1$, $\alpha_j^i=0$ при $j\ne i$. Опишем класс $\{A_\alpha\}$ булевых $m\times n$-матриц $A=\{a_{ij}\}$; $A\in\{A_\alpha\}$ тогда и только тогда, когда матрица A не имеет одинаковых и нулевых строк и, кроме того, выполняются следующие условия:

1) матрица A имеет подматрицу $A^1=\begin{pmatrix}\alpha^{i_1}\\ \ldots\\ \alpha^{i_k}\end{pmatrix}$;

2) матрица A имеет подматрицу $A^2=\{a_{ij}\}$ $(i\in M\setminus K_1,\, j\in N)$ такую, что для произвольного $i\in M\setminus K_1$ $\sum\limits_{j\in K_1}a_{ij}\ge 1$, остальные элементы A^2 — произвольны.

Пусть вектор $x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)\in B^n$ такой, что $x_{i_1}^*=\ldots=x_{i_k}^*=1$; остальные координаты вектора x^* равны нулю, $A^*\in\{A_\alpha\}$.

Лемма 3 [10]. Вектор x^* представляет оптимальное решение задачи $SetCov(A^*)$.

Теорема 1. Задача $\mathrm{Re\,opt}\,(SetCov(A))$ является NP-трудной.

Доказательство. Будем использовать лемму 1. Известно, что задача о покрытии является NP-полной. В качестве экземпляра I' берем экземпляр задачи $SetCov(A^*)$ из леммы 3. Используя для этого экземпляра полиномиальный алгоритм из леммы 2, получаем оптимальное решение (выполнены пп. 1, 2 леммы 1).

Предположим, что $T(A)$ для любой матрицы A является преобразованием A с заменой ровно одной компоненты 0 на 1 либо 1 на 0 (в данном случае этим преобразованием является модификация $\mathrm{mod}-Q$). Будем записывать $A' = T(A)$, если после применения к A преобразования T получаем матрицу A' (очевидно, что $\rho(A, A') = 1$).

Произвольную матрицу A можно получить из матрицы A^*, используя не более $m \cdot n$ преобразований $T: A^* \xrightarrow{T} A^1 \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} A^k = A$, где $A^1 = T(A^*)$, $\rho(A^1, A^*) = 1$; $A^{i+1} = T(A^i)$, $\rho(A^{i+1}, A^i) = 1$, $i = 1, \ldots, k-1$; $k \le m \cdot n$ и п. 3 леммы 1 выполнен. Применив лемму 1, получим доказательство теоремы.

Теорема 2. Если $P \ne NP$, то для задачи о покрытии множествами (4) (в наихудшем случае) не существует полиномиального алгоритма вычисления шара устойчивости радиуса 1 оптимального решения.

Доказательство. Используем теорему 1. Поскольку задача $\mathrm{Re}\,\mathrm{opt}\,(SetCov(A))-NP$-трудная, то согласно определению 6 (в наихудшем случае) существует экземпляр матрицы A такой, что при $P \ne NP$ для задачи $SetCov(A')$, где $\rho(A', A) = 1$, не существует полиномиального алгоритма нахождения оптимального решения, исходя из оптимального решения задачи $SetCov(A)$. Согласно определениям 1, 2 (при $\varepsilon = 0$), 3 и 4 это означает, что для задачи (4) (в наихудшем случае) не существует полиномиального алгоритма вычисления шара устойчивости радиуса 1 оптимального решения.

Рассмотрим одномерную задачу о ранце с булевыми переменными:

$$\max \left\{ \sum_{i \in I} c_i x_i \right\},$$
$$\sum_{i \in I} a_i x_i \le b, \quad x_i \in \{0, 1\}, \; i \in I. \tag{5}$$

Будем считать, что все числа a_i, c_i и b являются натуральными, I — некоторое множество индексов. Задачу (5) со стандартным множеством индексов $I = \{1, \ldots, n\}$ будем обозначать $KP(a, b, c)$, где векторы $a = (a_i)_{i \in I}$, $c = (c_i)_{i \in I}$. Пусть $Z^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\}$: $x_i \ge 0$, x_i — целые, $i = \{1, \ldots, n\}$, для $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in Z^{n+1}$, $y = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) \in Z^{n+1}$ введем метрику $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i - y_i|$. Для $\bar{a} = (a_1, \ldots a_n, b) \in Z^{n+1}$ вектор $\bar{a}'$ такой, что $\rho(\bar{a}, \bar{a}') = 1$ (задачу $KP(a, b, c)$ будем обозначать так: $KP(\bar{a}, c)$). Рассмотрим произвольную задачу $KP(\bar{a}, c)$.

Определение 7. Задачу $KP(\bar{a}', c)$ с произвольным вектором $\bar{a}'$ таким, что $\rho(a, \bar{a}') = 1$, будем называть обобщенно-близкой к $KP(\bar{a}, c)$.

Итак, обобщенно-близкие задачи могут отличаться одна от другой на единицу не только по правым частям (как «близкие» в [8]), но и по компонентам вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Обозначим $\mathrm{Re}\,\mathrm{opt}\,(KP(\bar{a}, c))$ задачу нахождения оптимального решения задачи $KP(\bar{a}', c)$, обобщенно близкой к $KP(\bar{a}, c)$, исходя из оптимального решения x^* задачи $KP(\bar{a}, c)$.

Теорема 3 [11]. Задача $\mathrm{Re}\,\mathrm{opt}\,(KP(\bar{a}, c))$ является NP-трудной.

Теорема 4. Если $P \ne NP$, то для задачи о ранце (5) (в наихудшем случае) не существует полиномиального алгоритма вычисления шара устойчивости радиуса 1 оптимального решения.

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 2 (только с использованием теоремы 3).

Известно, что жадный алгоритм [13, 14] находит $\ln m$-приближенное решение ($\varepsilon = \ln m$ в определении 2) задачи о покрытии (4). Суть этого полиномиального алгоритма (и подобных ему) состоит в использовании простейшей жадной эвристики: на каждом шаге выбирать максимально непокрытое подмножество, т.е. подмножество, содержащее максимальное число элементов, не покрытых на предыдущих шагах. Будем использовать этот алгоритм при вычислении шара устойчивости некоторого радиуса для $\ln m$-приближенного решения задачи о покрытии (4).

Согласно определению 1 шаром параметров радиуса r с центром в $E_{i^*} = A^*$ (некоторая фиксированная булева $m \times n$-матрица) есть множество $m \times n$-матриц $\{A^j : j \in I\}$ таких, что $\rho(A^*, A^j) \le r$ ($O_r(A^*)$ — шар радиуса с центром A^*; ρ — метрика, введенная для задач о покрытии). Необходимо определить число элементов во множестве $O_r(A^*)$, при этом $\alpha(m, n, r) = |O_r(A^*)|$. Пусть $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ — число k-элементных подмножеств множества из n элементов (число сочетаний из n по k, $k \le n$ — натуральные). Будем считать, что функция $f(n)$ имеет полиномиальный рост ($f(n) = poly(n)$), если для некоторой константы $c(c = O(1))$ при достаточно больших n выполняется условие $f(n) \le n^c$.

Лемма 4. Имеем $\alpha(m, n, r) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{r} C_{m \cdot n}^k$.

Доказательство. Число $m \times n$-матриц, находящихся на заданном расстоянии $1 \le k \le r$ от фиксированной $m \times n$-матрицы A^*, равно $C_{m \cdot n}^k$. Осталось просуммировать эти величины по k от единицы до r с учетом матрицы A^*.

Заметим, что если $k = \mathrm{const}(k = O(1))$, то $C_{m \cdot n}^k = poly(m \cdot n)$ и, следовательно, $\alpha(m, n, r) = poly(m \cdot n)$ при $r = O(1)$ (в силу леммы 4).

Следствие. При $r = O(1)$ имеем $\alpha(m, n, r) = poly(m \cdot n)$.

Теорема 5. При $r = O(1)$ для задачи о покрытии множествами (4) существует полиномиальный алгоритм вычисления шара устойчивости радиуса r $\ln m$-приближенного решения.

Доказательство. Для решения задачи $SetCov(A)$ с произвольной (фиксированной) матрицей A используем (полиномиальный) жадный алгоритм. Получим некоторое $\ln m$-приближенное решение. Далее для нахождения решений задач из шара устойчивости радиуса r задачи A (которых в силу леммы 4 не более $\alpha(m, n, r)$) также используем полиномиальный жадный алгоритм. Поскольку $\alpha(m, n, r) = poly(m \cdot n)$ при $r = O(1)$ (следствие из леммы 4), то затраченное общее время для решения всех задач не более чем полином от $m \cdot n$, тем самым теорема доказана.

Известно, что полиномиальный жадный алгоритм находит 1-приближенное решение ($\varepsilon = 1$ из ($2'$)) задачи о ранце (5) [14]. Будем использовать этот алгоритм в вычислении шара устойчивости некоторого радиуса для 1-приближенного решения задачи о ранце (5).

Согласно определению 1 шаром параметров радиуса r с центром в $E_{i^*} = \bar{a}^*$ (некоторый фиксированный $(n+1)$-вектор из натуральных чисел) есть множество $(n+1)$-векторов $\{\bar{a}^j : j \in I\}$ таких, что $\rho(\bar{a}^*, \bar{a}^j) \le r$; ρ — метрика, введенная для решения задач о ранце. Необходимо определить число элементов во множестве $O_r(\bar{a}^*)$; $\beta(n, r) = |O_r(\bar{a}^*)|$. Для простоты подсчета $\beta(n, r)$ введем ограниченную версию задачи о ранце (5): будем считать вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$ булевым (т.е. состоящим из нулей и единиц), $b = poly(n)$, $b \geq r$. Обозначим $\gamma(n, k)$, $1 \leq k \leq r$, число элементов $O_r(\bar{a}^*)$ в шаре, которые находятся на расстоянии ровно k от центра $\bar{a}^*$.

Очевидно, что $\beta(n, r) = 1 + \sum_{k=1}^{r} \gamma(n, k)$.

Лемма 5. Для ограниченной версии задачи о ранце (5)

$$\gamma(n, k) = C_n^k + 2 \cdot (1 + \sum_{j=1}^{k-1} C_n^j).$$

Доказательство. Разобьем вектор $\bar{a}^* = (a_1^*, \ldots a_n^*, b^*)$ условно на две компоненты: $(a_1^*, \ldots a_n^*)$ и b^*. Подсчет количества элементов на расстоянии k от $\bar{a}^*$ проведем по этим компонентам. Сначала рассматриваем первую компоненту. На расстоянии k по первой компоненте находится C_n^k элементов; вторая компонента не изменяется. Повторно рассматриваем первую компоненту; на расстоянии $k-1$ по первой компоненте находится C_n^{k-1} элементов; вторая компонента изменяется: к b^* добавляется или из нее вычитается единица; в итого имеем еще $2 \cdot C_n^{k-1}$ элементов на расстоянии k. Снова рассматриваем первую компоненту; на расстоянии $k-2$ по первой компоненте находится C_n^{k-2} элементов; вторая компонента также изменяется: к b^* добавляется или из нее вычитается 2; в результате имеем еще $2 \cdot C_n^{k-2}$ элементов на расстоянии k и т.д. Продолжаем рассматривать первую компоненту; на расстоянии 1 по первой компоненте находится C_n^1 элементов; вторая компонента также изменяется: к b^* добавляется или вычитается $k-1$; в итоге имеем еще $2 \cdot C_n^1$ элементов на расстоянии k. Наконец, при изменении только второй компоненты (добавляется или вычитается k) получим еще два элемента на расстоянии k.

Таким образом, получили $C_n^k + 2 \cdot C_n^{k-1} + 2 \cdot C_n^{k-2} + \ldots + 2 \cdot C_n^1 + 2$ элементов на расстоянии k, что и требовалось доказать.

Заметим, что если $k = \text{const}\, (k = O(1))$, то $C_n^k = poly(n)$ и, следовательно, $\gamma(n, k) = poly(n)$ при $k = O(1)$ (в силу леммы 5). А поскольку $\beta(n, r) = 1 + \sum_{k=1}^{r} \gamma(n, k)$, то $\beta(n, r) = poly(n)$ при $r = O(1)$.

Следствие. При $r = O(1)$ имеем $\beta(n, r) = poly(n)$.

Теорема 6. При $r = O(1)$ для ограниченной версии задачи о ранце (5) существует полиномиальный алгоритм вычисления шара устойчивости радиуса r 1-приближенного решения.

Доказательство. Для решения задачи $KP(\bar{a}, c)$ с произвольными (фиксированными) векторами $\bar{a}$ и c используем (полиномиальный) жадный алгоритм. Получим некоторое 1-приближенное решение. Теперь для получения решений задач, исходя из шара устойчивости радиуса r задачи с вектором $\bar{a}$ (которых не более $\beta(n, r)$) также используем полиномиальный жадный алгоритм. Поскольку $\beta(n, r) = poly(n)$ при $r = O(1)$ (следствие из леммы 5), то затраченное общее время на решение всех задач не более чем полином от n, тем самым теорема доказана.

Следствие. Существование полиномиального алгоритма вычисления шара устойчивости радиуса r 1-приближенного решения задачи о ранце (5) возможно лишь при $r = O(1)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты, изложенные в настоящей статье, показывают, что для NP-полных задач трудоемким является даже вычисление шара устойчивости радиуса 1 оптимального решения (т.е. при $P \neq NP$ для этого вычисления не существует полиномиального алгоритма). Этот результат (относительно введенных понятий) согласуется с результатами из работ [2– 4, 7]. Для ε-приближенных решений результат несколько иной. Показано, что при использовании жадных алгоритмов для задачи о покрытии множествами (задачи о ранце) при радиусе устойчивости r, равном $O(1)$, существуют полиномиальные алгоритмы вычисления шара устойчивости радиуса r $\ln m$-приближенного решения (1-приближенного решения).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fernandez-Baca D., Venkatachalam B. Sensitivity analysis in combinatorial optimization / Handbook of Approximation Algorithms and Metaheuristics (Ed. T. Gonzalez). — Boca Raton: Chapman&Hall/CRC Computer and Information Science Series, 2007. — P. 30.-1–30.-29.
2. Леонтьев В.К., Мамутов К.Х. Устойчивость решений в задачах линейного булева программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1988. — **28**, № 10. — С. 1475–1481.
3. Сотсков Ю.Н. Исследование устойчивости приближеного решения булевой задачи минимизации линейной формы // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1993. — **33**, № 5. — С. 785–795.
4. Chakravarti N., Wagelmans A.P.M. Calculation of stability radii for combinatorial optimization problems // Operations Research Letters. — 1998. — **23.** — P. 1–7.
5. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — Киев: Наук. думка, 1985. — 210 с.
6. Сергиенко И.В., Филоненко Н.В. Решение некоторых задач устойчивости в целочисленном линейном программировании // Доклады АН УССР. Сер. А. — 1982. — № 6. — С. 79–82.
7. Van Hoesel S., Wagelmans A. On the complexity of postoptimality analysis of 0/1 programs // Discrete Applied Mathematics. — 1999. — **91.** — P. 251–263.
8. Blair C. Sensitivity analysis for knapsack problems: A negative result // Discrete Applied Mathematics. — 1998. — **81.** — P. 133–139.
9. Woeginger G.J. Sensitivity analysis for knapsack problems: Another negative result // Discrete Applied Mathematics. — 1999. — **92.** — P. 247–251.
10. Михайлюк В.А. Общий подход к оценке сложности постоптимального анализа дискретных задач оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — **46**, № 2. — С. 134–141.
11. Михайлюк В.А., Лищук Н.В. Анализ устойчивости задачи о ранце: один отрицательный результат // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — **49**, № 2. — С. 48–51.
12. Михайлюк В.А. Реоптимизация задачи о максимальном k-покрытии: порог отношения аппроксимации // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — **48**, № 2. — С. 97–104.
13. Chvatal V.A. A greedy heuristic for the set covering problem // Mathematics of Operation Research. — 1979. — **4**, N 3. — P. 233–235.
14. Кузюрин Н.Н., Фомин С.А. Эффективные алгоритмы и сложность вычислений. — М.: МФТИ, 2008. — 344 с.

Поступила 20.10.2014