УДК 517.9

П.О. КАСЬЯНОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КЛАССОВ АВТОНОМНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Аннотация. Вводится понятие физического решения (на конечном интервале времени), основанного на естественных энергетических равенствах и непрерывной зависимости функций состояния в фазовом пространстве от временной переменной для классов автономных эволюционных вариационных неравенств на выпуклых конусах с нелинейными немонотонными (в общих случаях) отображениями. Для приближенного поиска таких решений используется классический метод штрафа. Для полученных решений обосновывается возможность глобального описания поведения таких систем в естественном фазовом пространстве относительно топологии сильной сходимости с помощью конечных алгоритмов (с точностью до малого параметра).

Ключевые слова: эволюционное вариационное неравенство, физическое решение, энергетическое равенство, сильная непрерывность.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании односторонних задач, задач на многообразии, проблем полупроникновения, при анализе и управлении процессами и полями разной природы на границе области возникает необходимость рассмотрения эволюционных вариационных неравенств с нелинейными немонотонными операторами в бесконечномерных пространствах. Для описания функций состояния таких объектов естественным образом вводятся понятия сильных и слабых решений. Сильное решение не всегда адекватно описывает состояние системы, поскольку в большинстве случаев такие классы решений не допускают эффектов «обрыва», одностороннего полупроникновения, т.е. являются слишком регулярными для адекватного описания состояний исследуемых процессов и полей. Доказательство существования сильных решений (особенно для уравнений с немонотонными законами реакции) проблематично. Понятие слабого решения слишком широкое (такое решение не всегда адекватно описывает функцию состояния, т.е. формально такой класс решений может включать не только физические решения) и при этом является недостаточно регулярным для возможностей адекватной реализации численного анализа исследуемых проблем. Отметим, что сильное решение эволюционного вариационного неравенства, как правило, является слабым решением. Возникает необходимость введения нового, промежуточного класса «физических решений» таких задач, которые должны удовлетворять естественным энергетическим равенствам, с одной стороны, а с другой — обеспечивать возможность обоснования конструктивных (и при этом физических) методов их существования (например, метод искусственной вязкости для задач классической гидроаэромеханики в несжимаемой сплошной среде).

В данной работе для классов автономных эволюционных вариационных неравенств с нелинейными немонотонными (в общих случаях) отображениями на выпуклых конусах вводится понятие физического решения на конечном интервале времени. Это понятие основывается на естественных энергетических равенствах и непрерывной зависимости функций состояния в фазовом пространстве от временной переменной. Для приближенного поиска физических решений используется классический метод штрафа. Для полученных решений с помощью результатов работ [1, 2] обосновывается возможность глобального описания поведения таких систем в естественном фазовом пространстве относительно топологии сильной сходимости с помощью конечных алгоритмов (с точностью до малого параметра).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для эволюционной тройки $(V; H; V^*)$ нелинейного (в общем случае) отображения $A: V \to V^*$ и выпуклого замкнутого конуса $K \subseteq V$ рассматривается задача исследования динамики при $t \to +\infty$, в фазовом пространстве H всех физических решений $y: \mathbb{R}_+ \to V$, $y(t) \in K$ для п.в. $t > 0$, автономного эволюционного вариационного неравенства

$$\langle y'(t) + A(y(t)), v - y(t) \rangle_V \geq 0 \text{ для всех } v \in K, \text{ для п.в. } t > 0, \quad (1)$$

где параметры задачи удовлетворяют таким условиям.

Предположение 1. $p \geq 2$, $q > 1$: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, вложение V в H компактное.

Предположение 2. $\exists c > 0 : \| A(u) \|_{V^*} \leq c(1 + \| u \|_V^{p-1}) \ \forall u \in V$.

Предположение 3. $\exists \alpha, \beta > 0 : \langle A(u), u \rangle_V \geq \alpha \| u \|_V^p - \beta \ \forall u \in V$.

Предположение 4. $A: V \to V^*$ — псевдомонотонный оператор, удовлетворяющий (S)-свойству, т.е. из того, что $u_n \to u$ слабо в V и $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \langle A(u_n), u_n - u \rangle_V \leq 0$, следует, что $u_n \to u$ в V и $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \langle A(u_n), u_n - \omega \rangle_V \geq \langle A(u), u - \omega \rangle_V \ \forall \omega \in V$.

Предположение 5. $K \subseteq V$ — выпуклый замкнутый конус, такой, что $\operatorname{int}_{V_\sigma} K_\sigma \neq \emptyset$, где $V_\sigma \subseteq V$ — действительное рефлексивное сепарабельное банахово пространство, непрерывно и плотно вложенное в V, $K_\sigma := K \cap V_\sigma$.

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V^* \times V \to \mathbb{R}$ — спаривание в $V^* \times V$, совпадающее на $H \times V$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ в гильбертовом пространстве H. Отметим, что V_σ^* — сопряженное пространство с V_σ относительно канонического спаривания $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_\sigma} : V_\sigma^* \times V_\sigma \to \mathbb{R}$, совпадающего на $H \times V_\sigma$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ в H. Тогда получим цепочку таких непрерывных и плотных вложений: $V_\sigma \subset V \subset H \subset V^* \subset V_\sigma^*$.

Пусть $0 \leq \tau < T < +\infty$. Положим $K_{\tau,T} := \{ y \in L_p(\tau, T; V) : y(t) \in K$ для п.в. $t \in (\tau, T) \}$. Под физическим решением эволюционного вариационного неравенства (1) на отрезке $[\tau, T]$ понимаем элемент y пространства $K_{\tau,T} \cap C([\tau, T]; H)$ такой, что

$$-\int_\tau^T (\xi'(t), y(t))\, dt + \int_\tau^T \langle A(y(t)), \xi(t) \rangle_V\, dt \geq 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty([\tau, T]; V) \cap K_{\tau,T}, \quad (2)$$

$$\| y(t_2) \|_H^2 - \| y(t_1) \|_H^2 + 2 \int_{t_1}^{t_2} \langle A(y(t)), y(t) \rangle_V\, dt = 0 \quad \forall t_1, t_2 \in [\tau, T]. \quad (3)$$

Заметим, что понятие физического решения естественным образом ослабляет понятие сильного решения односторонней задачи (1). Понятие физического решения — это слабое решение задачи (1), которое является непрерывным как отображение из интервала времени $[\tau, T]$ в фазовое пространство H и удовлетворяет энергетическому равенству (3). Конечно, каждое сильное решение задачи (1) является физическим решением такой задачи. При этом в предположениях 1–5 на данный момент известен только факт существования слабых решений.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА ФИЗИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В данном разделе с помощью метода штрафа установим факт существования физических решений задачи (1) для произвольных начальных данных из K. Полученные результаты будут применены при исследовании динамики процессов и полей разной природы с односторонними ограничениями в последующих секциях.

Для фиксированных $0 \le \tau < T < +\infty$ рассмотрим

$$X_{\tau,T} = L_p(\tau, T; V), \; X^*_{\tau,T} = L_q(\tau, T; V^*), \; W_{\tau,T} = \{ y \in X_{\tau,T} : y' \in X^*_{\tau,T} \},$$

$$\mathcal{A}_{\tau,T} : X_{\tau,T} \to X^*_{\tau,T}, \; (\mathcal{A}_{\tau,T}(y))(t) = A(y(t)) \text{ для п.в. } t \in (\tau, T),$$

$$Y_{\tau,T,\sigma} = L_1(\tau, T; V^*_\sigma), \; W_{\tau,T,\sigma} = \{ y \in X_{\tau,T} : y' \in Y_{\tau,T,\sigma} \},$$

где y' — производная элемента $y \in X_{\tau,T}$ в смысле пространства распределений $\mathcal{D}([\tau, T]; V^*)$ (см., например, [3; определение IV.1.10, с. 168]). Отметим, что пространство $W_{\tau,T}$ является рефлексивным банаховым пространством с нормой графика производной (см., например, [4; утверждение 4.2.1, с. 291]): $\| u \|_{W_{\tau,T}} = \| u \|_{X_{\tau,T}} + \| u' \|_{X^*_{\tau,T}}$, $u \in W_{\tau,T}$.

Из [5; секция 2.2; 6, с. 152–157] и предположений 1–4 следует, что $\mathcal{A}_{\tau,T} : X_{\tau,T} \to X^*_{\tau,T}$ удовлетворяет таким свойствам.

Свойство 1. $\exists C_1 > 0 : \| \mathcal{A}_{\tau,T}(y) \|_{X^*_{\tau,T}} \le C_1 (1 + \| y \|^{p-1}_{X_{\tau,T}}) \;\; \forall y \in X_{\tau,T}$.

Свойство 2. $\exists C_2, C_3 > 0 : \langle \mathcal{A}_{\tau,T}(y), y \rangle_{X_{\tau,T}} \ge C_2 \| y \|^p_{X_{\tau,T}} - C_3 \;\; \forall y \in X_{\tau,T}$.

Свойство 3. $\mathcal{A}_{\tau,T} : X_{\tau,T} \to X^*_{\tau,T}$ — (обобщенно) псевдомонотонный на $W_{\tau,T,\sigma}$, удовлетворяющий (S)-свойству, т.е. из того, что $y_n \to y$ слабо в $X_{\tau,T}$, $\{ y'_n \}_{n=1,2,\dots}$ ограничена в $Y_{\tau,T,\sigma}$, $\mathcal{A}_{\tau,T}(y_n) \to d$ слабо в $X^*_{\tau,T}$ и $\varlimsup_{n \to +\infty} \langle \mathcal{A}_{\tau,T}(y_n), y_n - y \rangle_{X_{\tau,T}} \le 0$, следует, что $d = \mathcal{A}_{\tau,T}(y)$ и $y_n \to y$ в $X_{\tau,T}$.

В частности, справедливы такие равенства:

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \mathcal{A}_{\tau,T}(y_n), y_n \rangle_{X_{\tau,T}} = \langle d, y \rangle_{X_{\tau,T}},$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\tau^T | \langle A(y_n(t)), y_n(t) - y(t) \rangle_V | \, dt = 0.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_{\tau,T}} : X^*_{\tau,T} \times X_{\tau,T} \to \mathbb{R}$ — спаривание в $X^*_{\tau,T} \times X_{\tau,T}$, совпадающее на $L_2(\tau, T; H) \times X_{\tau,T}$ со скалярным произведением в $L_2(\tau, T; H)$, т.е.

$$\forall u \in L_2(\tau, T; H), \forall v \in X_{\tau,T} \;\; \langle u, v \rangle_{X_{\tau,T}} = \int_\tau^T (u(t), v(t)) \, dt.$$

Заметим также (см. [3; теорема IV.1.17, с. 177]), что вложение $W_{\tau,T} \subset C([\tau, T]; H)$ непрерывно и плотно, более того,

$$\forall u, v \in W_{\tau,T} \;\; (u(T), v(T)) - (u(\tau), v(\tau)) = \int_\tau^T [\langle u'(t), v(t) \rangle_V + \langle v'(t), u(t) \rangle_V] dt. \quad (4)$$

Основной результат данной работы имеет такую формулировку.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1–5, $0 \le \tau < T < +\infty$. Тогда для любого $y_\tau \in K$ существует как минимум одно физическое решение y задачи (1) на $[\tau, T]$ такое, что $y(\tau) = y_\tau$.

Доказательство. Используем метод штрафа. Пусть P_K — оператор ортогонального проектирования произвольного элемента пространства V на выпуклый конус K. Пусть $J : V \to V^*$ — дуальный оператор, т.е. отображение, удовлетворяющее таким двум равенствам: $\| J(v) \|_{V^*} \| v \|_V = \langle J(v), v \rangle_V$ и $\| J(v) \|_{V^*} = \| v \|^{p-1}_V$ для произвольных $v \in V$. По теореме Асплунда пространство V можно перенормировать эквивалентной строгой нормой так, чтобы соответствующая норма в сопряженном пространстве V^* была также строгой и эквивалентной естественной норме. Следовательно, оператор J можно считать однозначным. В качестве оператора штрафа положим $\beta(v) = J(v - P_K v)$, $v \in V$. Отметим, что $\beta(v) = \bar{0}$ тогда и только тогда, когда $v \in K$. Более того, $\beta(\alpha v) = \alpha\,|\,\alpha\,|^{p-2}\,\beta(v)$ и $\langle \beta(v), v \rangle_V = 0$ для произвольных $v \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. В дальнейшем будем считать, что $(\beta(y))(t) = \beta(y(t))$ для п.в. $t \in (\tau, T)$ для всех $y \in X_{\tau,T}$.

Поскольку $\beta : X_{\tau,T} \to X^*_{\tau,T}$ — ограниченный монотонный деминепрерывный оператор, то для произвольного $\varepsilon > 0$ отображение $A_\varepsilon(y) := A_{\tau,T}(y) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(y)$, $y \in X_{\tau,T}$, является обобщенно псевдомонотонным на $W_{\tau,T}$ (удовлетворяет свойству 3). Более того, из определения оператора штрафа (определяющие свойства дуального отображения J) и из свойств 1, 2 для оператора $\mathcal{A}_{\tau,T}$ следуют свойства 1, 2 для нового оператора A_ε, действующего из $X_{\tau,T}$ в $X^*_{\tau,T}$. Таким образом, [7, теорема 2.4, с. 123] влечет существование решения $y_\varepsilon \in W_{\tau,T}$ такой задачи:

$$y'_\varepsilon + \mathcal{A}_{\tau,T}(y_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(y_\varepsilon) = \bar{0}, \quad y_\varepsilon(\tau) = y_\tau. \tag{5}$$

Более того, из формулы (4), монотонности β и из того, что K — конус, следуют такие соотношения:

$$-\langle \xi', y_\varepsilon \rangle_{X_{\tau,T}} + \langle \mathcal{A}_{\tau,T}(y_\varepsilon), \xi \rangle_{X_{\tau,T}} \ge 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty([\tau, T]; V) \cap K_{\tau,T}, \tag{6}$$

$$\|\, y_\varepsilon(t_2)\,\|_H^2 - \|\, y_\varepsilon(t_1)\,\|_H^2 + 2\int_{t_1}^{t_2} \langle A(y_\varepsilon(t)), y_\varepsilon(t) \rangle_V\, dt = 0 \quad \forall t_1, t_2 \in [\tau, T]. \tag{7}$$

С учетом предположений 2 и 3 существует такая постоянная $C_4 > 0$, что

$$\|\, y_\varepsilon \|_{C([\tau,T];H)} \le C_4, \ \|\, y_\varepsilon \|_{X_{\tau,T}} \le C_4, \ \|\, \mathcal{A}_{\tau,T}(y_\varepsilon)\,\|_{X^*_{\tau,T}} \le C_4 \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Докажем существование такой постоянной $C_5 > 0$, что

$$\|\, y'_\varepsilon \|_{Y_{\tau,T,\sigma}} \le C_5 \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{9}$$

Из предположения 5 следует существование таких $v_\sigma \in K_\sigma$ и $r_\sigma > 0$, что $\{v \in V_\sigma : \|\, v - v_\sigma \|_{V_\sigma} \le r_\sigma\} \subset K_\sigma$. Поскольку $K_\sigma = K \cap V_\sigma$ — конус, не теряя общности, можем считать, что $\|\, v_\sigma \|_{V_\sigma} = 1$ и $r_\sigma \le 1$. Положим $M := \{v \in K_\sigma : \|\, v - v_\sigma \|_{V_\sigma} \le 1\}$, $N := (M - v_\sigma) \cap (v_\sigma - M)$. Множество N выпуклое, замкнутое, поглощающее и уравновешенное. Таким образом, для множества N корректно определен функционал Минковского: $\rho_N(\omega) := \inf\{t > 0 : \omega / t \in N\}$, $\omega \in V_\sigma$. Более того, ρ_N удовлетворяет таким трем свойствам:

1) $\|\, \omega \|_{V_\sigma} \le \rho_N(\omega) \le \frac{1}{r_\sigma}\|\, \omega \|_{V_\sigma}$ для любого $\omega \in V_\sigma$;
2) $\rho_N(v_\sigma) = 1$;
3) $\{\omega \in V_\sigma : \rho_N(\omega - v_\sigma) \le 1\} \subset K_\sigma$.

Положим $\rho^*_N(g) := \sup\{\langle g, \omega \rangle_{V_\sigma} : \omega \in V_\sigma, \rho_N(\omega) \le 1\}$, $g \in V^*_\sigma$. Свойство 1) для ρ_N обеспечивает эквивалентность нормы ρ^*_N естественной норме пространства V^*_σ. Рассмотрим $K^-_\sigma := \{g \in V^*_\sigma : \langle g, \omega \rangle_{V_\sigma} \le 0\ \forall \omega \in K_\sigma\}$. Тогда из свойств 2) и 3) для ρ_N следует, что

$$\rho^*_N(g) = -\langle g, v_\sigma \rangle_{V_\sigma} \quad \forall g \in K^-_\sigma. \tag{10}$$

Поскольку $K \subseteq V$ — конус, монотонность $\beta : V \to V^*$ гарантирует, что $\beta(\omega) \in K^-_\sigma$ для произвольного $\omega \in V$. Следовательно, утверждения (4), (5), (10) обеспечивают выполнение равенств

$$\frac{1}{\varepsilon}\|\, \beta(y_\varepsilon)\,\|_{Y_{\tau,T,\sigma}} = -\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^T \langle \beta(y_\varepsilon(t)), v_\sigma \rangle_V\, dt =$$

$$= \int_\tau^T \langle A(y_\varepsilon(t)), v_\sigma \rangle_V\, dt + (y_\varepsilon(T) - y_\varepsilon(\tau), v_\sigma)_H$$

для любых $\varepsilon > 0$. Таким образом, из неравенств (8) получим

$$\frac{1}{\varepsilon}\|\, \beta(y_\varepsilon)\,\|_{Y_{\tau,T,\sigma}} \le C_4 \|\, v_\sigma \|_V\, (T - \tau)^{1/p} + 2C_4 \|\, v_\sigma \|_H \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{11}$$

Окончательно из (5), (8), (11) следует (9), поскольку вложение $X^*_{\tau,T} \subset Y_{\tau,T,\sigma}$ является непрерывным и плотным.

Справедливо такое равенство:

$$\langle \beta(y_\varepsilon),\, y_\varepsilon \rangle_{X_{\tau,T}} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{12}$$

поскольку $\langle \beta(v), v \rangle_V = 0$ для произвольного $v \in V$. Более того, из монотонности β и теоремы Банаха–Штейнгауза получим

$$\exists C_5 > 0 : \| \beta(y_\varepsilon) \|_{X^*_{\tau,T}} \le C_5 \quad \forall \varepsilon \in (0,1). \tag{13}$$

Действительно, для произвольного $\omega \in X_{\tau,T}$ монотонность β, оценка (8) и равенство (12) влекут такие неравенства:

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \langle \beta(y_\varepsilon), \omega \rangle_{X_{\tau,T}} \le \sup_{\varepsilon\in(0,1)} \langle \beta(y_\varepsilon), \omega - y_\varepsilon \rangle_{X_{\tau,T}} + \sup_{\varepsilon\in(0,1)} \langle \beta(y_\varepsilon),\, y_\varepsilon \rangle_{X_{\tau,T}} =$$

$$= \sup_{\varepsilon\in(0,1)} \langle \beta(\omega), \omega - y_\varepsilon \rangle_{X_{\tau,T}} \le \| \beta(\omega) \|_{X^*_{\tau,T}} (\| \omega \|_{X_{\tau,T}} + C_4) < \infty .$$

Следовательно, из теоремы Банаха–Штейнгауза получим (13).

Из априорных оценок (8), (9), (11) и леммы о компактности вложения $W_{\tau,T} \subset L_2(\tau, T; H)$ (в силу компактности вложения $V \subset H$) как следствие теоремы Банаха–Алаоглу получим, что существует последовательность $\varepsilon_n \searrow 0$, $n \to \infty$, и элементы $y \in X_{\tau,T}$, $d \in X^*_{\tau,T}$ такие, что $y(\tau) = y_\tau$ и имеют место такие сходимости:

$$y_{\varepsilon_n} \xrightarrow{w} y \text{ в } X_{\tau,T}, \quad y_{\varepsilon_n}(t) \to y(t) \text{ в } H \text{ для п.в. } t \in (\tau, T),$$

$$y_{\varepsilon_n}(T) \xrightarrow{w} y(T) \text{ в } H,\ \mathcal{A}_{\tau,T}(y_{\varepsilon_n}) \xrightarrow{w} d \text{ в } X^*_{\tau,T},\ n \to \infty. \tag{14}$$

Более того, из (11) и (13) получим, что

$$\beta(y_{\varepsilon_n}) \to 0 \text{ в } X^*_{\tau,T},\ n \to \infty. \tag{15}$$

Покажем, что $y \in K_{\tau,T}$. Из (14), (15) следует $\lim\limits_{n\to\infty} \langle \beta(y_{\varepsilon_n}),\, y_{\varepsilon_n} - y \rangle_{X_{\tau,T}} = 0$. Поскольку монотонный деминепрерывный оператор β псевдомонотонный, то с учетом (15) имеет место неравенство $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \langle \beta(y_{\varepsilon_n}),\, y_{\varepsilon_n} - \omega \rangle_{X_{\tau,T}} \ge$ $\ge \langle \beta(y),\, y - \omega \rangle_{X_{\tau,T}}$ $\forall \omega \in X_{\tau,T}$. Таким образом, $\beta(y(t)) \in K$ для п.в. $t \in (\tau, T)$. Следовательно, $y \in K_{\tau,T}$, поскольку $y \in X_{\tau,T}$.

Покажем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle \mathcal{A}_{\tau,T}(y_{\varepsilon_n}),\, y_{\varepsilon_n} - y \rangle_{X_{\tau,T}} \le 0. \tag{16}$$

Действительно, из (5), монотонности β и формулы (4) следует

$$\langle \mathcal{A}_{\tau,T}(y_{\varepsilon_n}),\, y_{\varepsilon_n} - v \rangle_{X_{\tau,T}} = \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(y_{\varepsilon_n}), v - y_{\varepsilon_n} \rangle_{X_{\tau,T}} + \langle y'_{\varepsilon_n}, v - y_{\varepsilon_n} \rangle_{X_{\tau,T}} \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(y_{\varepsilon_n}), v - y_{\varepsilon_n} \rangle_{X_{\tau,T}} + \langle v', v - y_{\varepsilon_n} \rangle_{X_{\tau,T}} \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(v), v - y_{\varepsilon_n} \rangle_{X_{\tau,T}} + \langle v', v - y_{\varepsilon_n} \rangle_{X_{\tau,T}} \le \langle v', v - y_{\varepsilon_n} \rangle_{X_{\tau,T}} \tag{17}$$

для произвольных $n = 1, 2, \ldots$ и $v \in W_{\tau,T} \cap K_{\tau,T}$, поскольку $\beta(v) = \bar{0}$. Таким образом, (14) влечет неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle \mathcal{A}_{\tau,T}(y_{\varepsilon_n}), y_{\varepsilon_n} \rangle_{X_{\tau,T}} \le \langle d, v \rangle_{X_{\tau,T}} + \langle v', v - y \rangle_{X_{\tau,T}} \tag{18}$$

для всех $v \in W_{\tau,T} \cap K_{\tau,T}$. Поскольку $\bar{0} \in K_{\tau,T} - \omega_\tau$ для $\omega_\tau \equiv y_\tau \in K_{\tau,T}$, то из [8, с. 284] следует существование такой последовательности $\{v_j\}_{j=1,2,\ldots} \subset$ $\subset (K_{\tau,T} - \omega_\tau) \cap W_{\tau,T}$, что:

(а) $\upsilon_j(\tau)=\bar{0}$ для всех $j=1,2,\ldots$;

(б) $\upsilon_j \to y-\omega_\tau$ в $X_{\tau,T}$ при $j\to\infty$;

(в) $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\langle \upsilon'_j, \upsilon_j+\omega_\tau-y\rangle_{X_{\tau,T}}\le 0$.

Положив в (18) $\upsilon=\upsilon_j+\omega_\tau\in K_{\tau,T}\cap W_{\tau,T}$, $j=1,2,\ldots$, получим, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\langle \mathcal{A}_{\tau,T}(y_{\varepsilon_n}), y_{\varepsilon_n}\rangle_{X_{\tau,T}}\le\langle d, y\rangle_{X_{\tau,T}}$. Последнее неравенство вместе с (14) и (17) влечет (16). Используем псевдомонотонность $A_{\tau,T}$ на $W_{\tau,T,\sigma}$. Из (9), (14), (16) следует, что $d=\mathcal{A}_{\tau,T}(y)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\langle \mathcal{A}_{\tau,T}(y_{\varepsilon_n}), y_{\varepsilon_n}\rangle_{X_{\tau,T}}=\langle d, y\rangle_{X_{\tau,T}}$ и

$$\int_\tau^T |\langle A(y_{\varepsilon_n}(t)), y_{\varepsilon_n}(t)-y(t)\rangle_V|\,dt\to 0,\ n\to\infty. \tag{19}$$

Более того, (17) дополнительно влечет неравенство (2).

Для завершения проверки того, что y — физическое решение задачи (1) на $[\tau,T]$, осталось проверить, что $y\in C([\tau,T];H)$ и y удовлетворяет (3).

Из (4), (5) (см. также (7)) следует, что $\frac{d}{dt}\|y_{\varepsilon_n}(t)\|_H^2=-\langle A(y_{\varepsilon_n}(t)), y_{\varepsilon_n}(t)\rangle_V$ для п.в. $t\in(\tau,T)$. Из формулы (19) и последней сходимости в (14) получаем, что последовательность $\left\{t\to\frac{d}{dt}\|y_{\varepsilon_n}(t)\|_H^2\right\}_{n=1,2,\ldots}$ измеримых действительных функций на (τ,T) является равномерно интегрируемой, т.е. существует подпоследовательность $\{y_{\varepsilon_m}\}_m\subseteq\{y_{\varepsilon_n}\}_n$ такая, что последовательность $\left\{t\to\frac{d}{dt}\|y_{\varepsilon_m}(t)\|_H^2\right\}_m$ сходится слабо в $L_1(\tau,T)$ к элементу $-\langle A(y(\cdot)), y(\cdot)\rangle_V\in L_1(\tau,T)$. Отсюда последовательность $\left\{t\to\frac{d}{dt}\|y_{\varepsilon_m}(t)\|_H^2\right\}_m$, с одной стороны, сходится в пространстве $D^*(\tau,T)$ (пространстве обобщенных функций на $[\tau,T]$) к регулярной обобщенной функции $-\langle A(y(\cdot)), y(\cdot)\rangle_V\in L_1(\tau,T)$. С другой стороны, последовательность $\{t\to\|y_{\varepsilon_m}(t)\|_H^2\}_m$ сходится в пространстве $D^*(\tau,T)$ к измеримой существенно ограниченной на (τ,T) функции $\|y(\cdot)\|_H^2$. Итак, последовательность $\left\{t\to\frac{d}{dt}\|y_{\varepsilon_m}(t)\|_H^2\right\}_m$ сходится в пространстве $D^*(\tau,T)$ к обобщенной функции $\frac{d}{dt}\|y(\cdot)\|_H^2$. Таким образом, в силу единственности предела в пространстве $D^*(\tau,T)$, $\frac{d}{dt}\|y(\cdot)\|_H^2=-\langle A(y(\cdot)), y(\cdot)\rangle_V\in L_1(\tau,T)$, отсюда с помощью формулы (4) следует априорная оценка (3).

Покажем, что

$$\|y(t)-y_\tau\|_H\to 0,\ t\searrow\tau_+. \tag{20}$$

Поскольку $y_\tau\in K$ и $\langle\beta(\upsilon),\upsilon\rangle_V=0$ для произвольных $\upsilon\in V$, то формула (5) влечет

$$(y_{\varepsilon_n}(t), y_\tau)-\|y_\tau\|_H^2=\int_\tau^t (y'_{\varepsilon_n}(s), y_\tau)\,ds=$$

$$=-\int_\tau^t\langle A(y_{\varepsilon_n}(s)), y_\tau\rangle_V\,dt-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t\langle\beta(y_{\varepsilon_n}(s)), y_\tau\rangle_V\,dt=$$

$$=-\int_\tau^t\langle A(y_{\varepsilon_n}(s)), y_\tau\rangle_V\,dt+\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t\langle\beta(y_{\varepsilon_n}(s)), y_{\varepsilon_n}(s)-y_\tau\rangle_V\,dt\ge-\int_\tau^t\langle A(y_{\varepsilon_n}(s)), y_\tau\rangle_V\,dt$$

для произвольных $n=1,2,\ldots$, $t\in(\tau,T)$. Иначе

$$(y_{\varepsilon_n}(t), y_\tau)-\|y_\tau\|_H^2\le\|y_\tau\|_H\,(\|y_{\varepsilon_n}(t)\|_H-\|y_\tau\|_H),$$

для произвольных $n=1,2,\ldots$ Таким образом,

$$-\int_{\tau}^{t}\langle A(y_{\varepsilon_n}(s)),\, y_\tau\rangle_V\, dt \le (y_{\varepsilon_n}(t),\, y_\tau) - \| y_\tau\|_H^2 \le$$

$$\le \| y_\tau\|_H\,(\| y_{\varepsilon_n}(t)\|_H - \| y_\tau\|_H),\ n=1,2,\ldots,\ t\in(\tau,T),$$

и, принимая во внимание сходимости (14), получаем

$$-\int_{\tau}^{t}\langle A(y(s)),\, y_\tau\rangle_V\, dt \le (y(t),\, y_\tau) - \| y_\tau\|_H^2 \le$$

$$\le \| y_\tau\|_H\,(\| y(t)\|_H - \| y_\tau\|_H)\ \text{для п.в. } t\in(\tau,T).$$

Поскольку $\langle A(y(\cdot)),\, y_\tau\rangle_V \in L_1(\tau,T)$, энергетическое равенство (3) обеспечивает последние два неравенства для всех $t\in[\tau,T]$. Следовательно,

$$(y(t),\, y_\tau) - \| y_\tau\|_H^2 \to 0 \text{ при } t\searrow\tau_+. \tag{21}$$

Для завершения доказательства свойства (20) заметим, что

$$\| y(t)-y_\tau\|_H^2 = \| y(t)\|_H^2 + \| y_\tau\|_H^2 - 2(y(t),\, y_\tau),\ t\in[\tau,T].$$

Следовательно, энергетическое равенство (3) и свойство (21) влекут свойство (20).

Из монотонности β и формул (4), (5) получаем неравенство

$$\| y_{\varepsilon_n}(t+h) - y_{\varepsilon_n}(t)\|_H^2 \le$$

$$\le \| y_{\varepsilon_n}(\tau+h) - y_\tau\|_H^2 - 2\int_{\tau}^{t}\langle A(y_{\varepsilon_n}(s+h)) - A(y_{\varepsilon_n}(s)),\, y_{\varepsilon_n}(s+h) - y_{\varepsilon_n}(s)\rangle_V\, dt$$

для произвольных $t\in(\tau,T-h)$ и $h\in(0,T-\tau)$. Из свойства 3, сходимостей (14) и (19) и последнего неравенства получаем

$$\| y(t+h) - y(t)\|_H^2 \le \| y(\tau+h) - y_\tau\|_H^2 -$$

$$-2\int_{\tau}^{t}\langle A(y(s+h)) - A(y(s)),\, y(s+h) - y(s)\rangle_V\, dt \tag{22}$$

для п.в. $t\in(\tau,T-h)$ и произвольных $h\in(0,T-\tau)$. С учетом энергетического равенства (3) неравенство (22) имеет место для всех $t\in(\tau,T-h)$ и $h\in(0,T-\tau)$. Таким образом, (20) и (22) влекут свойство непрерывности y как отображения из интервала времени $[\tau,T]$ в фазовое пространство H.

Для фиксированных $\tau<T$ введем обозначение:

$$\mathcal{D}_{\tau,T}(y_\tau) = \{ y(\cdot) \mid y \text{ — физическое решение (1) на } [\tau,T],\ y(\tau)=y_\tau\},\ y_\tau\in K.$$

Из теоремы 1 следует, что $\mathcal{D}_{\tau,T}(y_\tau)\ne\varnothing$ и $\mathcal{D}_{\tau,T}(y_\tau)\subset C([\tau,T];H)$ $\forall\tau<T$, $y_\tau\in K$. Более того, из условий на параметры задачи (1) и обобщенной леммы Гронуолла–Беллмана [9] существуют $C_4, C_5, C_6, C_7>0$ такие, что для любого конечного интервала времени $[\tau,T]$ каждое физическое решение y задачи (1) на $[\tau,T]$ удовлетворяет оценке $\forall t\ge s,\ t,s\in[\tau,T]$

$$\| y(t)\|_H^2 + C_4\int_{s}^{t}\| y(\xi)\|_V^p\, d\xi \le \| y(s)\|_H^2 + C_5(t-s), \tag{23}$$

$$\| y(t)\|_H^2 \le \| y(s)\|_H^2\, e^{-C_6(t-s)} + C_7. \tag{24}$$

Более того, трансляция и конкатенация физических решений задачи (1) на конечных интервалах времени являются физическими решениями такой задачи на соответствующих интервалах. Из доказательства теоремы 1 следует, что метод штрафа гарантирует существование физических решений задачи (1) на конечном интервале времени, которые являются равностепенно непрерывными как отображения из интервала времени $[\tau,T]$ в фазовое пространство H, если они стартуют из ограниченного подмножества естественного фазового пространства H (т.е. выполняются утверждения теорем о сильной сходимости решений из работы [10]). Таким образом (см. [10]), физические решения: а) могут быть продолжены до глобальных, определенных на положительной полуоси времени; б) равномерно устремляются в малое (компактное) подмножество естественного фазового пространства H (при времени $t \to +\infty$), не зависящее от ограниченного множества, из которого они стартовали. Исходя из результатов работы [10], такое притягивающее множество состоит из полных траекторий задачи (1), определенных на всей действительной прямой. Таким образом, результаты [10] позволяют описывать динамику решений таких задач глобально с помощью конечных алгоритмов с точностью до произвольного малого параметра.

Приведем пример класса нелинейных краевых задач, для которых можно исследовать динамику решений при $t \to +\infty$. Отметим, что при изложении мы не претендуем на общность.

Пусть $n \geq 2$, $m \geq 1$, $p \geq 2$, $1 < q \leq 2$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, N_1 (соответственно N_2) — число дифференцирований по x порядка $\leq m-1$ (соответственно порядка $= m$). Пусть $A_\alpha(x, \eta; \xi)$ — семейство вещественных функций ($|\alpha| \leq m$), определенных в $\Omega \times \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ и удовлетворяющих условиям:

У1) для п.в. $x \in \Omega$ функция $(\eta, \xi) \to A_\alpha(x, \eta, \xi)$ непрерывна в $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$;

У2) $\forall (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ функция $x \to A_\alpha(x, \eta, \xi)$ измерима в Ω;

У3) существуют такие $c_1 \geq 0$ и $k_1 \in L_q(\Omega)$, что для п.в. $x \in \Omega$ $\forall (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$

$$| A_\alpha(x, \eta, \xi) | \leq c_1[|\eta|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + k_1(x)];$$

У4) существуют такие $c_2 > 0$ и $k_2 \in L_1(\Omega)$, что для п.в. $x \in \Omega$, $\forall (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \eta, \xi)\xi_\alpha \geq c_2 |\xi|^p - k_2(x);$$

У5) существует возрастающая действительная функция υ такая, что для п.в. $x \in \Omega$ $\forall \eta \in \mathbb{R}^{N_1}$, $\forall \xi, \xi^* \in \mathbb{R}^{N_2}$, $\xi \neq \xi^*$, выполняется неравенство

$$\sum_{|\alpha|=m} (A_\alpha(x, \eta, \xi) - A_\alpha(x, \eta, \xi^*))(\xi_\alpha - \xi_\alpha^*) \geq (\upsilon(\xi_\alpha) - \upsilon(\xi_\alpha^*))(\xi_\alpha - \xi_\alpha^*).$$

Введем обозначения: $D^k u = \{D^\beta u, |\beta| = k\}$, $\delta u = \{u, Du, \ldots, D^{m-1} u\}$ [4, с. 194].

Для произвольной фиксированной внешней силы $f \in L_2(\Omega)$ исследуем динамику при $t \to +\infty$ всех слабых (обобщенных) решений, определенных на $[0, +\infty)$, такой задачи:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_\alpha(x, \delta y(x,t), D^m y(x,t))) = f(x) \text{ в } \Omega \times (0, +\infty), \quad (25)$$

$$D^\alpha y(x, t) = 0 \text{ на } \Gamma \times (0, +\infty), \ |\alpha| \leq m-1,$$

$$y(x, t) \geq 0 \text{ для п.в. } (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty). \quad (26)$$

Введем обозначения [4, с. 195]: $H = L_2(\Omega)$, $V = W_0^{m,p}(\Omega)$, $V_\sigma = W_0^{m+\sigma,p}(\Omega)$, $\sigma >> 1$, — действительное пространство Соболева, $K = \{ y \in W_0^{m,p}(\Omega) : y(x) \geq 0$ для п.в. $x \in \Omega \}$,

$$a(u, \omega) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega A_\alpha(x, \delta u(x), D^m u(x)) D^\alpha \omega(x) dx, \ u, \omega \in V.$$

Принимая во внимание условия У1)–У5) и [8, с. 192–199], оператор $A: V \to V^*$, определенный формулой $\langle A(u), \omega \rangle_V = a(u, \omega)$ $\forall u, \omega \in V$, удовлетворяет основным предположениям. Следовательно, можно перейти от задачи (25), (26) к соответствующей задаче (1). Отметим, что

$$A(u)=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(A_{\alpha}(x,\delta u,D^{m}u))\ \ \forall u\in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Таким образом, для физических решений задачи (25), (26) выполняются все утверждения из предыдущих подразделов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для класса автономных эволюционных вариационных неравенств на выпуклых конусах с псевдомонотонной нелинейностью введен класс физических решений. С помощью метода штрафа доказана невырожденность этого класса решений для произвольных начальных данных из такого конуса. Обоснован ряд априорных оценок и энергетических соотношений для физических решений, которые позволяют исследовать поведение (при времени $t\to+\infty$) и глобально моделировать динамику с помощью конечных алгоритмов (с точностью до малого параметра) глобальных физических решений, определенных на $[0,+\infty)$. Полученные результаты дают возможность исследовать динамику решений новых классов управляемых односторонних задач, проблем полупроникновения, задач управления на границе и могут быть эффективно использоваться при управлении и идентификации технических и технологических процессов разной природы. Разработанная методология исследования эволюционных вариационных неравенств позволяет с помощью результатов работы [10] исследовать динамику классов неавтономных односторонних задач, управляемых нелинейных полей диффузионного типа с нелинейными немонотонными законами реакции на границе области, задач поиска неотрицательных решений для систем уравнений, где применение принципа максимума проблематично, в частности уравнений Гинзбурга–Ландау, Лотки–Вольтерра, задач хемотаксиса, стохастических процессов и полей и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gorban N.V., Kapustyan O.V., Kasyanov P.O. Uniform trajectory attractor for non-autonomous reaction–diffusion equations with Caratheodory's nonlinearity // Nonlinear Analysis. — 2014. — **98.** — P. 13–26. — http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2013.12.004.
2. Kalita P., Lukaszewicz G. Global attractors for multivalued semiflows with weak continuity properties // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 2014. — **101**. — P. 124–143.
3. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 378 с.
4. Згуровский М.З., Касьянов П.О., Мельник В.С. Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. — Киев: Наук. думка, 2008. — 464 с.
5. Evolution inclusions and variation inequalities for Earth data processing III. Long-time behavior of evolution inclusions solutions in Earth data analysis / M.Z. Zgurovsky, P.O. Kasyanov, O.V. Kapustyan, J. Valero, N.V. Zadoianchuk // Series: Advances in Mechanics and Mathematics. — Berlin: Springer, 2012. — **27**. — 330 p.
6. Zgurovsky M.Z., Kasyanov P.O. Multivalued dynamics of solutions for autonomous operator differential equations in strongest topologies // Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications, Solid Mechanics and Its Applications. — 2014. — **211.** — P. 149–162.
7. Zgurovsky M.Z., Mel'nik V.S., Kasyanov P.O. Evolution inclusions and variation inequalities for earth data processing. II. Differential-operator inclusions and evolution variation inequalities for Earth data processing // Series: Advances in Mechanics and Mathematics. — Berlin: Springer, 2011. — **25.** — 274 p.
8. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
9. Ball J.M. Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier–Stokes equations // Journal of Nonlinear Sciences. — 1997. — **7**, N 5. — P. 475–502.
10. Касьянов П.О. Многозначная динамика решений автономного дифференциально-операторного включения с псевдомонотонной нелинейностью // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 5. — С. 150–163.
11. Kasyanov P.O., Mel'nik V.S., Toscano S. Solutions of Cauchy and periodic problems for evolution inclusions with multi-valued w_{λ_0}-pseudomonotone maps // Journal of Differential Equations. — 2010. — **249**, N 6. — P. 1258–1287.

Поступила 24.11.2014