УДК 515.831

Содержательная оценка ε-эквивалентности в нелинейных обратных задачах гравиметрии

© *П. И. Балк, 2009*

Берлин, Федеративная республика Германии

Поступила 23 июня 2009 г.

Представлено членом редколлегии В. И. Старостенко

Побудовано змістовну оцінку міри близькості допустимих розв'язків нелінійної оберненої задачі рудного типу, чутливу до будь-яких змінень у структурі множини цих розв'язків. Розглянуто деякі нові змістовні форми подання результатів інтерпретації.

Conceptual evaluation has been plotted for the proximity of feasible solutions of nonlinear inverse problem of ore type, sensitive to any changes in the structure of a set of these solutions. Some new conceptual forms of presenting the results of interpretation have been considered.

1. Своим возникновением понятие ε-эквивалентности обязано практической неоднозначности решения обратных задач, когда различные распределения масс могут обеспечить невязку подбора, не превосходящую заданного ε. В современной теории интерпретации термин "ε-эквивалентность" используется для констатации непреложного факта существования определенного множества A приближенных решений обратной задачи, каждое из которых полностью отвечает принятым допущениям; при этом оценка уровня помех в измерениях поля — лишь один из элементов в структуре априорных данных. В определенном смысле ε-эквивалентность можно рассматривать как методообразующий фактор. Согласно ему информативность любой интерпретационной модели всецело определяется структурой множества A допустимых решений. Каждое из этих решений в равной степени может претендовать на роль неизвестного истинного решения обратной задачи, но ни одно из них, взятое в отдельности, не в состоянии закрыть проблему достоверности извлекаемой информации об источниках поля (каким бы признаком оптимальности оно ни обладало).

2. Во многих разделах прикладной математики, где возникает необходимость решения некорректных обратных задач, фактор ε-эквивалентности побудил к разработке методов, реализующих концепцию гарантированного подхода [Розенвассер, Юсупов, 1982; Балк, 1987; Черноусько, 1988; Бакан, Куссуль; 1989]. Его основная идея — поиск содержательных инвариантов на множестве A или, другими словами, поиск общих свойств, присущих всем допустимым решениям и, следовательно, неизвестному истинному решению обратной задачи, содержащемуся в этом множестве. В терминах инвариантов удается выразить ту (гарантированно!) достоверную информацию об объекте исследования, которая содержится в принятой интерпретационной модели (при условии ее адекватности реальному физическому прототипу). В геофизику концепция гарантированного подхода пришла с работой [Канторович, 1962] по оценке избыточной массы по измерениям гравитационного поля применительно к модели источников в виде пакета однородных призм неизвестной плотности. В развитие идей Л. В. Канторовича в работах [Балк, 1981а, 1981б] был дан алгоритм вычисления неулучшаемых двусторонних оценок плотностей призм. Тем самым было показано, что проблемы оценки информативности геофизического эксперимента и достоверности результатов интерпретации, считавшиеся прерогативой информационно-статистического направления [Гольцман, Калинина, 1983], можно с успехом решать средствами детер-

министской теории. Элементы гарантированного подхода при решении нелинейных обратных задач можно найти в работах по магнитометрии [Зейгельман, 1983], геоэлектрике [Рокитянский, 1985], сейсморазведке [Тюленева и др., 1989], гравиметрии [Балк, 1980], геотермии [Балк, Гольдшмидт, 1989]. В определенном смысле гарантированный подход снимает две из двенадцати важнейших проблем, стоящих перед математической теорией интерпретации геопотенциальных полей [Страхов, 2001]: проблему согласования допустимых решений обратной задачи и проблему имитационного моделирования как инструмента оценки надежности решения обратных задач традиционными методами.

3. Теорию решения обратных задач геофизики в рамках концепции гарантированного подхода лишь предстоит построить. В числе первостепенных, но до сих пор не решенных, можно назвать проблему содержательных оценок степени совместной близости допустимых решений, составляющих множество A. В классической теории аналогичную роль выполняют метрики. Нельзя исключить, что последующее развитие математической теории интерпретации потенциальных полей пойдет по пути комплексирования традиционного и гарантированного подходов. Поэтому желательно, чтобы аксиоматика таких оценок была увязана с аксиоматикой метрических пространств.

На первый взгляд актуальность названной проблемы представляется спорной, поскольку во всех тех случаях, когда множество A берется из метрического пространства (X, ρ), указанной оценкой может служить диаметр $d(A)$ множества. Но дело в том, что любые оценки $\tau(A)$, основанные на попарном сравнении расстояний между элементами множества, не чувствительны к значительным изменениям в его структуре и допускают существование достаточно узких подмножеств $A_0 \subset A$ таких, что $\tau(A) = \tau(A_0)$. Это неприемлемо, если речь идет об оценке разрешающих способностей геофизического метода. Каждое допустимое решение обратной задачи несет присущую лишь ему информацию об источниках поля, и фактическое игнорирование большей части этих решений неминуемо ведет к нарушению принципа достоверности и полноты извлечения информации.

Автором предложена новая для теории множеств функция совместной близости элементов произвольного множества, аксиоматика построения которой позволяет говорить об определенном расширении классического понятия метрики. На ее основе построены содержательные оценки меры близости допустимых решений нелинейной обратной задачи рудного типа, обладающие высокой чувствительностью к изменениям в структуре множества A. Эти оценки хорошо согласуются с нетрадиционной формой представления результатов интерпретации в рамках гарантированного подхода, предложенной автором ранее и дополненной здесь еще одной содержательной модификацией.

4. ***Определение.*** *Пусть S — система всевозможных непустых подмножеств множества X, τ — отображение S в $\mathbf{R}$. Скажем, что на множестве X задана расширенная метрика τ, если для любых A, B, $C \in S$ выполняются следующие условия:*

$$|A| = 1 \leftrightarrow \tau(A) = 0, \tag{1}$$

$$\tau(A \cup B) \le \tau(A \cup C) + \tau(C \cup B). \tag{2}$$

Если на множестве X задана метрика ρ, то при выполнении, помимо (1) *и* (2), *условия*

$$|A| = 2 \ (A = \{x, y\}) \to \tau(A) = \rho(x, y) \tag{3}$$

функцию τ (A) назовем расширением метрики ρ на множестве X.

Условия (1), (2) являются аналогами первой аксиомы метрических пространств и аксиомы треугольника соответственно. А поскольку понятие множества предполагает произвольный порядок перечисления его элементов, то функция τ по определению удовлетворяет аналогу аксиомы симметрии метрических пространств. К тому же функция $\tau(A)$, что нетрудно показать, является неотрицательной. Отметим попутно, что упоминаемый выше диаметр непустого множества является расширением метрики, однако не всякое "естественное" обобщение метрики на случай оценки совместной близости элементов множества является ее расширением.

5. Сложившимся представлениям о целевой направленности нелинейной обратной задачи гравиметрии наиболее близко определение ее как задачи приближенного описания носителя источников поля — геометрического места точек $X^T \subset \mathbf{R}^3$, занятого аномалиеобразующими массами. Если так, то содержательная оценка глубины проникновения ε-эк-

вивалентности должна основываться на мере Лебега, а более определенно — на мерах носителей X_i, составляющих множество допустимых решений A. Две оценки такого типа предлагаются ниже, причем одна из них является расширением метрики Штейнхауса [Marczewski, Steinhaus, 1958], а другая — метрики Фреше — Никодима — Ароншаяна [Куратовский, Мостовский, 1970].

Теорема 1. *Пусть* μ *— классическая мера Лебега на* $\mathbf{R}^n$, X *— система всевозможных открытых подмножеств в* $\mathbf{R}^n$ *меры* $\mu<\infty$, S *— система всевозможных непустых конечных множеств* $A=\{X_1, X_2, ..., X_m\}$, $X_1, X_2, ..., X_m \in X$. *Тогда функция*

$$\tau\left(A\right)=1-\frac{\mu\left(\bigcap\limits_{i=1}^{m} X_i\right)}{\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i\right)}, \quad A\neq E, E=\{\varnothing\}, \qquad (4)$$

дополненная в "нуле" условием $\tau(E)=0$, *является расширением метрики Штейнхауса на множестве* X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $\tau(A)=0$ при $|A|=1$. Пусть $|A|>1$. Тогда $\varnothing \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{m} X_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$, а поскольку пересечение и объединение конечного числа открытых множеств открыты [Колмогорв, Фомин, 1972], то

$$0\leq\mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} X_i\right)<\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right)$$

и, следовательно, $\tau(A)>0$.

При $m=2$ функция (4) совпадает с метрикой Штейнхауса и остается проверить выполнение обобщенного неравенства треугольника (2).

Пусть A, B, $C\in S$ и $A\cup B\cup C\supseteq E$. Тогда по меньшей мере два из трех значений $\tau(A\cup B)$, $\tau(A\cup C)$, $\tau(C\cup B)$ функции τ лежат на концах интервала $\tau(S)=[0,\ 1]$ и при этом $\tau(A\cup B)\leq \leq \max[\tau(A\cup C), \tau(C\cup B)]$. Но это означает, что выполняется неравенство (2). Причем при $A=C=E$ $(B=C=E)$ и при $\varnothing\in A$, $|B|=1$, $B\neq E$, $C=B$ $(\varnothing\in B$, $|A|=1$, $A\neq E$, $C=A)$ оно переходит в равенство.

Пусть теперь $E\not\subset A$, B, C и $A\cup B\cup C=\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$. Положим

$$\Omega(1)=\left\{\alpha\in\Omega : X_\alpha\in A\right\},$$

$$\Omega(2)=\left\{\alpha\in\Omega : X_\alpha\in B\right\},$$

$$\Omega(3)=\left\{\alpha\in\Omega : X_\alpha\in C\right\},$$

$$F_j=\bigcap_{\alpha\in\Omega(j)} X_\alpha,$$

$$G_j=\bigcup_{\alpha\in\Omega(j)} X_\alpha,$$

$$j=1,2,3,$$

а также

$$F_{3,1}=F_3\cap\left(F_1\setminus F_2\right),$$

$$F_{3,2}=F_3\cap\left(F_2\setminus F_1\right),$$

$$F_{3,3}=F_3\cap\left(F_1\cap F_2\right),$$

$$F_{3,4}=F_3\setminus\left(F_1\cup F_2\right),$$

$$G_{3,1}=G_3\cap\left(G_1\setminus G_2\right),$$

$$G_{3,2}=G_3\cap\left(G_2\setminus G_1\right),$$

$$G_{3,3}=G_3\cap\left(G_1\cap G_2\right),$$

$$G_{3,4}=G_3\setminus\left(G_1\cup G_2\right).$$

Принимая во внимание аддитивность и монотонность меры μ и используя элементарные свойства правильных дробей, находим

$$\tau(A \cup C) + \tau(C \cup B) = \left(1 - \frac{\mu\left(\bigcap\limits_{\alpha \in \Omega(1) \cup \Omega(3)} X_\alpha\right)}{\mu\left(\bigcup\limits_{\alpha \in \Omega(1) \cup \Omega(3)} X_\alpha\right)}\right) + \left(1 - \frac{\mu\left(\bigcap\limits_{\alpha \in \Omega(3) \cup \Omega(2)} X_\alpha\right)}{\mu\left(\bigcup\limits_{\alpha \in \Omega(3) \cup \Omega(2)} X_\alpha\right)}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{\mu\left(F_{3,1} \cup F_{3,3}\right)}{\mu\left(G_1 \cup G_{3,2} \cup G_{3,4}\right)}\right) + \left(1 - \frac{\mu\left(F_{3,2} \cup F_{3,3}\right)}{\mu\left(G_2 \cup G_{3,1} \cup G_{3,4}\right)}\right) \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{\mu\left(F_{3,1} \cup (F_1 \cap F_2)\right) + \mu\left(G_2 \setminus (G_1 \cup G_3)\right)}{\mu\left(G_1 \cup G_{3,2}\right) + \mu\left(G_2 \setminus (G_1 \cup G_3)\right)}\right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{\mu\left(F_{3,2} \cup (F_1 \cap F_2)\right) + \mu\left(G_1 \setminus (G_2 \cup G_3)\right)}{\mu\left(G_2 \cup G_{3,1}\right) + \mu\left(G_1 \setminus (G_2 \cup G_3)\right)}\right) =$$

$$= 2 - \frac{\mu(F_1 \cap F_2) + \mu\left(F_{3,1} \cup F_{3,2} \cup (F_1 \cap F_2) \cup (G_1 \setminus (G_2 \cup G_3)) \cup (G_2 \setminus (G_1 \cup G_3))\right)}{\mu(G_1 \cup G_2)} \geq$$

$$\geq 2 - \frac{\mu(F_1 \cap F_2) + \mu(G_1 \cup G_2)}{\mu(G_1 \cup G_2)} = \tau(A \cup B).$$

Теорема 2. *В условиях и обозначениях из предыдущей теоремы функция*

$$\tau(A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i \setminus \bigcap_{i=1}^{m} X_i\right) \qquad (5)$$

является расширением метрики Фреше — Никодима — Ароншаяна на множестве X.

В обеих теоремах элементы системы A — открытые множества. Без этого условия аксиома (1) выполняется в одну сторону (порожденное мерой расстояние между множеством и его замыканием равно 0), и функции (4), (5) являются "всего лишь" расширенными псевдометриками. Если A — бесконечная система множеств, то при условии, что эти множества открыты, функции (4), (5) опять же являются расширенными псевдометриками, поскольку объединение бесконечного числа открытых множеств не обязательно открыто. Для геофизических приложений отмеченные ограничения не носят принципиальный характер: *любые два носителя, отличающиеся на подмножество меры нуль, воспринимаются как один*. Да и сам вопрос о том, считать природные носители масс открытыми или замкнутыми множествами, относится к разряду философских. Метрика и псевдометрика для геофизики равноценны. Здесь в очередной раз наблюдается несходство формально-математического и геофизического видений проблемы. Различные аспекты этого вопроса рассматривались автором ранее [Балк, 2000, 2001, 2002].

6. Перейдем к содержательным особенностям предложенных оценок и эффективным способам их приближенного вычисления. Начнем с того, что функции (4), (5), определенные на системе последовательно вложенных множеств, являются монотонными:

$$A \subset B \rightarrow \tau(A) \leq \tau(B). \tag{6}$$

Это свойство, не предусмотренное аксиомами (1)—(3), согласуется с априорными представлениями о том, как обязаны реагировать содержательные характеристики меры проявления ε-эквивалентности на сужение множества допустимых решений обратной задачи за счет привлечения дополнительной информации. Значение функции (5) есть абсолютная, а функции (4) — относительная (нормированная на отрезке [0, 1]) оценка неопределенности, присущей принятой интерпретационной модели. Значение $\tau(A) = 0$ отвечает гипотетической ситуации, при которой поле задано точно и обратная задача имеет единственное решение. Значение $\tau(A) = 1$ соответствует самому неблагоприятному исходу, когда невозможно указать ни одной точки пространства, гарантированно принадлежащей носителю масс.

7. Основными структурными элементами оценок (4), (5) являются множества

$$D_1 = \bigcup_{i=1}^{m} S_i, \quad D_2 = \bigcap_{i=1}^{m} S_i. \tag{7}$$

Если предположить, что модельные представления адекватны реальности и, значит, неизвестное истинное решение S^T является элементом множества допустимых решений, то содержательная интерпретация пары $\langle D_1, D_2 \rangle$ такова: $D_1 \setminus D_2$ — множество всех точек $\mathbf{R}^3$, каждая из которых, в принципе, могла бы принадлежать неизвестному носителю S^T, D_2 — максимальное подмножество точек, которое гарантированно можно идентифицировать как его фрагмент; вне объема, занятого точками множества D_1, источников поля нет. Говоря иначе, множества (7) и являются теми инвариантами, о которых говорилось в начале статьи и которые представляют собой неулучшаемые двусторонние оценки для неизвестного носителя:

$$D_2 \subset S^T \subset D_1.$$

Триада $\langle D_1, D_2; \tau \rangle$ может удачно дополнять традиционную форму представления решения обратной задачи. Более того, в перспективе речь может пойти об алгоритмах преобразования числовой модели поля в числовую модель среды, когда на множестве элементов $\{\omega_k\}$, образующих замощение $\mathbf{R}^3_+$, вводится своего рода отношение порядка. Для каждого элемента ω_k определяется ранг (натуральное n_k) и неравенство $n_j < n_k$ будет означать, что вероятность принадлежности элемента ω_k неизвестному носителю выше, чем у элемента ω_j. Объединения элементов одинакового ранга будут образовывать классы эквивалентности.

Отправным пунктом здесь может послужить то обстоятельство, что фактическое значение ε_0 невязки ε интерпретируемого и точного поля формируется под влиянием многих, не всегда полностью контролируемых факторов. На практике это порождает проблему задания ограничения на максимально возможный уровень помех. Если оценка сверху на величину ε занижена по отношению к фактическому ε_0, то множество "псевдодопустимых" решений обратной задачи (если оно не пусто) не содержит истинного решения. Напротив, необоснованно завышенный порог возможных значений невязки ведет к потере информативности результатов интерпретации. В какой-то мере эту дилемму удается разрешить, если воспользоваться следующей формой представления результатов интерпретации.

Пусть $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots < \varepsilon_n$, причем заведомо $\varepsilon_1 \geq \geq \varepsilon_0$. Если теперь $\{D_2^{(i)}\}$, $j = i+1, i+2, \ldots, n$, — области из (7), построенные в рамках определенной интерпретационной модели, но при различных оценках $\varepsilon \leq \varepsilon_i$, то между множествами $\Omega^{(i)} = D_2^{(i)} \setminus \left(\bigcup_{j=i+1}^{n} D_2^{(i)} \right)$ устанавливается отношение предпочтения: если $\Omega^{(i)}$ принадлежит носителю S^T, то и любое множество $\Omega_2^{(j)}$, $j > i$, также является его фрагментом. Подобной информацией можно воспользоваться при планировании буровых работ.

8. Возможность вырождения правой части (6) в равенство, продиктованная простейшими соображениями теоретико-множественного характера, играет ключевую роль при разработке конструктивных алгоритмов решения обратной задачи в терминах пары $\langle D_1, D_2 \rangle$ с последующим оцениванием информативности совокупных априорных данных в терминах расширенных метрик (4) и (5). Нестрогое неравенство предполагает возможным (и реально так оно и есть) существование достаточно узких семейств "эффективных" допустимых решений обратной задачи таких, что остальные допустимые решения, взятые вместе, не несут никакой дополнительной информации к уже содержащейся в "эффективном" семействе. В общем случае существует много различных способов кооперации отдельных допустимых решений в такие репрезентативные семейства. Идея в том, чтобы, не прибегая к фактическому построению всего множества A, выделить из него любое семейство, объединение и пересечение элементов которого совпадало бы с объединением и пересечением всех допустимых носителей.

При использовании сеточных классов носителей можно рассчитывать на репрезентативные подмножества, мощность которых не превосходит удвоенного числа сеточных элементов, покрывающих часть пространства, заведомо содержащую источники аномалии. Для этого достаточно каждое допустимое решение обратной задачи, предназначенное для включения в указанное подмножество, искать при условии, что какой-то из сеточных элементов, не вошедший ни в один из ранее построенных допустимых носителей, принадлежит искомому решению. Объединение найденных допустимых носителей дает приближение к множеству D_1. Если продолжить процесс и каждое очередное допустимое решение искать при условии, что оно не содержит хотя бы один сеточный элемент, вошедший в пересечение уже построенных допустимых носителей, то по завершении этого процесса пересечение всех найденных допустимых носителей даст приближение к множеству D_2. Заметим, что при использовании алгоритма регулируемой направленной кристаллизации [Страхов, Лапина, 1976] оба дополнительных условия не повлекут к усложнению алгоритма.

9. Нелинейная обратная задача позволяет наглядно объяснить суть принципиальных различий между традиционным и гарантированным подходами и, вместе с тем, их взаимонепротиворечивость.

Безусловно, если множество D_2 не пусто, то всякое приближенное решение S^* содержит фрагмент неизвестного носителя, по мере μ превосходящий (и заметно) множество D_2. Но о каком конкретно (!) фрагменте идет речь — этот вопрос остается открытым, тогда как D_2 гарантированно является частью носителя S^T (разумеется, нельзя исключить, что неопределенность будет достаточно высока и $D_2 = \varnothing$). Ясно, что в зависимости от того, как предполагается использовать результаты математической интерпретации гравиметрических данных, более предпочтительным может оказаться тот или иной подход. Но, скорее всего, они должны дополнять друг друга.

10. Понятно, что область применения оценок (4), (5) шире той, что вынесена в заголовок статьи, и охватывает все те обратные задачи геофизики, где изучаемым объектом является множество евклидового пространства. И еще. Случай $m = 2$ (классическая метрика) уже анонсировался автором в одной из более ранних публикаций, но лишь при подготовке данной статьи обнаружилось, что соответствующие метрики, порожденные мерой, были предложены еще в 50-х годах прошлого столетия. К сожалению, такое случается. Можно вспомнить замечательную работу [Оганесян, Старостенко, 1985], в которой прослеживается история открытия и переоткрытия (спустя более полувека!) ряда важнейших теорем, относящихся к проблематике единственности решения обратной задачи гравиметрии.

Список литературы

Бакан Г.М., Куссуль Н.Н. Размытые эллипсоидальные множества в задачах нестатистического оценивания // Автоматика. — 1989. — № 5. — С. 11—17.

Балк П.И. Математический формализм и невостребованные идеи в теории интерпретации потенциальных полей // Геофизика. — 2002. — № 2. — С. 41—46.

Балк П.И. О надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1980. — № 6. — С. 43—57.

Балк П.И. О практически достижимой точности и достоверности решения обратных задач теплопроводности // Инженерно-физ. журн. — 1987. — **52**, № 2. — С. 316—323.

Балк П.И. Столкновение геофизических и математических интересов — главный источник противоречий в современной теории интерпретации потенциальных полей // Геофиз. журн. — 2000. — **4**, № 22. — С. 3—20.

Балк П.И. Столкновение геофизических и математических приоритетов — основной источник противоречий в современной теории интерпретации потенциальных полей // Физика Земли. — 2001. — № 3. — С. 85—96.

Балк Т.В. Об оценке надежности результатов интерпретации гравитационных аномалий по методу призм при переменной плотности // Геология и геофизика. — 1981а. — № 4. — С. 119—125.

Балк Т.В. О разрешающих способностях гравиметрического метода разведки на примере линейной обратной задачи // Геофиз. журн. — 1981б. — **3**, № 4. — С. 18—27.

Балк П.И., Гольдшмидт В.И. Интерпретация нестационарных геотермических аномалий на основе анализа множества допустимых решений обратной задачи // Геофиз. журн. — 1989. — **11**, № 3. — С. 52—60.

Гольцман Ф. М., Калинина Т. Б. Статистическая интерпретация магнитных и гравитационных аномалий. — Москва: Недра, 1983. — 248 с.

Зейгельман М.С. Один тип эквивалентности при оценке глубины залегания намагниченности масс // Докл. АН УССР, сер. Б. — 1983. — № 8. — С. 10—13.

Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибир. матем. журн. — 1962. — **3**, № 5. — С. 701—709.

Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва: Наука, 1972. — 496 с.

Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — Москва: Мир, 1970. — 416 с.

Оганесян С.М., Старостенко В.И. Тела нулевого внешнего гравитационного потенциала: о забытых работах и современном состоянии теории // Физика Земли. — 1985. — № 3. — С. 46—62.

Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. — Москва: Наука, 1982. — 464 с.

Рокитянский И.И. Моделирование в геоэлектрике. 1. Неоднозначность // Геофиз. журн. — 1985. — **7**, № 1. — С. 15—24.

Страхов В.Н. Главнейшая задача в развитии теории и практики интерпретации потенциальных полей в начале 21 века — разрушение господствующего стереотипа мышления // Геофизика. — 2001. — № 1. — С. 3—18.

Страхов В.Н., Лапина М.И. Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // Докл. АН СССР. — 1976. — **227**, № 2. — С. 344—347.

Тюленева С. Г., Фишман В. М., Зюганов С. К. Построение достижимых границ области допустимых скоростных разрезов в рамках τ-метода // Докл. АН СССР. — 1989. — **308**, № 5. — С. 1107—1111.

Черноусько Ф.А. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. — Москва: Наука, 1988. — 320 с.

Marczewski F., Steinhaus H. On certain distance of sets and the corresponding distance of funktion // Colloquium Mathematicum. — 1958. — № 6. — P. 319—327.