УДК 517.977.56

В.Е. КАПУСТЯН, И.А. ПЫШНОГРАЕВ

РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ОБЩИМ КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ В СПЕЦИАЛЬНОЙ НОРМЕ ДЛЯ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. Получены условия для нахождения распределенного оптимального управления для параболо-гиперболического уравнения с нелокальными граничными условиями и общим квадратичным критерием качества в специальной норме. Установлена однозначная разрешимость систем для нахождения оптимального решения, получены оценки ядер систем, доказана сходимость решений задачи.

Ключевые слова: оптимальное управление, параболо-гиперболические уравнения, нелокальные краевые условия, распределенное управление.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время перспективным направлением является исследование процессов, описанных уравнениями смешанного типа. Это связано с тем, что они встречаются во многих приложениях к газовой и электромагнитной динамике, в математической биологии, теории электоронного рассеивания и др. Например, в [1] рассмотрена краевая задача для параболо-гиперболических уравнений с одним типом нелокальных граничных условий, в [2] исследованы задачи для параболо-гиперболических уравнений в многомерном пространстве, возникающие при изучении задач о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле.

Задачи управления для моделей с параболо-гиперболическими уравнениями и нелокальными точечными условиями ранее не рассматривались. Настоящая статья посвящена построению условий оптимальности для нахождения распределенного управления с общим квадратичным критерием в специальной норме.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть управляемый процесс $y(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}(D_+)$ удовлетворяет в D уравнению

$$L\, y(x,t) = \hat{u}(x,t), \tag{1}$$

начальным

$$y(x,-\alpha) = \varphi(x) \tag{2}$$

и граничными условиями

$$y(0,t) = 0, \;\; y'(0,t) = y'(1,t), \quad -\alpha \le t \le T, \tag{3}$$

где $D = \{(x,t)\colon 0 < x < 1, \quad -\alpha < t \le T, \quad \alpha, T > 0\}$, $D_- = \{(x,t)\colon 0 < x < 1, -\alpha < t \le 0\}$, $D_+ = \{(x,t)\colon 0 < x < 1, \; 0 < t \le T\}$, функции $\hat{u}$, φ считаем задаными, а их свойства по гладкости будут описаны далее,

$$Ly = \begin{cases} y_t - y_{xx}, & t > 0, \\ y_{tt} - y_{xx}, & t < 0. \end{cases}$$

Требуется найти управление $\hat{u}^*(x,t) \in K$, которое минимизирует функционал

$$I(\hat{u}) = 0.5 \left(\hat{\alpha}\, \| y(\cdot,T) - \psi(\cdot) \|_D^2 + \hat{\beta}_1 \int_{-\alpha}^{0} \| y(\cdot,t) \|_D^2 \, dt + \hat{\beta}_2 \int_0^T \| y(\cdot,t) \|_D^2 \, dt + \right.$$

$$+\hat{\gamma}_1 \int_{-\alpha}^{0} \|\upsilon(\cdot, t)\|_D^2 \, dt + \hat{\gamma}_2 \left(\|u(\cdot, 0)\|_D^2 + \int_0^T \|u_t(\cdot, t)\|_D^2 \, dt \right) \Bigg) =$$

$$= 0.5 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\hat{\alpha}\, (y_i(T) - \psi_i)^2 + \hat{\beta}_1 \int_{-\alpha}^{0} y_i^2(t)\, dt + \hat{\beta}_2 \int_0^T y_i^2(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \hat{\gamma}_1 \int_{-\alpha}^{0} \upsilon_i^2(t)\, dt + \hat{\gamma}_2 \left(u_i^2(0) + \int_0^T \dot{u}_i^2(t)\, dt \right) \right), \tag{4}$$

где $\psi(x)$ — фиксированная функция, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_i \geq 0$, $\hat{\gamma}_i > 0, i = \overline{1, 2}$; $\hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 > 0$; класс функций K задан в [3].

Задача (1)–(3), (4) формально эквивалентна последовательности следующих конечномерных задач:

1) найти управления $\upsilon_0^*(t) \in C[-\alpha, 0), u_0^*(0) \in R^1, \xi_0^*(t) \in L_2[0, T]$, минимизирующие функционал

$$I_0 = 0.5 \left(\hat{\alpha}\, (y_0(T) - \psi_0)^2 + \hat{\beta}_1 \int_{-\alpha}^{0} y_0^2(t)\, dt + \hat{\beta}_2 \int_0^T y_0^2(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \hat{\gamma}_1 \int_{-\alpha}^{0} \upsilon_0^2(t)\, dt + \hat{\gamma}_2 \left(u_0^2(0) + \int_0^T \xi_0^2(t)\, dt) \right) \right), \tag{5}$$

на решениях краевой задачи

$$\frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} = \upsilon_0(t),\ t \in (-\alpha, 0),\ y_0(-\alpha) = \varphi_0;$$

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = u_0(0) + \int_0^t \xi_0(\tau)\, d\tau,\ t \in (0, T];$$

$$y_0(0-) = y_0(0+),\ \dot{y}_0(0-) = \dot{y}_0(0+) = u_0(0); \tag{6}$$

2) найти управления $\upsilon_i^*(t) \in C[-\alpha, 0)$, $u_i^*(0) \in R^1$, $\xi_i^*(t) \in L_2[0, T]$, $i = \overline{2k-1, 2k}$, минимизирующие функционал

$$I_k = 0.5 \sum_{i=2k-1}^{2k} \left(\hat{\alpha}\, (y_i(T) - \psi_i)^2 + \hat{\beta}_1 \int_{-\alpha}^{0} y_i^2(t)\, dt + \hat{\beta}_2 \int_0^T y_i^2(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \hat{\gamma}_1 \int_{-\alpha}^{0} \upsilon_i^2(t)\, dt + \hat{\gamma}_2 \left(u_i^2(0) + \int_0^T \xi_i^2(t)\, dt \right) \right), \tag{7}$$

на решениях краевой задачи

$$\frac{dy_{2k-1}(t)}{dt} = -\lambda_k^2\, y_{2k-1}(t) + u_{2k-1}(0) + \int_0^t \xi_{2k-1}(\tau) d\tau,\ t > 0,$$

$$\frac{d^2 y_{2k-1}(t)}{dt^2} = -\lambda_k^2 y_{2k-1}(t) + \upsilon_{2k-1}(t),\ t < 0,$$

$$y_{2k-1}(-\alpha) = \varphi_{2k-1}, \tag{8}$$

$$\frac{dy_{2k}(t)}{dt} = -\lambda_k^2\ y_{2k}(t) - 2\lambda_k\ y_{2k-1}(t) + u_{2k}(0) + \int_0^t \xi_{2k}(\tau)d\tau,\ t>0\,,$$

$$\frac{d^2 y_{2k}(t)}{dt^2} = -\lambda_k^2 y_{2k}(t) - 2\lambda_k\ y_{2k-1}(t) + \upsilon_{2k}(t),\ t<0\,,$$

$$y_{2k}(-\alpha) = \varphi_{2k}; \tag{9}$$

$$y_i(0-) = y_i(0+),\ i = \overline{2k-1, 2k}\,,$$

$$\dot y_{2k-1}(0-) = \dot y_{2k-1}(0+) = -\lambda_k^2\ y_{2k-1}(0+) + u_{2k-1}(0)\,,$$

$$\dot y_{2k}(0-) = \dot y_{2k}(0+) = -\lambda_k^2\ y_{2k}(0+) - 2\lambda_k\ y_{2k-1}(0+) + u_{2k}(0)\,. \tag{10}$$

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Условия оптимальности для задачи 1. В силу строгой выпуклости функционала (5), (6) по управлениям он имеет единственную точку минимума в $C[-\alpha, 0) \times R^1 \times L_2(0, T)$, которая характеризуется условиями оптимальности [4]

$$\hat\gamma_1\ \upsilon_0(t) + \int_{-\alpha}^{0} K_{0,1}^{(1)}(t,\tau)\,\upsilon_0(\tau)\,d\tau + K_{0,2}^{(1)}(t)\,u_0(0) + \int_0^T K_{0,3}^{(1)}(t,\tau)\,\xi_0(\tau)\,d\tau =$$

$$= M_{0,1}^{(1)}(t)\,\varphi_0 + M_{0,2}^{(1)}(t)\,\psi_0,\ t\in[-\alpha, 0)\ ,$$

$$\hat\gamma_2\ u_0(0) + \int_{-\alpha}^{0} K_{0,1}^{(2)}(\tau)\,\upsilon_0(\tau)\,d\tau + K_{0,2}^{(2)}\ u_0(0) + \int_0^T K_{0,3}^{(2)}(\tau)\,\xi_0(\tau)\,d\tau =$$

$$= M_{0,1}^{(2)}\ \varphi_0 + M_{0,2}^{(2)}\psi_0\ ,$$

$$\hat\gamma_2\ \xi_0(t) + \int_{-\alpha}^{0} K_{0,1}^{(3)}(t,\tau)\,\upsilon_0(\tau)\,d\tau + K_{0,2}^{(3)}(t)\,u_0(0) + \int_0^T K_{0,3}^{(3)}(t,\tau)\,\xi_0(\tau)\,d\tau =$$

$$= M_{0,1}^{(3)}(t)\,\varphi_0 + M_{0,2}^{(3)}(t)\,\psi_0,\ t\in(0, T], \tag{11}$$

где

$$\Phi_{0,+}^0(t) = 1, V_{0,+}^0(t,\tau) = -(\alpha+\tau), U_{0,+}^0(t) = \alpha, U_{0,+}^0(t,\tau) = 1\,,$$

$$\Phi_{0,-}^0(t) = 1, V_{0,-}^0(t,\tau) = -(\alpha+t), U_{0,-}^0(t) = \alpha + t, V_{0,-}^0(t,\tau) = t-\tau\,;$$

$$K_{0,1}^{(1)}(t,\tau) = \hat\alpha\ V_{0,+}^0(T,t)\,V_{0,+}^0(T,\tau) + \hat\beta_1 \left(\int_{-\alpha}^{0} V_{0,-}^0(\xi,t)\,V_{0,-}^0(\xi,\tau)d\xi + \right.$$

$$+\int_\tau^0 V_{0,-}^0(\xi,t)\,V_{0,-}^0(\xi,\tau)d\xi + \int_t^0 V_{0,-}^0(\xi,t)\,V_{0,-}^0(\xi,\tau)d\xi +$$

$$+\begin{cases}\int\limits_t^0 V_{0,-}^0(\xi,t)V_{0,-}^0(\xi,\tau)d\xi, & \tau\le t,\\ \int\limits_\tau^0 V_{0,-}^0(\xi,t)V_{0,-}^0(\xi,\tau)d\xi, & \tau>t\end{cases}+\hat\beta_2\int\limits_0^T V_{0,+}^0(\xi,t)V_{0,+}^0(\xi,\tau)d\xi,$$

$$K_{0,2}^{(1)}(t)=\hat\alpha\left(U_{0,+}^0(T)+\int\limits_0^T U_{0,+}^0(T,\tau)\,d\tau\right)V_{0,+}^0(T,t)+\hat\beta_1\int\limits_{-\alpha}^0 U_{0,-}^0(\tau)V_{0,-}^0(\tau,t)\,d\tau+$$

$$+\hat\beta_2\int\limits_0^T\left(U_{0,+}^0(\tau)+\int\limits_0^\tau U_{0,+}^0(\tau,\xi)\,d\xi\right)V_{0,+}^0(\tau,t)\,d\tau,$$

$$K_{0,3}^{(1)}(t,\tau)=\hat\alpha\,V_{0,+}^0(T,t)\int\limits_\tau^T U_{0,+}^0(T,\mu)\,d\mu+\hat\beta_2\int\limits_\tau^T\int\limits_\tau^\xi U_{0,+}^0(\xi,\mu)d\mu\,V_{0,+}^0(\xi,t)d\xi,$$

$$M_{0,1}^{(1)}(t)=-\hat\alpha\,\Phi_{0,+}^0(T)V_{0,+}^0(T,t)-\hat\beta_1\int\limits_{-\alpha}^0\Phi_{0,-}^0(\xi)V_{0,-}^0(\xi,t)d\xi-$$

$$-\hat\beta_2\int\limits_0^T\Phi_{0,+}^0(\xi)V_{0,+}^0(\xi,t)d\xi\,,\;M_{0,2}^{(1)}(t)=\hat\alpha\,V_{0,+}^0(T,t);\;K_{0,1}^{(2)}(t)=K_{0,2}^{(1)}(t),$$

$$K_{0,2}^{(2)}=\hat\alpha\left(U_{0,+}^0(T)+\int\limits_0^T U_{0,+}^0(T,\tau)\,d\tau\right)^2+\hat\beta_1\int\limits_{-\alpha}^0(U_{0,-}^0(\xi))^2\,d\xi+$$

$$+\hat\beta_2\int\limits_0^T\left(U_{0,+}^0(\xi)+\int\limits_0^\xi U_{0,+}^0(\xi,\tau)\,d\tau\right)^2 d\xi,$$

$$K_{0,3}^{(2)}(t)=\hat\alpha\left(U_{0,+}^0(T)+\int\limits_0^T U_{0,+}^0(T,\tau)d\tau\right)\int\limits_t^T U_{0,+}^0(T,\tau)d\tau+$$

$$+\hat\beta_2\int\limits_0^T\left(U_{0,+}^0(\xi)+\int\limits_0^\xi U_{0,+}^0(\xi,\tau)d\tau\right)\int\limits_t^\xi U_{0,+}^0(\xi,\mu)d\mu\,d\xi,$$

$$M_{0,1}^{(2)}=-\hat\alpha\left(U_{0,+}^0(T)+\int\limits_0^T U_{0,+}^0(T,\tau)\,d\tau\right)\Phi_{0,+}^0(T)-\hat\beta_1\int\limits_{-\alpha}^0 U_{0,-}^0(\xi)\,\Phi_{0,-}^0(\xi)d\xi-$$

$$-\hat\beta_2\int\limits_0^T\left(U_{0,+}^0(\xi)+\int\limits_0^\xi U_{0,+}^0(\xi,\tau)\,d\tau\right)\Phi_{0,+}^0(\xi)d\xi,$$

$$M_{0,2}^{(2)}=\hat\alpha\left(U_{0,+}^0(T)+\int\limits_0^T U_{0,+}^0(T,\tau)\,d\tau\right);$$

$$K_{0,1}^{(3)}(t,\tau)=K_{0,3}^{(1)}(\tau,t),K_{0,2}^{(3)}(t)=K_{0,3}^{(2)}(t),$$

$$K_{0,3}^{(3)}(t,\tau)=\hat{\alpha}\int\limits_t^T U_{0,+}^{0}(T,\mu)d\mu\int\limits_\tau^T U_{0,+}^{0}(T,\xi)d\xi+$$

$$+\hat{\beta}_2\begin{cases}\int\limits_t^T\int\limits_\tau^\xi U_{0,+}^{0}(\xi,\mu)d\mu\int\limits_t^\xi U_{0,+}^{0}(\xi,\nu)d\nu d\xi, \ \tau\le t,\\ \int\limits_\tau^T\int\limits_\tau^\xi U_{0,+}^{0}(\xi,\mu)d\mu\int\limits_t^\xi U_{0,+}^{0}(\xi,\nu)d\nu d\xi, \ \tau> t,\end{cases}$$

$$M_{0,1}^{(3)}(t)=-\hat{\alpha}\ \Phi_{0,+}^{0}(T)\int\limits_t^T U_{0,+}^{0}(T,\mu)\,d\mu-\hat{\beta}_2\int\limits_t^T \Phi_{0,+}^{0}(\tau)\int\limits_t^\tau U_{0,+}^{0}(\tau,\mu)d\mu d\tau\,,$$

$$M_{0,2}^{(3)}(t)=\hat{\alpha}\int\limits_t^T U_{0,+}^{0}(T,\mu)\,d\mu\,.$$

Установим однозначную разрешимость системы (11), определив оператор $A_0\ \theta_0(\cdot)=\Gamma_{3\times 3}\theta_0(t)+A_0\ \theta_0(\cdot)$, где $(\theta_0(t))'=(\upsilon_0(t),u_0(0),\xi_0(t))\in\ L_2(-\alpha,0)\times$ $\times R^1\times L_2(0,T)$, $\Gamma_{3\times 3}=\mathrm{diag}\,\{\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2,\hat{\gamma}_2\}$, оператор A_0 определяется оставшимися членами левых частей системы уравнений (11).

Очевидно, что оператор A_0 действует из $L_2(-\alpha,0)\times R^1\times L_2(0,T)$ в $L_2(-\alpha,0)\times$ $\times R^1\times L_2(0,T)$, является линейным и непрерывным. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Система (11) имеет единственное решение в пространстве $C(-\alpha,0)\times R^1\times L_2(0,T)$.

Доказательство. Пространство $L_2(-\alpha,0)\times R^1\times L_2(0,T)$ является гильбертовым с естественным скалярным произведением

$$\langle\theta_0,\widetilde{\theta}_0\rangle_3=\int\limits_{-\alpha}^0\upsilon_0(t)\,\widetilde{\upsilon}_0(t)\,dt+u_0(0)\,\widetilde{u}_0(0)+\int\limits_0^T\xi_0(t)\,\widetilde{\xi}_0(t)\,dt\ ,$$

где $(\theta_0(t))'=(\upsilon_0(t),u_0(0),\xi_0(t)),\ (\widetilde{\theta}_0(t))'=(\widetilde{\upsilon}_0(t),\widetilde{u}_0(0),\widetilde{\xi}_0(t))$.

Выделим из функционала (5) квадратичную по управлениям $\upsilon_0(t)$, $t\in[-\alpha,0)$; $u_0(0),\xi_0(t)\in[0,T]$ часть и вычтем из нее величину

$$0.5\left(\hat{\gamma}_1\int\limits_{-\alpha}^0\upsilon_0^2(t)\,dt+\hat{\gamma}_2\left(u_0^2(0)+\int\limits_0^T\xi_0^2(t)\,dt\right)\right),$$

т.е. рассмотрим функционал

$$\widetilde{I}_0=0.5\Bigg[\hat{\alpha}\left(\int\limits_{-\alpha}^0 V_{0,+}^{0}(T,\tau)\,\upsilon_0(\tau)\,d\tau+\left(U_{0,+}^{0}(T)+\int\limits_0^T U_{0,+}^{0}(T,\mu)\,d\mu\right)u_0(0)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^T\int\limits_\tau^T U_{0,+}^{0}(T,\mu)d\mu\,\xi_0(\tau)\,d\tau\right)^2+\hat{\beta}_1\int\limits_{-\alpha}^0\left(\int\limits_{-\alpha}^0 V_{0,-}^{0}(t,\tau)\,\upsilon_0(\tau)\,d\tau+U_{0,-}^{0}(t)\,u_0(0)+\right.$$

$$+\int_{-\alpha}^{t} V_{0,-}^{0}(t,\tau)\upsilon_0(\tau)\,d\tau\Bigg)^2 dt+\hat{\beta}_2\int_0^T\Bigg(\int_{-\alpha}^{0} V_{0,+}^{0}(t,\tau)\,\upsilon_0(\tau)\,d\tau+\Bigg(U_{0,+}^{0}(t)+$$

$$+\int_0^t U_{0,+}^{0}(t,\mu)\,d\mu\Bigg)u_0(0)+\int_0^t\int_\tau^t U_{0,+}^{0}(t,\mu)d\mu\,\xi_0(\tau)\,d\tau\Bigg)^2 dt\Bigg].$$

Ясно, что $\widetilde{I}_0 \ge 0$. Теперь значение оператора $A_0\theta_0(\cdot)$ скалярно умножим на $\theta_0(t)$, т.е. рассмотрим квадратичную форму

$$\Pi_0=\langle A_0\,\theta_0(\cdot),\theta_0(\cdot)\rangle_3=\int_{-\alpha}^{0}\int_{-\alpha}^{0}K_{0,1}^{(1)}(t,\tau)\,\upsilon_0(\tau)\,d\tau\upsilon_0(t)\,dt+\int_{-\alpha}^{0}K_{0,2}^{(1)}(t)\,\upsilon_0(t)\,dt\times$$

$$\times u_0(0)+\int_{-\alpha}^{0}\int_0^T K_{0,3}^{(1)}(t,\tau)\,\xi_0(\tau)\,d\tau\,\upsilon_0(t)\,dt+\int_{-\alpha}^{0}K_{0,1}^{(2)}(\tau)\,\upsilon_0(\tau)\,d\tau\,u_0(0)+$$

$$+K_{0,2}^{(2)}\,u_0^2(0)+\int_0^T K_{0,3}^{(2)}(\tau)\,\xi_0(\tau)\,d\tau\,u_0(0)+\int_0^T\int_{-\alpha}^{0}K_{0,1}^{(3)}(t,\tau)\,\upsilon_0(\tau)\,d\tau\,\xi_0(t)\,dt+$$

$$+\int_0^T K_{0,2}^{(3)}(t)\,\xi_0(t)\,dt\,u_0(0)+\int_0^T\int_0^T K_{0,3}^{(3)}(t,\tau)\,\xi_0(\tau)\,d\tau\,\xi_0(t)\,dt\,.$$

Подставляя в квадратичную форму Π_0 явный вид ядер $K_{0,i}^{(j)},\ i,j=\overline{1,3}$, получаем равенство $\Pi_0=2\widetilde{I}_0$. Отсюда следует положительная определенность оператора A_0 и однозначная разрешимость системы (11) в пространстве $L_2(-\alpha,0)\times R^1\times L_2(0,T)$. Из первого уравнения этой системы находим $|\upsilon_0(t_1)-\upsilon_0(t_2)|<C\,|t_1-t_2|$ для любых $t_1,t_2\in[-\alpha,0]$.

Условия оптимальности для задачи 2. В силу строгой выпуклости функционала (7)–(10) эта задача имеет единственное решение из пространства $(C(-\alpha,0)\times R^1\times L_2(0,T))^2$, которое характеризуется необходимыми и достаточными условиями оптимальности [4]

$$\hat{\gamma}_1\,\upsilon_i(t)+\sum_{j=2k-1}^{2k}\Bigg(\int_{-\alpha}^{0}K_{j,1}^{(1,i)}(t,\tau)\upsilon_j(\tau)\,d\tau+K_{j,2}^{(1,i)}(t)\,u_j(0)+$$

$$+\int_0^T K_{j,3}^{(1,i)}(t,\tau)\xi_j(\tau)\,d\tau\Bigg)=\sum_{j=2k-1}^{2k}(M_{j,1}^{(1,i)}(t)\,\varphi_j+M_{j,2}^{(1,i)}(t)\psi_j),\ t\in[-\alpha,0),$$

$$\hat{\gamma}_2\,u_i(0)+\sum_{j=2k-1}^{2k}\Bigg(\int_{-\alpha}^{0}K_{j,1}^{(2,i)}(\tau)\upsilon_j(\tau)\,d\tau+K_{j,2}^{(2,i)}\,u_j(0)+\int_0^T K_{j,3}^{(2,i)}(\tau)\,\xi_j(\tau)\,d\tau\Bigg)=$$

$$=\sum_{j=2k-1}^{2k}(M_{j,1}^{(2,i)}\varphi_j+M_{j,2}^{(2,i)}\,\psi_j),$$

$$\hat{\gamma}_2\,\xi_i(t)+\sum_{j=2k-1}^{2k}\Bigg(\int_{-\alpha}^{0}K_{j,1}^{(3,i)}(t,\tau)\upsilon_j(\tau)\,d\tau+K_{j,2}^{(3,i)}(t)\,u_j(0)+$$

$$+\int_0^T K_{j,3}^{(3,i)}(t,\tau)\xi_j(\tau)\,d\tau\Bigg) = \sum_{j=2k-1}^{2k} (M_{j,1}^{(3,i)}(t)\,\varphi_j + M_{j,2}^{(3,i)}(t)\psi_j),$$

$$t\in(0,T],\ i=\overline{2k-1,2k}\,, \tag{12}$$

ядра для которых получены аналогично задаче 1 из решений краевых задач (8)–(10) из [3].

Установим однозначную разрешимость системы (12), определив оператор

$$A_k\,\theta_k(\cdot) = \Gamma_{6\times 6}\theta_k(t) + A_k\,\theta_k(\cdot),$$

где $(\theta_k(t))' = (\upsilon_{2k-1}(t), \upsilon_{2k}(t), u_{2k-1}(0), u_{2k}(0), \xi_{2k-1}(t), \xi_{2k}(t)) \in (L_2(-\alpha,0)\times$ $\times R^1 \times L_2(0,T))^2$, $\Gamma_{6\times 6} = \mathrm{diag}\,\{\hat\gamma_1, \hat\gamma_1, \hat\gamma_2, \hat\gamma_2, \hat\gamma_2, \hat\gamma_2\}$, оператор A_k определяется оставшимися членами левых частей системы уравнений (12).

Очевидно, что оператор A_k действует из пространства $(L_2(-\alpha,0)\times R^1 \times L_2(0,T))^2$ в пространство $(L_2(-\alpha,0)\times R^1\times L_2(0,T))^2$, является линейным и непрерывным. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Система (12) имеет единственное решение в пространстве $(C(-\alpha,0)\times R^1\times L_2(0,T))^2$.

Доказательство совпадает с доказательством леммы 1, если в последнем заменить систему (11) системой (12), а пространство $L_2(-\alpha,0)\times R^1\times L_2(0,T)$ заменить пространством $(L_2(-\alpha,0)\times R^1\times L_2(0,T))^2$ со скалярным произведением

$$\langle\theta_k, \tilde\theta_k\rangle_6 = \sum_{i=2k-1}^{2k}\left(\int_{-\alpha}^0 \upsilon_i(t)\tilde\upsilon_i(t)\,dt + u_i(0)\,\tilde u_i(0) + \int_0^T \xi_i(t)\,\tilde\xi_i(t)\,dt\right),$$

где

$$(\theta_k(t))' = (\upsilon_{2k-1}(t), \upsilon_{2k}(t), u_{2k-1}(0), u_{2k}(0), \xi_{2k-1}(t), \xi_{2k}(t)), (\tilde\theta_k(t))' =$$
$$= (\tilde\upsilon_{2k-1}(t), \tilde\upsilon_{2k}(t), \tilde u_{2k-1}(0), \tilde u_{2k}(0), \tilde\xi_{2k-1}(t), \tilde\xi_{2k}(t)).$$

ОБОСНОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для обоснованности полученных выше условий оптимальности нужно, чтобы управления, найденные из них, удовлетворяли условиям из [3]. Для их проверки установим следующие оценки.

Вначале найдем оценки для составляющих системы уравнений (12):

$$\|K_{2k-1,1}^{(1,2k-1)}\|_{C(-\alpha,0)\times C(-\alpha,0)} \le \frac{C_1\,\hat\alpha}{\lambda_k^2\ exp(2\lambda_k^2\ T)} + \frac{C_2\hat\beta_1}{\lambda_k^2} + \frac{C_3\hat\beta_2}{\lambda_k^4},$$

$$\|K_{2k,1}^{(1,2k-1)}\|_{C(-\alpha,0)\times C(-\alpha,0)} = \|K_{2k-1,1}^{(1,2k)}\|_{C(-\alpha,0)\times C(-\alpha,0)} \le$$

$$\le \frac{C_1\,\hat\alpha}{\lambda_k^3\,\exp(2\lambda_k^2\ T)} + \frac{C_2\hat\beta_1}{\lambda_k^2} + \frac{C_3\hat\beta_2}{\lambda_k^5},$$

$$\|K_{2k-1,2}^{(1,2k-1)}\|_{C(-\alpha,0)} = \|K_{2k-1,1}^{(2,2k-1)}\|_{C(-\alpha,0)} \le \frac{C_1\hat\alpha}{\lambda_k^2\ \exp(\lambda_k^2\ T)} + \frac{C_2\,\hat\beta_1}{\lambda_k^3} + \frac{C_3\hat\beta_2}{\lambda_k^4},$$

$$\|K_{2k,2}^{(1,2k-1)}\|_{C(-\alpha,0)} = \|K_{2k-1,1}^{(2,2k)}\|_{C(-\alpha,0)} \le \frac{C_1\hat\alpha}{\lambda_k^3\ \exp(\lambda_k^2 T)} + \frac{C_2\,\hat\beta_1}{\lambda_k^3} + \frac{C_3\,\hat\beta_2}{\lambda_k^5},$$

$$\| K_{2k-1,3}^{(1,2k-1)} \|_{C(-\alpha,0)\times C(0,T)} = \| K_{2k-1,1}^{(3,2k-1)} \|_{C(-\alpha,0)\times C(0,T)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^2 \exp(\lambda_k^2 T)} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^4},$$

$$\| K_{2k,3}^{(1,2k-1)} \|_{C(-\alpha,0)\times C(0,T)} = \| K_{2k-1,1}^{(3,2k)} \|_{C(-\alpha,0)\times C(0,T)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^3 \exp(\lambda_k^2 T)} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^5},$$

$$\| M_{2k-1,1}^{(1,2k-1)} \|_{C(-\alpha,0)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k \exp(2\lambda_k^2 T)} + \frac{C_2 \hat{\beta}_1}{\lambda_k} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^3},$$

$$\| M_{2k,1}^{(1,2k-1)} \|_{C(-\alpha,0)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^2 \exp(2\lambda_k^2 T)} + \frac{C_2 \hat{\beta}_1}{\lambda_k} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^4},$$

$$\| M_{2k-1,2}^{(1,2k-1)} \|_{C(-\alpha,0)}, \ \| M_{2k,2}^{(1,2k-1)} \|_{C(-\alpha,0)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k \exp(\lambda_k^2 T)};$$

$$\| K_{2k,1}^{(1,2k)} \|_{C(-\alpha,0)\times C(-\alpha,0)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^4 \exp(2\lambda_k^2 T)} + \frac{C_2 \hat{\beta}_1}{\lambda_k^2} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^6},$$

$$\| K_{2k-1,2}^{(1,2k)} \|_{C(-\alpha,0)} = \| K_{2k,1}^{(2,2k-1)} \|_{C(-\alpha,0)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^3 \exp(\lambda_k^2 T)} + \frac{C_2 \hat{\beta}_1}{\lambda_k^3} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^5},$$

$$\| K_{2k,2}^{(1,2k)} \|_{C(-\alpha,0)} = \| K_{2k,1}^{(2,2k)} \|_{C(-\alpha,0)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^4 \exp(\lambda_k^2 T)} + \frac{C_2 \hat{\beta}_1}{\lambda_k^3} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^6},$$

$$\| K_{2k-1,3}^{(1,2k)} \|_{C(-\alpha,0)\times C(0,T)} = \| K_{2k,1}^{(3,2k-1)} \|_{C(-\alpha,0)\times C(0,T)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^3 \exp(\lambda_k^2 T)} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^5},$$

$$\| K_{2k,3}^{(1,2k)} \|_{C(-\alpha,0)\times C(0,T)} = \| K_{2k,1}^{(3,2k)} \|_{C(-\alpha,0)\times C(0,T)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^4 \exp(\lambda_k^2 T)} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^6},$$

$$\| M_{2k-1,1}^{(1,2k)} \|_{C(-\alpha,0)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^2 \exp(2\lambda_k^2 T)} + \frac{C_2 \hat{\beta}_1}{\lambda_k} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^4},$$

$$\| M_{2k,1}^{(1,2k)} \|_{C(-\alpha,0)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^3 \exp(2\lambda_k^2 T)} + \frac{C_2 \hat{\beta}_1}{\lambda_k} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^5},$$

$$\| M_{2k,2}^{(1,2k)} \|_{C(-\alpha,0)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^2 \exp(\lambda_k^2 T)};$$

$$| K_{2k-1,2}^{(2,2k-1)} | \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^2} + \frac{C_2 \hat{\beta}_1}{\lambda_k^4} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^2},$$

$$| K_{2k,2}^{(2,2k-1)} | = | K_{2k-1,2}^{(2,2k)} | \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^3} + \frac{C_2 \hat{\beta}_1}{\lambda_k^4} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^5},$$

$$\| K_{2k-1,3}^{(2,2k-1)} \|_{C(0,T)} = \| K_{2k-1,2}^{(3,2k-1)} \|_{C(0,T)} \le \frac{C_1\hat{\alpha}}{\lambda_k^2} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^2},$$

$$\| K^{(2,2k-1)}_{2k,3} \|_{C(0,T)} = \| K^{(3,2k)}_{2k-1,1} \|_{C(0,T)} \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^3} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^3},$$

$$| M^{(2,2k-1)}_{2k-1,1} | \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k \, exp(\lambda_k^2 \, T)} + \frac{C_2 \, \hat{\beta}_1}{\lambda_k^2} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^3},$$

$$| M^{(2,2k-1)}_{2k,1} | \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^2 \, exp(\lambda_k^2 \, T)} + \frac{C_2 \, \hat{\beta}_1}{\lambda_k^2} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^4},$$

$$| M^{(2,2k-1)}_{2k-1,2} | \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^2}, \quad | M^{(2,2k-1)}_{2k,2} | \le \frac{C_1 \, \hat{\alpha}}{\lambda_k};$$

$$| K^{(2,2k)}_{2k,2} | \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^4} + \frac{C_2 \hat{\beta}_1}{\lambda_k^4} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^4},$$

$$\| K^{(2,2k)}_{2k-1,3} \|_{C(0,T)} = \| K^{(3,2k-1)}_{2k,2} \|_{C(0,T)} \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^3} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^3},$$

$$\| K^{(2,2k)}_{2k,3} \|_{C(0,T)} = \| K^{(3,2k)}_{2k,2} \|_{C(0,T)} \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^4} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^4},$$

$$| M^{(2,2k)}_{2k-1,1} | \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^2 \, \exp(\lambda_k^2 \, T)} + \frac{C_2 \, \hat{\beta}_1}{\lambda_k^2} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^4},$$

$$| M^{(2,2k)}_{2k,1} | \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^3 \, \exp(\lambda_k^2 \, T)} + \frac{C_2 \, \hat{\beta}_1}{\lambda_k^2} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^5}, \quad | M^{(2,2k)}_{2k,2} | \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^2};$$

$$\| K^{(3,2k-1)}_{2k-1,3} \|_{C(0,T) \times C(0,T)} \le \frac{C_1 \, \hat{\alpha}}{\lambda_k^2} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^2},$$

$$\| K^{(3,2k-1)}_{2k,3} \|_{C(0,T) \times C(0,T)} = \| K^{(3,2k)}_{2k-1,3} \|_{C(0,T) \times C(0,T)} \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^3} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^3},$$

$$\| M^{(3,2k-1)}_{2k-1,1} \|_{C(0,T)} \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k \, \exp(\lambda_k^2 \, T)} + \frac{C_3 \, \hat{\beta}_2}{\lambda_k^3},$$

$$\| M^{(3,2k-1)}_{2k,1} \|_{C(0,T)} \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^2 \, \exp(\lambda_k^2 \, T)} + \frac{C_3 \, \hat{\beta}_2}{\lambda_k^4},$$

$$\| M^{(3,2k-1)}_{2k-1,2} \|_{C(0,T)} \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^2}, \quad \| M^{(3,2k-1)}_{2k,2} \|_{C(0,T)} \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k};$$

$$\| K^{(3,2k)}_{2k,3} \|_{C(0,T) \times C(0,T)} \le \frac{C_1 \, \hat{\alpha}}{\lambda_k^4} + \frac{C_3 \hat{\beta}_2}{\lambda_k^4},$$

$$\| M^{(3,2k)}_{2k-1,1} \|_{C(0,T)} \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^2 \, \exp(\lambda_k^2 \, T)} + \frac{C_3 \, \hat{\beta}_2}{\lambda_k^4},$$

$$\| M^{(3,2k)}_{2k,1} \|_{C(0,T)} \le \frac{C_1 \hat{\alpha}}{\lambda_k^3 \, \exp(\lambda_k^2 \, T)} + \frac{C_3 \, \hat{\beta}_2}{\lambda_k^5}, \quad \| M^{(3,2k)}_{2k,2} \|_{C(0,T)} \le \frac{C_1 \, \hat{\alpha}}{\lambda_k^2}. \quad (13)$$

Из положительной определенности оператора A_k и оценок (13) получим

$$\|\theta_k\|_6 \le C \sum_{j=2k-1}^{2k} \left[\sum_{i=2k-1}^{2k} (\| M_{j,1}^{(1,i)}\|_{C(-\alpha,0)} + | M_{j,1}^{(2,i)}| + \| M_{j,1}^{(3,i)}\|_{C(0,T)})|\varphi_j| + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2k-1}^{2k} (\| M_{j,2}^{(1,i)}\|_{C(-\alpha,0)} + | M_{j,2}^{(2,i)}| + \| M_{j,2}^{(3,i)}\|_{C(0,T)})|\psi_j|) \right] \le$$

$$\le C \left[\left(\frac{\hat{\alpha}}{\lambda_k \exp\lambda_k^2 T} + \frac{\hat{\beta}_1}{\lambda_k} + \frac{\hat{\beta}_2}{\lambda_k^3} \right) |\varphi_{2k-1}| + \left(\frac{\hat{\alpha}}{\lambda_k^2 \exp\lambda_k^2 T} + \frac{\hat{\beta}_1}{\lambda_k} + \frac{\hat{\beta}_2}{\lambda_k^4} \right) |\varphi_{2k}| + \right.$$

$$\left. + \hat{\alpha} \left(\frac{|\psi_{2k-1}|}{\lambda_k^2} + \frac{|\psi_{2k}|}{\lambda_k} \right) \right]. \tag{14}$$

При получении оценки (14) $\forall k > 0$ не учитывали слагаемые $\langle \theta_k, A_k \theta_k \rangle_6 \ge 0$ в случае ограниченности компонентов вектора $\theta_k(\cdot)$. Такая операция корректна при сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \langle \theta_k, A_k \theta_k \rangle_6$.

Действительно, из оценок (13) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \theta_k, A_k \theta_k \rangle_6 \le C \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j,i=2k-1}^{2k} (\| K_{j,1}^{(1,i)}\|_{C(-\alpha,0)\times C(-\alpha,0)} + \| K_{j,2}^{(1,i)}\|_{C(-\alpha,0)} +$$

$$+ \| K_{j,3}^{(1,i)}\|_{C(-\alpha,0)\times C(0,T)} + \| K_{j,1}^{(2,i)}\|_{C(-\alpha,0)} + | K_{j,2}^{(2,i)}| + \| K_{j,3}^{(2,i)}\|_{C(0,T)} +$$

$$+ \| K_{j,1}^{(3,i)}\|_{C(0,T)\times C(-\alpha,0)} + \| K_{j,2}^{(3,i)}\|_{C(0,T)} + \| K_{j,3}^{(3,i)}\|_{C(0,T)\times C(0,T)}) \le$$

$$\le C(\hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} < \infty .$$

Из первых двух уравнений системы (12) находим

$$\|\upsilon_i\|_{C(-\alpha,0)} \le C \sum_{j=2k-1}^{2k} (\| K_{j,1}^{(1,i)}\|_{C(-\alpha,0)\times C(-\alpha,0)} + \| K_{j,2}^{(1,i)}\|_{C(-\alpha,0)} +$$

$$+ \| K_{j,3}^{(1,i)}\|_{C(-\alpha,0)\times C(0,T)})\|\theta_k\|_6 + \sum_{j=2k-1}^{2k} (\| M_{j,1}^{(1,i)}\|_{C(-\alpha,0)} |\varphi_j| +$$

$$+ \| M_{j,2}^{(1,i)}\|_{C(-\alpha,0)} |\psi_j|), \quad i = \overline{2k-1, 2k} .$$

Отсюда, из оценок (14) и (13) получим неравенства

$$\|\upsilon_i\|_{C(-\alpha,0)} \le C \left[\left(\frac{\hat{\alpha}}{\lambda_k \exp(\lambda_k^2 T)} + \frac{\hat{\beta}_1}{\lambda_k} + \frac{\hat{\beta}_2}{\lambda_k^3} \right) |\varphi_{2k-1}| + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\hat{\alpha}}{\lambda_k^2 \exp(\lambda_k^2 T)} + \frac{\hat{\beta}_1}{\lambda_k} + \frac{\hat{\beta}_2}{\lambda_k^4} \right) |\varphi_{2k}| + \hat{\alpha} \left(\frac{|\psi_{2k-1}|}{\lambda_k^4} + \frac{|\psi_{2k}|}{\lambda_k^3} \right) \right], \quad i = \overline{2k-1, 2k}.$$

Компоненты $|u_i(0)|$, $\|\xi_i\|_{L_2(0,T)}$, $i=\overline{2k-1, 2k}$, вектора $\theta_k(.)$ удовлетворяют неравенству (14). Поскольку $\|u_i\|_{C(0,T)} \le |u_i(0)| + T\|\xi_i\|_{L_2(0,T)}$, $i=\overline{2k-1, 2k}$, для $\|u_i\|_{C(0,T)}$, $i=\overline{2k-1, 2k}$, справедлива оценка (14). Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi(x), \psi(x)$ в задаче оптимального управления (1)–(3), (4) удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \, (|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|) < \infty \,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|\psi_{2k-1}|}{\lambda_k} + |\psi_{2k}| \right) < \infty \,.$$

Тогда непрерывные функции

$$\upsilon(x,t) = \upsilon_0(t)\, X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\upsilon_{2k-1}(t)\, X_{2k-1}(x) + \upsilon_{2k}(t)\, X_{2k}(x)) \,,$$

$$u(x,t) = u(x,0) + \int_0^t \xi(x,\tau)\, d\tau \,,$$

где

$$u(x,0) = u_0(0)\, X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{2k-1}(0)\, X_{2k-1}(x) + u_{2k}(0)\, X_{2k}(x)) \,,$$

$$\xi(x,t) = \xi_0(t)\, X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_{2k-1}(t)\, X_{2k-1}(x) + \xi_{2k}(t)\, X_{2k}(x)) \,,$$

коэффициенты указанных представлений определяются как решения систем уравнений (11), (12) соответственно, являются оптимальными управлениями в задаче (1)–(3), (4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены условия для нахождения распределенного оптимального управления для параболо-гиперболического уравнения с нелокальными граничными условиями и общим квадратичным критерием качества в специальной норме. Для построенного управления доказаны леммы о единственности и теорема о существовании найденного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ashyralyev A. and Yurtsever A. On a nonlocal boundary value problem for semilinear hyperbolic-parabolic equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 2001. — **47**, N 5. — P. 3585–3592.
2. Ступялис Л. Об одной краевой задаче для стационарной системы уравнений магнитной гидродинамики. Краевые задачи математической физики // Тр. МИАН СССР. — 1980. — **147**, № 10. — С. 169–193.
3. Капустян В.О., Пишнограєв І.О. Умови існування і єдиності розв'язку параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2012. — № 4. — С. 72–86.
4. Егоров А.И. Оптимальное управление линейными системами. — К.: Наук. думка, 1988. — 278 с.

Поступила 20.05.2014