УДК 517.91: 518.1

Я.Е. РОММ

КОМПЬЮТЕРНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НА ОСНОВЕ РЕКУРРЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Признаки устойчивости по Ляпунову решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений представлены в разностной, аддитивной и интегральной формах, содержат необходимые и достаточные условия, при этом не преобразуют функций правой части системы. Признаки ориентированы на компьютерную реализацию, частично — на аналитическое исследование. На основе сравнения подынтегральных функций устойчивость некоторых систем нелинейных уравнений анализируется без априорных решений. Программно-реализуемые признаки даны для систем общего вида, приведены примеры, результаты программных и численных экспериментов.

Ключевые слова: анализ устойчивости по Ляпунову, приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений, рекуррентные преобразования разностных решений, численное моделирование устойчивости, признаки устойчивости линейных и нелинейных систем, компьютерный анализ устойчивости.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ устойчивости по Ляпунову (ниже устойчивости) традиционно строится на основе качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Однако асимптотическое поведение решений можно численно моделировать с помощью разностных решений ОДУ. В частности, моделирование на основе их рекуррентных преобразований рассматривается в [1–3]. Такие преобразования приводят к циклическим приближениям бесконечных произведений; большое число шагов алгоритма реализуется с помощью компьютера. Ниже путем логарифмирования и предельных переходов произведения преобразуются в бесконечные суммы и интегралы, которые допускают как численное моделирование, так и аналитические оценки устойчивости. Для некоторых нелинейных систем их удается выполнить без априорных решений. Возможность численного моделирования обусловлена тем, что в ограничениях подхода и при условии устойчивости разностные методы накапливают погрешность не более чем линейно по длине промежутка решения [2–4] (доказательства даны в [4–6]).

Для систем различного вида требуется представить условия устойчивости, основанные на рассматриваемых преобразованиях, аналитические примеры и результаты численного моделирования.

ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Рассматривается задача Коши для системы

$$\frac{dY}{dt} = F(t,Y), \;\; Y(t_0)=Y_0, \tag{1}$$

где $F(t,Y)=(f_1(t,Y), f_2(t,Y), \ldots, f_n(t,Y))$, $Y=(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$, $Y_0 = (y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})$. Предполагается, что существует $\delta_0>0$, при котором все условия существования и единственности выполнены для невозмущенного решения на полупрямой $[t_0,\infty)$ и для каждого его возмущенного решения $Y=\widetilde{Y}(t)$, $Y(t_0)=\widetilde{Y}_0$, с начальным вектором из окрестности $||\widetilde{Y}_0-Y_0|| \le \delta_0$. Здесь и ниже рассматриваются канонические согласованные нормы матрицы и вектора. Предполагается также, что в области R_0: $\{t_0 \le t < \infty;\ Y(t)\ \forall \widetilde{Y}(t)$: $\|\widetilde{Y}_0 - Y_0\| \le \delta_0\}$ функция $F(t, Y)$ всюду определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по независимой переменной (в точке t_0 — справа). Компоненты этой функции удовлетворяют неравенству

$$|f_k(t, Y) - f_k(t, \widetilde{Y})| \le L|y_k - \widetilde{y}_k|,\ \ L = \text{const},\ \forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n}. \qquad (2)$$

В данных предположениях исследуется устойчивость невозмущенного решения задачи (1). Определение устойчивости [7] упрощено в принятых ограничениях: решение $Y = Y(t)$ устойчиво, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется Δ, $0 < \Delta \le \delta_0$, такое, что из неравенства $\|\widetilde{Y}_0 - Y_0\| \le \Delta$ вытекает $\|\widetilde{Y}(t) - Y(t)\| \le \varepsilon\ \forall t \in [t_0, \infty)$. Решение асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и найдется Δ_0, $0 < \Delta_0 \le \Delta$, такое, что неравенство $\|\widetilde{Y}_0 - Y_0\| \le \Delta_0$ обусловливает $\widetilde{Y}(t) - Y(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Метод Эйлера решения задачи (1)

$$Y_{i+1} = Y_i + F(t_i, Y_i)h, \qquad (3)$$

включая запись с остаточным членом, всюду ниже рассматривается в следующем предположении: значение произвольно выбранной независимой переменной $t \in [t_0, \infty)$ остается для (3) фиксированным, при этом индекс i неограниченно возрастает с убывающим на отрезке $[t_0, t]$ равномерным шагом:

$$t = \text{const},\ t = t_{i+1},\ h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i+1},\ i = 0, 1, \ldots,\ t_{k+1} = t_k + h,\ 0 \le k \le i. \qquad (4)$$

Изменение независимой переменной t понимается как изменение правой границы отрезка $[t_0, t]$, на котором выполняются соотношения (4).

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ФОРМЕ

Метод Эйлера рассматривается в виде

$$Y_{i+1} = Y_i + F(t_i, Y_i)h + Q_i,\ \ Q_i = (q_{1i}, q_{2i}, \ldots, q_{ni}), \qquad (5)$$

где i, h даны в (4), q_{ki} — остаточный член формулы Тейлора для k-й компоненты приближения: $q_{ki} = \frac{1}{2} f_k'(\xi_{ki}, Y(\xi_{ki}))h^2$, $t_i < \xi_{ki} < t_{i+1}$, $k \in \overline{1, n}$. Для возмущенного решения аналоги (5) обозначаются волной: $\widetilde{Y}_{i+1} = \widetilde{Y}_i + F(t_i, \widetilde{Y}_i)h + \widetilde{Q}_i$, $\widetilde{Q}_i = (\widetilde{q}_{1i}, \widetilde{q}_{2i}, \ldots, \widetilde{q}_{ni})$, $\widetilde{q}_{ki} = \frac{1}{2} f_k'(\widetilde{\xi}_{ki}, \widetilde{Y}(\widetilde{\xi}_{ki}))h^2$, $t_i < \widetilde{\xi}_{ki} < t_{i+1}$. Предполагается, если не оговорено иное, что

$$\widetilde{y}_k(t) - y_k(t) \ne 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n}. \qquad (6)$$

Рассматриваются следующие преобразования возмущения:

$$\widetilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = \widetilde{y}_{ki} - y_{ki} + \frac{f_k(t_i, \widetilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{\widetilde{y}_{ki} - y_{ki}}(\widetilde{y}_{ki} - y_{ki})h + w_{ki}$$

или

$$\widetilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = (1 + D_i^{(k)}h)(\widetilde{y}_{ki} - y_{ki}) + w_{ki},\ \ w_{ki} = \widetilde{q}_{ki} - q_{ki}, \qquad (7)$$

где

$$D_i^{(k)} = \frac{f_k(t_i, \widetilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{\widetilde{y}_{ki} - y_{ki}}. \qquad (8)$$

С учетом (2) при ограничении (6) выполняется неравенство

$$|D_{i-\ell}^{(k)}| \le L, \; L=\text{const}, \; \forall\, i=0,1,\, \ldots, \; \forall \ell \in \overline{0,i} \wedge \forall k \in \overline{1,n}. \qquad (9)$$

Из (7), (8) следует точное значение разности между компонентами возмущенного и невозмущенного решений:

$$\widetilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = \prod_{\ell=0}^{i} (1+ D_{i-\ell}^{(k)} h)(\widetilde{y}_{k0} - y_{k0}) + R_{0i}^{(k)}, \qquad (10)$$

где $R_{0i}^{(k)} = \sum\limits_{r=0}^{i-1} \prod\limits_{\ell=0}^{r} (1+D_{i-\ell}^{(k)} h) w_{k(i-r-1)} + w_{ki}$, h следует из (4), w_{ki} — из (7), $k \in \overline{1,n}$.

Для дальнейшего изложения необходимы следующие утверждения из [2, 3].

Лемма 1. В рассматриваемых предположениях для всех решений и их возмущений из R_0 выполнено равенство $\lim\limits_{i\to\infty} R_{0i}^{(k)}=0 \;\; \forall\, t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1,n}$.

Доказательство. В силу непрерывной дифференцируемости $F(t,Y)$ по $t \in [t_0, \infty)$ для $\forall \widetilde{t} \in [t_0, t]$ в R_0 $\exists C_0 = C_0(t): \|F_t'(\widetilde{t}, Y)\| \le C_0 \ge \|F_t'(\widetilde{t}, \widetilde{Y})\|$. Поэтому $|w_{kr}| \le C_0 h^2$, $r=0,1,\ldots,i$; $i=1,2,\ldots$; $k=1,2,\ldots,n$. Отсюда с учетом (9) вытекает [4, 5], что $|R_{0i}^{(k)}| \le \dfrac{C_0}{L}(e^{L(t-t_0)}-1)\dfrac{t-t_0}{i+1}$. Следовательно, $R_{0i}^{(k)} \to 0$ при $i \to \infty \;\; \forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1,n}$.

Следствие 1. При условиях леммы 1 на основании (10) выполняется равенство

$$\widetilde{y}_k(t) - y_k(t) = \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (1+D_{i-\ell}^{(k)} h)(\widetilde{y}_{k0} - y_{k0}) \quad \forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1,n}. \quad (11)$$

Теорема 1. В условиях леммы для устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно существование Δ_1, $0 < \Delta_1 \le \delta_0$, такого, что для всех решений $Y=\widetilde{Y}(t)$, $Y(t_0)=\widetilde{Y}_0$, при ограничении $\|\widetilde{Y}_0 - Y_0\| \le \Delta_1$ выполняется неравенство

$$\left| \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (1+D_{i-\ell}^{(k)} h) \right| \le C^{(1)}, \; C^{(1)} = \text{const}, \; \forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1,n}. \quad (12)$$

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее утверждение и существовало $\Delta_2 \le \Delta_1$ такое, что из неравенства $\|\widetilde{Y}_0 - Y_0\| \le \Delta_2$ следует соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \left| \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (1+D_{i-\ell}^{(k)} h) \right| = 0 \quad \forall k \in \overline{1,n}. \qquad (13)$$

Частичное произведение $\prod\limits_{\ell=0}^{i} (1+D_{i-\ell}^{(k)} h)$ имеет ту особенность, что при изменении числа сомножителей i в нем меняются одновременно не только новые, но и все предыдущие сомножители: изменение i на отрезке $[t_0, t]$ при t из (4) обусловливает обратно пропорциональное изменение h в каждом сомножителе.

Можно показать, что выполнение условий леммы 1 обеспечивает равномерную сходимость метода Эйлера на произвольном отрезке полуоси (доказательство аналогично доказательству леммы 1 при нулевом начальном возмущении [6]). Как следствие, утверждения теоремы 1 выполняются в условиях равномерной сходимости этого метода.

В (11) можно избежать пошагового деления при вычислении (8) на основе эквивалентного равенства

$$\frac{\tilde{y}_k(t)-y_k(t)}{\tilde{y}_{k0}-y_{k0}}=\lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}(1+D_{i-\ell}^{(k)}h)\quad \forall t\in[t_0,\infty)\wedge\forall k\in\overline{1,n}. \tag{14}$$

Отсюда и теоремы 1 вытекает утверждение.

Следствие 2 [3]. При $\tilde{y}_{k0}\neq y_{k0}$ формулировка и утверждение теоремы 1 дословно сохраняются при замене соотношения (12) на соотношение вида

$$\left|\frac{\tilde{y}_k(t)-y_k(t)}{\tilde{y}_{k0}-y_{k0}}\right|\le C^{(1)},\ C^{(1)}=\text{const},\ \forall t\in[t_0,\infty)\wedge\forall k\in\overline{1,n}, \tag{15}$$

и (13) — на соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\tilde{y}_k(t)-y_k(t)}{\tilde{y}_{k0}-y_{k0}}\right|=0\ \forall k\in\overline{1,n}. \tag{16}$$

Замечание 1. Неравенство (15) выражает равномерную ограниченность дроби в некоторой окрестности возмущения начальных значений на полуоси, а дробь — отношение возмущения решения именно к вызвавшему его возмущению начальных значений и интерпретируется как единая функция, для которой существует Δ_1 такое, что в границах $|\tilde{y}_{k0}-y_{k0}|\le\Delta_1$ на всей полуоси выполняется соотношение $\left|\frac{\tilde{y}_k(t)-y_k(t)}{\tilde{y}_{k0}-y_{k0}}\right|=O(1)$.

Замечание 2. В условии достаточности следствия 2 соотношение (15) можно заменить неравенством $|\tilde{y}_k(t)-y_k(t)|\le C^{(1)}|\tilde{y}_{k0}-y_{k0}|$, которое сохраняется без требования (6). В этом случае достаточным является также условие асимптотической устойчивости (16). Однако необходимость этих условий не имеет места: (15) выводится из (11), что исключает деление на нуль в (8).

Следствие 3. Если система (1) имеет точку покоя, то в рассматриваемых условиях для ее устойчивости необходимо и достаточно существование Δ_1, $0<\Delta_1\le\delta_0$, такого, чтобы для всех решений $Y=\tilde{Y}(t), Y(t_0)=\tilde{Y}_0$, при ограничении $\|\tilde{Y}_0\|\le\Delta_1$ и $\tilde{y}_{k0}\neq 0$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{\tilde{y}_k(t)}{\tilde{y}_{k0}}\right|\le C^{(1)},\ C^{(1)}=\text{const},\ \forall t\in[t_0,\infty)\wedge\forall k\in\overline{1,n}, \tag{17}$$

точка покоя асимптотически устойчива, если выполнено предыдущее утверждение, и, кроме того, существует $\Delta_2\le\Delta_1$ такое, что из неравенства $\|\tilde{Y}_0\|\le\Delta_2$ вытекает

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\tilde{y}_k(t)}{\tilde{y}_{k0}}\right|=0\ \ \forall k\in\overline{1,n}. \tag{18}$$

Как известно [8], к анализу устойчивости точки покоя сводится общий случай анализа устойчивости решения задачи (1).

Компьютерная проверка (15)–(18) совмещается с приближенным решением при возмущенных и невозмущенных начальных значениях и делением разности приближений на разность начальных значений. Соответствующие программные примеры даны ниже.

Ограничимся случаем однородной линейной системы

$$\frac{dY}{dt} = A(t)\,Y, \quad Y(t_0) = Y_0, \tag{19}$$

где матрица $A(t)$, $n \times n$, состоит из функций $a_{ij} = a_{ij}(t)$, которые определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы (в точке t_0 — справа) на полуоси $t \in [t_0, \infty)$ $\forall\, i, j \in \overline{1, n}$.

Следствие 4. Следствие 3 дает необходимые и достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости всей системы (19).

Доказательство. Все решения линейной системы одновременно [8] устойчивы или неустойчивы, поэтому достаточно анализировать точку покоя. Следствие 3 дает необходимые и достаточные условия ее устойчивости. Все решения линейной системы асимптотически устойчивы тогда и только тогда, когда асимптотически устойчива точка покоя [8]. Условием этого согласно следствию 3 является выражение (18) при выполнении (17).

Следствие 5. Для устойчивости системы (19) необходимо и достаточно выполнение (17) для какого-либо одного решения $\widetilde{Y}$, инвариантного относительно выбора начального вектора $\widetilde{Y}_0$, $\widetilde{y}_{k0} \neq 0$ $\forall k \in \overline{1, n}$.

Доказательство. Решение линейной системы устойчиво тогда и только тогда, когда оно ограничено на полуоси [8]. Из (17) для произвольного решения $Y = \widetilde{Y}(t)$, $Y(t_0) = \widetilde{Y}_0$, следует $|\,\widetilde{y}_k(t)| \le C^{(1)} |\,\widetilde{y}_{k0}\,| = \text{const}$ $\forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall\, k \in \overline{1, n}$, и система устойчива. Если система устойчива, то согласно следствию 3 существует Δ_1, $0 < \Delta_1 \le \delta_0$, такое, что $\left|\dfrac{\widetilde{y}_k(t)}{\widetilde{y}_{k0}}\right| \le C^{(1)}$, $C^{(1)} = \text{const}$, $\forall t \in [t_0, \infty) \wedge$ $\wedge \forall\, k \in \overline{1, n}$, лишь только $0 < \|\,\widetilde{Y}_0\,\| \le \Delta_1$, при $\widetilde{y}_{k0} \neq 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $\Delta_1 \le 1$. Если $|\,\widetilde{y}_{k0}| > \Delta_1$, то верны неравенства $\left|\dfrac{\widetilde{y}_k(t)}{\widetilde{y}_{k0}}\right| \le$ $\le \left|\dfrac{\widetilde{y}_k(t)}{\Delta_1}\right| \le \dfrac{C^{(1)}}{\Delta_1}$. В любом случае $\left|\dfrac{\widetilde{y}_k(t)}{\widetilde{y}_{k0}}\right| \le \max\left(C^{(1)}, \dfrac{C^{(1)}}{\Delta_1}\right) = \dfrac{C^{(1)}}{\Delta_1}$, где $\dfrac{C^{(1)}}{\Delta_1} = \text{const}$ $\forall t \in [\,t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n}.$

Условие следствия 3 для линейной системы упрощается до инвариантного выбора начального вектора и одного соответственного решения. Наряду с этим в дальнейшем используется независимый от начального вектора способ, приводимый ниже [2, 3]. Метод Эйлера для задачи (19) представляется в виде

$$Y_{i+1} = Y_i + h\,A(t_i)\,Y_i + h^2\,Q(t_i), \tag{20}$$

где $Q(t_i) = (Q_1(t_i), Q_2(t_i), \ldots, Q_n(t_i))$, при каждом j и каждом i элемент $h^2 Q_j(t_i)$ является остаточным членом формулы Тейлора. Для возмущения аналог (20) обозначается в виде равенства $\widetilde{Y}_{i+1} = \widetilde{Y}_i + h\,A(t_i)\,\widetilde{Y}_i + h^2 \widetilde{Q}(t_i)$. Из рекуррентного преобразования следует [2]

$$\widetilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell}))\,(\widetilde{Y}_0 - Y_0) + \widetilde{R}_i,$$

где $\widetilde{R}_i=\sum_{k=1}^{i}\prod_{\ell=0}^{i-k}(E+hA(t_{i-\ell}))\widetilde{\Theta}_{k-1}+\widetilde{\Theta}_i$, $\widetilde{\Theta}_r=h^2(\widetilde{Q}(t_r)-Q(t_r))$, $r=0,1,\dots$,

E — единичная матрица. По аналогии с леммой 1 доказываются следующие утверждения.

Лемма 2. В рассматриваемых условиях $\lim\limits_{i\to\infty}\|\widetilde{R}_i\|=0\ \forall t\in[t_0,\infty)$.

Следствие 6. При условиях леммы 2

$$\widetilde{Y}(t)-Y(t)=\lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}(E+hA(t_{i-\ell}))(\widetilde{Y}_0-Y_0).$$

Теорема 2. Система (19) устойчива тогда и только тогда, когда

$$\left\|\lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}(E+hA(t_{i-\ell}))\right\|\le C,\ C=\text{const},\ \forall t\in[t_0,\infty). \qquad (21)$$

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие (21) и соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}(E+hA(t_{i-\ell}))\right\|=0. \qquad (22)$$

Эквивалентная запись соотношений (21), (22):

$$\left\|\lim_{h\to 0}\prod_{\ell=0}^{i}(E+hA(t_{i-\ell}))\right\|\le C,\quad \lim_{t\to\infty}\left\|\lim_{h\to 0}\prod_{\ell=0}^{i}(E+hA(t_{i-\ell}))\right\|=0.$$

Следствие 7. Теорема 2 сохраняется, если матрица A постоянна. В этом случае условия (21), (22) соответственно примут вид

$$\|\lim_{i\to\infty}(E+hA)^i\|\le C,\quad C=\text{const};\quad \lim_{t\to\infty}\|\lim_{i\to\infty}(E+hA)^i\|=0.$$

Степень матрицы $(E+hA)^i$ можно заменить на $(E+hA)^{2^\ell}$ [1]:

$$\left\|\lim_{\ell\to\infty}(E+hA)^{2^\ell}\right\|\le C,\ C=\text{const};\ \lim_{t\to\infty}\left\|\lim_{\ell\to\infty}(E+hA)^{2^\ell}\right\|=0. \qquad (23)$$

Следствие 7 не включает ограничений на вид матрицы.

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В АДДИТИВНОЙ ФОРМЕ

Всюду ниже предполагается, что h достаточно мало и с учетом (9) $|D_{i-\ell}^{(k)}h|<1$. Тогда $\prod_{\ell=0}^{i}(1+D_{i-\ell}^{(k)}h)=e^{\ln\prod_{\ell=0}^{i}(1+D_{i-\ell}^{(k)}h)}$ и возмущение (11) преобразуется к виду $\widetilde{y}_k(t)-y_k(t)=e^{\lim\limits_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i}\ln(1+D_{i-\ell}^{(k)}h)}(\widetilde{y}_{k0}-y_{k0})$ $\forall k\in\overline{1,n}$. Теорема 1 перейдет в следующее утверждение.

Лемма 3. Для устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно существование Δ_1, $0<\Delta_1\le\delta_0$, такого, что для всех решений $Y=\widetilde{Y}(t)$, $Y(t_0)=\widetilde{Y}_0$, при ограничении $0<\|\widetilde{Y}_0-Y_0\|\le\Delta_1$ выполняется неравенство

$$e^{\lim\limits_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i}\ln(1+D_{i-\ell}^{(k)}h)}\le C^{(1)},\ C^{(1)}=\text{const},\ \forall t\in[t_0,\infty)\wedge\forall k\in\overline{1,n}. \qquad (24)$$

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее утверждение и существовало $\Delta_2 \le \Delta_1$ такое, что из неравенства $\| \widetilde{Y}_0 - Y_0 \| \le \Delta_2$ следует соотношение

$$\lim_{t \to \infty} e^{\lim\limits_{i \to \infty} \sum\limits_{\ell=0}^{i} \ln(1 + D_{i-\ell}^{(k)} h)} = 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \tag{25}$$

Условие (24) выполняется в том и только в том случае, если

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} \ln(1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) \le c_{11}, \ \ c_{11} = \text{const}, \ \forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n}, \tag{26}$$

условие (25) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \to \infty} \lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} \ln(1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) = -\infty \ \ \forall k \in \overline{1, n}. \tag{27}$$

Согласно (4) $h = \dfrac{t - t_0}{i+1} \to 0$ при $i \to \infty$, с учетом (9) $D_{i-\ell}^{(k)} h \to 0$, поэтому

$$\frac{\ln(1 + D_{i-\ell}^{(k)} h)}{D_{i-\ell}^{(k)} h} \to 1 \quad \forall \ell \le i \wedge \forall k \in \overline{1, n}. \tag{28}$$

В силу (28) для $\forall \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, справедливы неравенства

$$(1 - \varepsilon) \lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} D_{i-\ell}^{(k)} h < \lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} \ln(1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) < (1 + \varepsilon) \lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} D_{i-\ell}^{(k)} h \ .$$

При $\varepsilon \to 0$ выполняется аналог известного соотношения для рядов [9]:

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} \ln(1 + D_{i-\ell}^{(k)} h) = \lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} D_{i-\ell}^{(k)} h \ \ \forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n}. \tag{29}$$

С учетом (26), (27), (29) из леммы 3 вытекает утверждение.

Следствие 8. Условия, формулировка и утверждения леммы 3 буквально сохраняются при замене соотношения (24) на соотношение вида

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} D_{i-\ell}^{(k)} h \le c_{11}, \ \ c_{11} = \text{const}, \ \forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n}, \tag{30}$$

и замене (25) на соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} D_{i-\ell}^{(k)} h = -\infty \ \ \forall k \in \overline{1, n}. \tag{31}$$

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В (30), (31) $\lim\limits_{i \to \infty} \sum\limits_{\ell=0}^{i} D_{i-\ell}^{(k)} h$ — предел интегральной суммы на $[t_0, t]$, согласно (8) элементами интегрального разбиения являются

$$D_{i-\ell}^{(k)} = \frac{f_k(t_{i-\ell}, \widetilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell})}{\widetilde{y}_{k\, i-\ell} - y_{k\, i-\ell}}, \quad \ell = 0, 1, \ldots, i, \tag{32}$$

представляющие дискретные значения функции

$$D_k(\widetilde{t}) = \frac{f_k(\widetilde{t}, \widetilde{Y}) - f_k(\widetilde{t}, Y)}{\widetilde{y}_k(\widetilde{t}) - y_k(\widetilde{t})}. \tag{33}$$

При выполнении (6) функция (33) определена и непрерывна $\forall \tilde{t} \in [t_0, t]$ для $\forall k$ из (1). Выражения из (30), (31) определяют интегралы, использование которых приводит к следующей теореме.

Теорема 3. В условиях леммы 3 оба утверждения сохраняются при замене (24) на соотношение вида

$$\int_{t_0}^{t} D_k(\tilde{t})\, d\tilde{t} \le c_{11},\ c_{11} = \mathrm{const},\ \forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n} \tag{34}$$

и замене (25) на соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} D_k(\tilde{t})\, d\tilde{t} = -\infty \quad \forall k \in \overline{1, n}. \tag{35}$$

Выражение (33) включает производную возмущения, которая делится на само возмущение; поэтому существует первообразная $\int_{t_0}^{t} D_k(\tilde{t})\, d\tilde{t} = \ln \left| \dfrac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right|$.

Следствие 9. Теорема 3 сохраняется, если соотношения (34), (35) заменить соответственно соотношениями вида

$$\ln \left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \le c_{11},\ c_{11} = \mathrm{const},\ \forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n} \tag{36}$$

и

$$\lim_{t \to \infty} \ln \left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| = -\infty \quad \forall k \in \overline{1, n}, \tag{37}$$

где $\tilde{y}_k(t_0) \ne y_k(t_0)$ $\forall k \in \overline{1, n}$.

Замечание 3. Соотношения (36), (15) и (37), (16) эквивалентны с точностью до логарифмирования и области допустимых значений функции, при этом условии эквивалентны следствие 2, теорема 3 и следствие 9.

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧКИ ПОКОЯ

Пусть система (1) преобразована к виду, когда анализ устойчивости решения сводится к анализу устойчивости точки покоя [8]:

$$\frac{dV}{dt} = U(t, V),\ V(t_0) = \overline{O}, \tag{38}$$

где $U(t, V) = (u_1(t, V), u_2(t, V), \ldots, u_n(t, V))$, $V = (\upsilon_1(t), \upsilon_2(t), \ldots, \upsilon_n(t))$, $\overline{O} = (0, 0, \ldots, 0)^T$. В этом случае вычитаемые в числителе и знаменателе (32), (33) становятся нулями. Для простоты возмущение нулевого решения (38) не будет обозначаться волной.

Теорема 4. Пусть рассматривается устойчивость точки покоя системы (38) и предполагается, что $\upsilon_k(t) \ne 0$ $\forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n}$. Тогда условия и утверждения теоремы 3 повторяются для нулевого решения этой системы при замене (34) на соотношение вида

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u_k(t, V)}{\upsilon_k(t)}\, dt \le c^{(11)},\ c^{(11)} = \mathrm{const},\ \forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n} \tag{39}$$

и замене (35) на соотношение

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{u_k(t, V)}{\upsilon_k(t)}\, dt = -\infty \quad \forall k \in \overline{1, n}. \tag{40}$$

Из (40), следствия 9 и замечания 3 вытекает утверждение.

Следствие 10. Теорема 4 сохраняется, если соотношения (39), (40) заменить соответственно соотношением

$$\left|\frac{\upsilon_k(t)}{\upsilon_k(t_0)}\right| \le c_{00},\ c_{00} = \text{const},\quad \forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n}, \tag{41}$$

где $\upsilon_k(t_0) \neq 0$, и соотношением

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\upsilon_k(t)}{\upsilon_k(t_0)}\right| = 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}. \tag{42}$$

С точностью до обозначений следствие 10 эквивалентно следствию 3.

Частный случай условия (39): $\exists \Delta_1 \ge 0 \wedge \exists T_0 \ge t_0$ такие, что из неравенства $0 < \|V_0\| \le \Delta_1$ следует

$$\frac{u_k(t, V)}{\upsilon_k(t)} \le 0 \quad \forall t \in [T_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n}. \tag{43}$$

Частный случай (40): $\exists \Delta_2 \le \Delta_1 \wedge \exists T_1 \ge t_0 \wedge \exists \rho > 0$ такие, что из неравенства $0 < \|V_0\| \le \Delta_2$ следует

$$\frac{u_k(t, V)}{\upsilon_k(t)} \le -\rho,\ 0 < \rho,\ \rho = \text{const},\ \forall t \in [T_1, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n}. \tag{44}$$

Частный случай условия неустойчивости: $\exists\ \rho_1 > 0,\ \rho_1 = \text{const}$, такое, что $\forall \Delta_1 > 0\ \exists\ V_0$, $0 < \|V_0\| \le \Delta_1$, $\exists T_0 \ge t_0$, $\exists k \in \overline{1, n}$, при которых

$$\frac{u_k(t, V)}{\upsilon_k(t)} \ge \rho_1 \quad \forall t \in [T_0, \infty). \tag{45}$$

Пример 1. Пусть u — правая часть рассматриваемых уравнений. Согласно (44), (45) линейное уравнение $\frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon$ неустойчиво ($\frac{u}{\upsilon} = 1$), $\frac{d\upsilon}{dt} = -\upsilon$ асимптотически устойчиво ($\frac{u}{\upsilon} = -1$), $\frac{d\upsilon}{dt} = t\upsilon$ неустойчиво ($\frac{u}{\upsilon} = t \to \infty$), $\frac{d\upsilon}{dt} = -t\upsilon$ асимптотически устойчиво ($\frac{u}{\upsilon} = -t \to -\infty$). Точка покоя нелинейного уравнения $\frac{d\upsilon}{dt} = \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell t^\ell \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell \upsilon^{2\ell+1}$ неустойчива, если $0 < a_p$ и $0 < b_\ell$, $\ell = 0, 1, \ldots, q$; при $p \ge 0$, $q \ge 0$: $\frac{u}{\upsilon} = \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell t^\ell \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell \upsilon^{2\ell}$, найдется $T_0 \ge t_0$ такое, что $\forall t \ge T_0$ выполнено неравенство $\sum_{\ell=0}^{p} a_\ell t^\ell \ge |a_0|$; поскольку $\sum_{\ell=0}^{q} b_\ell \upsilon^{2\ell} \ge b_0$, то $\frac{u}{\upsilon} \ge \rho_1$, где $\rho_1 = |a_0| b_0 > 0$; неустойчивость следует из (45). Если $a_p < 0$, то $\sum_{\ell=0}^{p} a_\ell t^\ell \le -|a_0|$ при всех достаточно больших t, и $\frac{u}{\upsilon} \le -\rho$, где $\rho = |a_0| b_0$, точка покоя асимптотически устойчива согласно (44).

Иногда дробь $\frac{u_k(t, V)}{\upsilon_k(t)}$ позволяет оценить устойчивость из общих соображений.

Пример 2. Двухвидовая (для рыб) модель «хищник–жертва» Лотки–Вольтерры представляется системой [10, 11]: $\frac{d\upsilon_1}{dt} = -a\upsilon_1 + b\upsilon_1\upsilon_2$, $\frac{d\upsilon_2}{dt} = c\upsilon_2 - d\upsilon_1\upsilon_2$, где a, b, c, d — положительные константы. Для этой системы $\frac{u_1}{\upsilon_1} = -a + b\upsilon_2$, $\frac{u_2}{\upsilon_2} = c - d\upsilon_1$. При достаточно большом количестве рыб-хищников υ_2 таком, что $-a + b\upsilon_2 \geq q > 0$, $q = \text{const}$, точка покоя неустойчива согласно (45). При достаточно малом υ_2 и достаточно большом количестве рыб-жертв υ_1 найдется ρ, $0 < \rho$, $\rho = \text{const}$, такое, что $-a + b\upsilon_2 \leq -\rho$ и $c - d\upsilon_1 \leq -\rho$, согласно (44) точка покоя асимптотически устойчива.

Иногда неустойчивость точки покоя можно определить, приняв возмущение некоторых переменных равным нулю.

Пример 3. В [8] показано, что тривиальное решение системы

$$\frac{d\upsilon_1}{dt} = \frac{\upsilon_1}{t} - t^2 \upsilon_1 \upsilon_2^2, \quad \frac{d\upsilon_2}{dt} = -\frac{\upsilon_2}{t}; \; t_0 = 1, \; \upsilon_1(t_0) = 0, \; \upsilon_2(t_0) = 0, \qquad (46)$$

неустойчиво, хотя все решения $\upsilon_1 = c_1 t e^{-c_2^2 t}$, $\upsilon_2 = \frac{c_2}{t}$ стремятся к нулю. Пусть рассматривается возмущение нулевого решения, при котором $\upsilon_2 = 0$, $\upsilon_1 \neq 0$. Тогда первое уравнение системы (46) примет вид $\frac{d\upsilon_1}{dt} = \frac{\upsilon_1}{t}$; следовательно, $\frac{u_1}{\upsilon_1} = \frac{1}{t}$ и $\int_{t_0}^{t} \frac{u_1(t, V)}{\upsilon_1(t)} dt = \int_1^t \frac{1}{t} dt = \ln t \to \infty$ при $t \to \infty$, что нарушает необходимое условие устойчивости (39).

Замечание 4. Отношение $\frac{u_k(t, V)}{\upsilon_k(t)}$ в (43)–(45) наглядно выражает смысл данных условий устойчивости: отрицательная производная положительной на полуоси функции означает ее убывание, положительная производная отрицательной функции — возрастание. В обоих случаях это означает монотонное убывание функции по абсолютной величине. Отсюда следует равномерное на полуоси расположение функции в произвольной окрестности нуля при достаточно малых границах возмущений начального вектора. Условия в интегральной форме (39), (40) требуют аналогичного убывания модуля компоненты решения в сумме бесконечно малых элементов.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НА ОСНОВЕ СРАВНЕНИЯ ПОДЫНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть рассматриваются измененные отношения примера 3:

$$\frac{d\upsilon_1}{dt} = \frac{\upsilon_1}{t} + t^2 \upsilon_1 \upsilon_2^2, \quad \frac{d\upsilon_2}{dt} = -\frac{\upsilon_2}{t}; \; t_0 = 1, \; \upsilon_1(t_0) = 0, \; \upsilon_2(t_0) = 0.$$

Вывод о неустойчивости точки покоя получаем с учетом теоремы 4: $\frac{u_1}{\upsilon_1} = \frac{1}{t} + t^2 \upsilon_2^2 \geq \frac{1}{t}$, поэтому $\int_1^t \frac{u_1(t, V)}{\upsilon_1(t)} dt \geq \int_1^t \frac{1}{t} dt$. Далее повторяются рассуждения из примера 3. Этот пример обобщает следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть рассматривается система (38), где $0 < t_0$ и $\upsilon_k(t) \neq 0$ $\forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n}$. Если $\forall \Delta_1 > 0 \;\; \exists V_0 : 0 < \|V_0\| \leq \Delta_1 \wedge \exists k \in \overline{1, n} \wedge \exists \rho > 0$, $\rho = \text{const}$, при которых $\frac{u_k}{\upsilon_k} \geq \rho \frac{1}{t}$ $\forall t \in [t_0, \infty)$, то точка покоя системы (38) неустойчива.

Доказательство. В сколь угодно малой окрестности нулевого начального вектора $\int_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)} dt \geq \rho \int_{t_0}^{t} \frac{1}{t} dt = \rho \ln \frac{t}{t_0}$, поэтому $\int_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)} dt \to \infty$ при $t \to \infty$, что противоречит (39).

Лемма 5. Условия и утверждение леммы 4 сохраняются, если $\exists \alpha : -1 < \alpha$, $\alpha = \text{const}$, $\wedge \exists \rho > 0$, $\rho = \text{const}$, при которых выполняется неравенство $\frac{u_k}{\upsilon_k} \geq \rho t^{\alpha}$ $\forall t \in [t_0, \infty)$.

Доказательство. В сколь угодно малой окрестности нулевого начального вектора $\int_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)} dt \geq \rho \int_{t_0}^{t} t^{\alpha} dt = \frac{\rho}{\alpha+1} (t^{\alpha+1} - t_0^{\alpha+1}) \to \infty$ при $t \to \infty$, что противоречит (39).

Замечание 5. В леммах 4, 5 условие $\forall t \in [t_0, \infty)$ можно заменить на следующее: $\exists T_0 \geq t_0 : \forall t \in [T_0, \infty)$, поскольку $\int_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)} dt = \int_{t_0}^{T_0} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)} dt + \int_{T_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)} dt,$ при этом $\left| \int_{t_0}^{T_0} \right| \leq c = \text{const}$, а $\int_{T_0}^{t} \to \infty$.

Пример 4. При α, ρ, t_0 из леммы 5 следующая система удовлетворяет условиям леммы:

$$\frac{d\upsilon_k}{dt} = \rho \upsilon_k t^{\alpha} + \frac{1}{t^2} \upsilon_k \upsilon_r^2 \left(\sum_{\ell=0}^{p} a_{\ell} t^{\ell} \sum_{\ell=0}^{q} b_{\ell} \upsilon_r^{2\ell} \right),$$

$$\upsilon_k(t_0) = 0, \ k \in \overline{1,n}, \quad \frac{d\upsilon_r}{dt} = u_r(t,V), \tag{47}$$

$$\upsilon_r(t_0) = 0, \ r = 1, 2, \ldots, n, \ r \neq k,$$

где $0 \leq p$, $0 < a_p$ и $0 \leq q$, $0 < b_{\ell}$, $\ell = 0, 1, \ldots, q$, а r-е уравнения могут быть произвольными в условиях существования и единственности. Пусть выбрано $T_0 \geq t_0$ такое, что $\forall t \geq T_0$ справедливо неравенство $\sum_{\ell=0}^{p} a_{\ell} t^{\ell} \sum_{\ell=0}^{q} b_{\ell} \upsilon_r^{2\ell} \geq |a_0| b_0 > 0$; соответственно $\frac{u_k}{\upsilon_k} \geq \rho t^{\alpha}$. Тогда $\int_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)} dt \geq \int_{T_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)} dt - \left| \int_{t_0}^{T_0} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)} dt \right| \geq$ $\geq \rho \int_{T_0}^{t} t^{\alpha} dt - c \to \infty$ при $t \to \infty$, что противоречит (39).

Лемма 6. Если в условиях теоремы 4 $\exists \Delta_1 > 0$ такое, что для всех решений $V(t)$, $V(t_0) = V_0$, где $0 < \|V_0\| \leq \Delta_1$, при некоторых $\beta < -1$, $\beta = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, и $t_0 > 0$ выполняются неравенства $\frac{u_k}{\upsilon_k} \leq \rho t^{\beta}$ $\forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1,n}$, то точка покоя системы (38) устойчива.

Доказательство. В данных условиях $\beta+1<0$ и $t^{\beta+1} \le t_0^{\beta+1}$, поэтому $\int\limits_{t_0}^{t} t^{\beta}\,dt = \frac{1}{\beta+1}(t^{\beta+1} - t_0^{\beta+1}) \le \frac{t_0^{\beta+1}}{|\beta+1|}$. Для всех решений $V(t)$, $0<\|V(t_0)\| \le \Delta_1$, верны неравенства $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)}\,dt \le \rho \int\limits_{t_0}^{t} t^{\beta}\,dt \le \frac{\rho\, t_0^{\beta+1}}{|\beta+1|}$ и (39) выполнено при $c^{(11)} = \frac{\rho\, t_0^{\beta+1}}{|\beta+1|}$.

Пример 5. При ρ, β, t_0 из леммы 6 следующая система удовлетворяет условиям леммы:

$$\frac{d\upsilon_k}{dt} = \rho\upsilon_k t^{\beta} - \frac{1}{t^2}\upsilon_k \upsilon_r^2 \left(\sum_{\ell=0}^{p} a_{\ell} t^{\ell} \sum_{\ell=0}^{q} b_{\ell} \upsilon_r^{2\ell} \right), \ \upsilon_k(t_0) = 0, \ k \in \overline{1,n}, \qquad (48)$$

$$\frac{d\upsilon_r}{dt} = \upsilon_r t^{\beta}, \ \upsilon_r(t_0) = 0, \ r = 1, 2, \ldots, n, \ r \ne k,$$

где $0 \le p$, $0 < a_{\ell}$, $\ell \in \overline{0,p}$, и $0 \le q$, $0 < b_{\ell}$, $\ell \in \overline{0,q}$. Так как $0 \le \sum_{\ell=0}^{p} a_{\ell} t^{\ell} \sum_{\ell=0}^{q} b_{\ell} \upsilon_r^{2\ell}$, то $\frac{u_k}{\upsilon_k} \le \rho t^{\beta}$. Кроме того, $\frac{u_r}{\upsilon_r} \le t^{\beta}$, $r \ne k$. В условии леммы 6 коэффициент ρ можно заменить на $\tilde{\rho} = \max(1, \rho)$, поэтому точка покоя системы (48) устойчива.

Обобщением лемм 4–6 является следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $t_0 > 0$ и для произвольного $t > t_0$ при каждом $k \in \overline{1,n}$ функции $f_k(t)$, $g_k(t)$ интегрируемы на отрезке $[t_0, t]$. Если в условиях теоремы 4 $\exists \Delta_1 > 0$ такое, что для всех решений $V(t)$, $0<\|V(t_0)\| \le \Delta_1$, выполняется неравенство $\frac{u_k}{\upsilon_k} \le f_k(t)$ $\forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1,n}$, где $\int\limits_{t_0}^{t} f_k(t)\,dt \le c_{11}$, $c_{11} = \mathrm{const}$, то точка покоя системы (38) устойчива. В частности, в условиях леммы 6 $f_k(t) = \rho t^{\beta}$, $\beta < -1$. Если $\forall \Delta_1 > 0$ $\exists$ $V(t)$, $0<\|V(t_0)\| \le \Delta_1$, такое, что при некотором $k \in \overline{1,n}$ выполнено неравенство $\frac{u_k}{\upsilon_k} \ge g_k(t)$ $\forall t \in [t_0, \infty)$, где $\int\limits_{t_0}^{t} g_k(t)\,dt \to \infty$ при $t \to \infty$, то точка покоя системы (38) неустойчива. В частности, в условиях леммы 4 $g_k(t) = \rho\, t^{\alpha}$, $-1 \le \alpha$, $0 < \rho$.

Доказательство. Если $\frac{u_k}{\upsilon_k} \le f_k(t)$ $\forall t \in [t_0, \infty)$, то $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)}\,dt \le \int\limits_{t_0}^{t} f_k(t)\,dt \le$ $\le c_{11}$, $c_{11} = \mathrm{const}$. Согласно условию теоремы 5 и неравенству (39) это означает устойчивость точки покоя. Если $\frac{u_k}{\upsilon_k} \ge g_k(t)$ $\forall t \in [t_0, \infty)$, то $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)}\,dt \ge$ $\ge \int\limits_{t_0}^{t} g_k(t)\,dt$; отсюда $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)}\,dt \to \infty$ при $t \to \infty$, что противоречит (39).

Следствие 11. В условиях теоремы 5 точка покоя системы (38) устойчива, если $\frac{u_k}{\upsilon_k} \le t^{\beta}$, $\beta < -1$ $\forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall k \in \overline{1, n}$, и неустойчива, если хотя бы при одном k выполнено неравенство $\frac{u_k}{\upsilon_k} \ge t^{\beta}$, $\beta \ge -1$ $\forall t \in [t_0, \infty)$.

Условия асимптотической устойчивости содержит следующая теорема.

Теорема 6. Если в условиях устойчивости теоремы 5 $\exists \Delta_2 > 0$, $\Delta_2 \le \Delta_1$, такое, что для всех решений $V(t)$, $0 < \| V(t_0) \| \le \Delta_2$, справедливо неравенство $\frac{u_k}{\upsilon_k} \le f_k(t)$ $\forall t \in [t_0, \infty)$, при этом $\int\limits_{t_0}^{\infty} f_k(t)\, dt = -\infty$ $\forall k \in \overline{1, n}$, то точка покоя системы (38) асимптотически устойчива. В частности, утверждение верно, если при тех же k и t для некоторых $\beta \ge -1$, $\beta = \text{const}$, и $\rho > 0$, $\rho = \text{const}$, выполняется неравенство $\frac{u_k}{\upsilon_k} \le -\rho t^{\beta}$.

Доказательство. Для $\forall k \in \overline{1, n}$ в условиях теоремы $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t, V)}{\upsilon_k(t)}\, dt \le \int\limits_{t_0}^{t} f_k(t)\, dt$ при переходе к пределу в неравенстве получим $\lim\limits_{t \to \infty} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t, V)}{\upsilon_k(t)}\, dt = -\infty$. Согласно теореме 4 и соотношению (40) это означает асимптотическую устойчивость точки покоя. В случае $\beta \ge -1$, $\beta = \text{const}$, $\rho > 0$, $\rho = \text{const}$, выполнено соотношение $-\rho \int\limits_{t_0}^{t} t^{\beta}\, dt \to -\infty$ при $t \to \infty$; поэтому из неравенства $\frac{u_k}{\upsilon_k} \le -\rho t^{\beta}$ следует асимптотическая устойчивость точки покоя системы (38).

Пример 6. При ρ, β, t_0 из теоремы 6 следующая система удовлетворяет условиям теоремы:

$$\frac{d\upsilon_k}{dt} = -\rho \upsilon_k t^{\beta} - \frac{1}{t^2} \left(\sum_{\ell=0}^{p} a_\ell t^{\ell} \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell \upsilon_r^{2\ell} \right) \frac{\upsilon_k^3}{\upsilon_r^2 + 1}, \quad \upsilon_k(t_0) = 0 \quad \forall k \in \overline{1, n}, \tag{49}$$

$$\frac{d\upsilon_r}{dt} = -\upsilon_r t^{\beta}, \quad \upsilon_r(t_0) = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, n, \quad r \ne k,$$

где $0 \le p$, $0 < a_\ell$ $\forall \ell \in \overline{0, p}$, и $0 \le q$, $0 < b_\ell$ $\forall \ell \in \overline{0, q}$. Для k-го уравнения $\frac{u_k}{\upsilon_k} \le -\rho t^{\beta}$, $0 < \rho$, $\beta \ge -1$, и $\frac{u_r}{\upsilon_r} = -t^{\beta}$ при $r \ne k$. Пусть $f_k(t) = -\tilde{\rho} t^{\beta}$, $\tilde{\rho} = \max(1, \rho)$, тогда $\frac{u_\ell}{\upsilon_\ell} \le f_\ell(t)$ $\forall t \in [t_0, \infty) \wedge \forall \ell \in \overline{0, n}$. Согласно теореме 6 точка покоя асимптотически устойчива.

Таким образом, интегральные неравенства могут использоваться для априорного анализа устойчивости, они могут аналогично использоваться апостериори, если известно аналитическое решение в окрестности начального вектора.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА

Малая размерность систем выбрана для краткости описания. Практически она может быть произвольной.

Пусть $\frac{dy_1}{dt} = y_2$, $\frac{dy_2}{dt} = -2y_1 - 2y_2$. Следующие операторы (Delphi, ниже программа 1) реализуют проверку (23) при ℓ, которые соответствуют «достаточно большому» ($>10^9$) промежутку изменения независимой переменной.

Программа 1

```
label 60, 111; const n=2; h=1.1e-14; a: array [1..n,1..n] of extended=(( 0, 1), (-2, -2));
type matr=array[1..n,1..n] of extended; var a1, c: matr; s, s0, x: extended; i, j, l, k, k0: integer;
begin
      for i:= 1 to n do for j:= 1 to n do
      begin a1[i,j] := a[i,j]*h ; if i=j then a1[i,j] := a1[i,j]+1 end;
60: for i := 1 to n do for j := 1 to n do begin s := 0; for l:= 1 to n do
      s := s + a1 [ i , l ] * a1 [ l , j ]; c [i, j] := s end; k:=k+1;
      x:=h*exp((k+1)*ln(2)); if abs(x) >= 1e9 then goto 111;
      for i:= 1 to n do for j:= 1 to n do a1 [i,j] := c [i,j]; s0 := 0;
      for i:= 1 to n do for j:= 1 to n do s0 := s0 + sqr (a1 [i,j]); s0 := sqrt (s0);
      if k >= 1 then write (' ': 2, s0: 2, ' '); goto 60;
111: writeln (' ':2, 'h=', h, ' '); writeln (' ':2, 'k=', k, ' '); writeln (' ':2, 'x =', x:2, ' '); readln end.
```

Результат работы программы:

1.4, 1.4, … , 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 9.7×10^{-1}, 5.6×10^{-1}, 6.4×10^{-2}, 2.9×10^{-3}, 6.1×10^{-6}, 2.8×10^{-11}, 6.3×10^{-22}, 2.5×10^{-43}, 1.3×10^{-86}, 1.3×10^{-172}, 1.3×10^{-344}, 8.6×10^{-689}, 2.3×10^{-1377}, 0, 0, … , 0;
$h = 1.1\times10^{-14}$, $k = 76$, $x = 1.7\times10^{9}$.

Выполнено 76 операций возведения в степень матрицы $A_1 = E + hA$, E — единичная, A — матрица коэффициентов системы, $h = 1.1\times10^{-14}$. Достигнута граница изменения независимой переменной 1.7×10^{9}, в этом приближении асимптотического значения норма $\|(E+hA)^{2^\ell}\|$, убывая, обратилась в нуль, что согласно (23) соответствует асимптотической устойчивости линейной системы.

К аналогичному результату приводит программа, построенная на основе следствия 3 и условия (18).

Программа 2

```
const eps=0.0000000001; h = 0.000001; tt=10000000;
var x,y1,y2,z1,z2: extended;k: longint;
function f1(x,y1,y2:extended):extended;
begin f1:=y2; end;
function f2(x,y1,y2:extended):extended;
begin f2:=-2*y1-2*y2; end;
   begin k := 0; y1:= eps; y2 := eps; x:=0; while x<=1500 do begin
   y1 := y1 + h * f1(x,y1,y2); y2 := y2 + h * f2(x,y1,y2);
   z1:=y1/ eps; z2:=y2/ eps; k:=k+1; if k = tt then begin
   writeln('x=',x:4,' '); writeln('abs (z1)=',abs(z1):4,' ','abs(z2)=',abs(z2):4,' ','norma=', sqrt(sqr(z1)+sqr(z2)):4);
   k:=0 end; x:=x+h; end; readln end.
```

Результат работы программы: 9.5×10^{-5}, 6.7×10^{-9}, … , 5.8×10^{-174}, … , 2.2×10^{-647}.

Норма $\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ вектора координат левой части (18) убывает к нулю на отрезке $[0, 1500]$, что соответствует признаку асимптотической устойчивости.

Для системы $\frac{dy_1}{dt} = y_2$, $\frac{dy_2}{dt} = -y_1$ программа 1 с входной матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ даст значения $\|(E+hA)^{2^\ell}\|$: 1.4, 1.4, … , 1.4; $h = 1.1\times10^{-14}$, $k = 76$, $x = 1.7\times10^{9}$. Согласно (23) это является признаком неасимптотической устойчивости. Результат программы 2 при соответствующей замене функций f1, f2: 1.4, 1.4, … , 1.4. Норма $\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ на отрезке $[0, 1500]$ не превосходит константы, что согласно (17) сохраняет предыдущий вывод.

Вычисление рассматриваемых значений для оценки устойчивости ограничено условием (6), не допускающим нулевое значение знаменателя дроби (8). Ограничение ослабляется тем, что согласно следствиям 2, 3, 10 для достаточности выполнения (6) не требуется. Если же это требование выполняется, характер устойчивости адекватно моделируется непосредственно по программе 2, а также циклическим накоплением сумм из левых частей (30), (31).

Для нелинейной системы (46) программа 2 при f1:=y1/x-sqr(x)*y1*sqr(y2); f2:=-y2/x; с изменением x:=1; while x<=1500 do даст следующие значения нормы $\sqrt{z_1^2+z_2^2}$: 1.1×10^1, 3.1×10^1, … , 4.1×10^2, … , 4.1×10^2, 1.5×10^3. Норма монотонно растет на отрезке $[1.1,\ 1.5\times10^3]$, что противоречит условию устойчивости (17). Для данной задачи ограничение (6) не нарушено, можно циклически накапливать суммы z1:=z1+f1(x,y1,y2)/y1*h; z2:=z2+f2(x,y1,y2)/y2*h. С этим изменением получены следующие значения нормы: $\sqrt{z_1^2+z_2^2}$: 3.4×10^0, 4.8×10^0, 8.5×10^0, 1.0×10^1; рост нормы нарушает соотношение (39), что является признаком неустойчивости.

Положим, что система (47) рассматривается при значениях $\alpha=-0.5$, $\rho=0.5$; $p=q=3$; $a_\ell=b_\ell=1$; $n=2$; $u_2(t,V)=-t$. В этом случае при $t_0=0.5$ программа 2 выдает переполнение вследствие резкого роста нормы — на отрезке $[0.5,\ 2.5]$ (tt=100000): 5.5×10^8, 1.2×10^9, … , 1.5×10^{10}, 2.9×10^{43}, … …, 2.0×10^{441}, 5.6×10^{915}, что является признаком неустойчивости ввиду нарушения (39).

Пусть в (48) $\beta=-1.5$, $\rho=0.5$; $p=q=3$; $a_\ell=b_\ell=1$; $n=2$; $u_2(t,V)=\upsilon_2 t^{-3/2}$. При $t_0=0.5$ программа 2 на отрезке $[0.5,\ 3000]$ выдает значения 1.4×10^1, 1.4×10^1,… …, 1.4×10^1, 1.5×10^1, …, 1.5×10^1, 1.6×10^1, …, 1.6×10^1, 1.7×10^1, 1.7×10^1, …, 1.7×10^1, при этом значение 1.7×10^1 повторяется на отрезке $[1500,\ 3000]$, что является признаком устойчивости (39).

В системе (49) положим $\beta=-0.5$, $\rho=0.5$; $p=q=3$; $a_\ell=b_\ell=1$; $n=2$; $u_2(t,V)=-\upsilon_2 t^\beta$. При $t_0=0.5$ программа 2 на отрезке $[0.5,\ 1500]$ выдает значения 9.0×10^{-5}, 1.4×10^{-6}, 6.0×10^{-8}, …, 6.5×10^{-12}, 1.0×10^{-12}, …, 4.4×10^{-16}, 1.1×10^{-16}, согласно (40) это является признаком асимптотической устойчивости.

Таким образом, результаты численного моделирования подтверждают аналитические оценки примеров 3–6.

Возможность обхода ограничения (6) иллюстрирует следующий пример. В системе $\frac{dy_1}{dt}=-y_2\sqrt{y_1^2+y_2^2}$, $\frac{dy_2}{dt}=y_1\sqrt{y_1^2+y_2^2}$ нулевое решение устойчиво, все остальные решения неустойчивы [7]. При f1:=-y2*sqrt(sqr(y1)+ +sqr(y2)); f2:=y1*sqrt(sqr(y1)+sqr(y2)); первое утверждение программа 2 иллюстрирует значениями нормы $\sqrt{z_1^2+z_2^2}$: 1.4, 1.4, … , 1.4 на отрезке $[0,\ 1500]$. Признак неустойчивости нетривиальных решений эта же программа выражает после модификации в соответствии со следствием 2:

```
y1:= eps1; y10 := y1+eps2; y2 := eps1; y20 := y2+eps2;
x:=0; while x<=1500 do begin
y1:=y1+h*f1(x,y1,y2); y2:= y2+h*f2(x,y1,y2); y10:=y10+h*f1(x,y10,y20); y20:=y20+h*f2(x,y10,y20);
z1:=(y1-y10)/eps2; z2:=(y2-y20)/eps2; {далее без изменений}
```

значения нормы $\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$: 1.4, 1.4, … , 1.6, … , 3.3 на том же промежутке при eps1=0.001; eps2=0.000001;

Компоненты решения системы этого примера $y_1 = c\cos(ct+d)$, $y_2 = c\sin(ct+d)$, где c, d — произвольные постоянные [7], нарушают условие (6). На достаточность признака устойчивости это не влияет, проверка необходимости формально требует выполнения условия (6). Однако фактически (ввиду постоянства в программе eps2) операторы z1:=(y1-y10)/eps2; z2:=(y2-y20)/eps2; выражают пропорцию разности возмущенного и невозмущенного решений, что соответствует проверке устойчивости по определению. В данном случае разность возрастает на большом промежутке. Это является признаком неустойчивости.

В общем случае нельзя проверить все окрестности и все точки окрестностей начальных значений в требуемых границах, поэтому предложенный метод в случае нелинейных систем дает лишь признаки устойчивости, неустойчивости или асимптотической устойчивости решений, не исключая при этом целесообразности аналитического исследования. Это замечание не относится к компьютерному анализу устойчивости линейных систем на основе следствий 4, 5 и теоремы 2.

Аналоги предложенного подхода можно строить на основе разностных методов высокого порядка [4, 12], но это не приводит к существенным улучшениям. Согласно эксперименту для численного моделирования устойчивости наиболее приемлемо разностно-полиномиальное решение ОДУ [13, 14]. Его реализация дает правильные результаты с большей точностью и меньшим временным интервалом, чем у программ 1, 2. Программный код этого метода с результатами эксперимента полностью приводится в [15]. Особенность метода связана с отношением производной к решению. Для приближенного решения системы (1) на отрезке $[a, b]$ выполняется разбиение $[a, b] = \bigcup_{i=0}^{P-1} [t_i, t_{i+1}]$. При каждом i на i-м подынтервале правая часть (1) приближается полиномом с численными значениями коэффициентов $f_k(t) \approx \Psi_{i\,km}(t) = \sum_{\ell=0}^{m} a_{ik\ell} t^{\ell}$, решение приближается полиномом $y_k(t) \approx \varphi_{i\,km}(t)$ на основе $\varphi_{ik\,m}(t) = \int \sum_{\ell=0}^{m} a_{ik\ell}\, t^{\ell} dt + c = \sum_{\ell=0}^{m} \frac{a_{ik\ell}}{\ell+1}\, t^{\ell+1} + c$, где k — номер уравнения. Константа c подбирается так, что полиномы на границах подынтервалов сохраняют непрерывность и непрерывную дифференцируемость решения и его производной. Для системы (38) автоматически образуются компоненты отношения

$$\frac{u_k(t, V)}{\upsilon_k(t)} \approx \frac{\Psi_{i\,km}(t)}{\varphi_{i\,km}(t)},\ t \in [t_i, t_{i+1}],\ i = 0, 1, \dots, P-1;\ k = 1, 2, \dots, n. \qquad (50)$$

Соотношение (50) удобно для проверки условий устойчивости (43)–(45), а также (30), (31), приближение $\upsilon_k(t) \approx \varphi_{i\,km}(t)$ — для проверки условий (41), (42). При анализе нулевого решения системы последнего примера получим значения нормы $\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$: 1.4142135623731, 1.4142135623731,…, 1.4142135623731 на отрезке [0, 3000] [15]. С приведенными в данном примере параметрами ненулевого решения на отрезке [0, 1500] значения компоненты z_2: 2.2×10^{-1}, 3.6×10^{-1}, …, 4.5×10^{-1}, 7.4×10^{-1}, …, 9.5×10^{-1} соответствуют признаку неустойчивости. Проверка (39), (40) как значения $\int_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{\upsilon_k(t)} dt =$

$= \ln \left| \frac{\upsilon_k(t)}{\upsilon_k(t_0)} \right|$ для системы предпоследнего примера на отрезке [0.5, 1500] с ростом t даст для $\ln|z_1|$: -9.3×10^0, -1.3×10^1, $-1.7\times10^1, \ldots$, -3.5×10^1, -3.7×10^1, -3.8×10^1; для $\ln|z_2|$: -1.9×10^1, -2.7×10^1, $-3.3\times10^1, \ldots$, -7.1×10^1, -7.3×10^1, -7.6×10^1. Согласно (40) это является признаком асимптотической устойчивости.

Таким образом, компьютерные оценки устойчивости получаются по ходу приближенного решения дифференциальной системы. Требуемые программы инвариантны относительно вида системы, являются стандартными, меняются лишь правые части входных систем ОДУ и их начальные значения. Последнее не является необходимым для линейных систем.

Изложенные методы отличаются от известных [7, 8, 16] построением на основе преобразований разностных решений и программной реализацией численных признаков. Отличия сохраняются относительно современного состояния исследований [17–21], включая компьютерный анализ устойчивости [22].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложены компьютерно-ориентированные методы анализа устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений систем ОДУ. Для линейной системы условия устойчивости инвариантны относительно начального вектора или от него не зависят. Для нелинейной системы необходимым и достаточным условием устойчивости является равномерная ограниченность на полуоси отношения возмущения к вызвавшему его возмущению начальных значений в варьируемой окрестности. Асимптотическая устойчивость имеет место при стремлении этого отношения к нулю с ростом независимой переменной. На этой основе реализуется численное моделирование устойчивости. Аналитическое исследование проводится с использованием покомпонентного отношения функций правой части к зависимой переменной. Численное моделирование выполняется по ходу приближенного решения системы, что целесообразно при выполнении мониторинга устойчивости автоматизированных систем управления в реальном времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ромм Я.Е. Параллельные итерационные схемы линейной алгебры с приложением к анализу устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 4. — С. 119–142.
2. Ромм Я.Е. Мультипликативные критерии устойчивости на основе разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 1. — С. 127–142.
3. Ромм Я.Е. Моделирование устойчивости по Ляпунову на основе преобразований разностных схем решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия РАН. Математическое моделирование. — 2008. — **20**, № 12. — С. 105–118.
4. Катрич С.А. Разработка и исследование программного моделирования устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений на основе разностных методов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2006. — 20 с.
5. Ромм Я.Е. Программируемые критерии устойчивости по Ляпунову. I / ТГПИ. — Таганрог, 2005. — 24 с. Деп. в ВИНИТИ 21.06.2005, № 879-В2005.

6. Ромм Я.Е. Программируемые критерии устойчивости по Ляпунову. II / ТГПИ. — Таганрог, 26 с. Деп. в ВИНИТИ 21.06.2005, № 880-В2005.
7. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964. — 478 с.
8. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — СПб.: Лань, 2008. — 480 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. — М.: Физматлит, 2001. — 810 с.
10. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. — М.: Наука., 1987. — 160 с.
11. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Удм. ГУ, 2000. — 368 с.
12. Буланов С.Г. Разработка и исследование методов программного моделирования устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе матричных мультипликативных преобразований разностных схем: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2006. — 20 с.
13. Джанунц Г.А. Компьютерный метод кусочно-полиномиального приближения решений обыкновенных дифференциальных уравнений в применении к моделированию автоколебательных реакций: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ. — 2012. — 22 с.
14. Ромм Я.Е., Джанунц Г.А. Компьютерный метод варьируемой кусочно-полиномиальной аппроксимации функций и решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 3. — С. 95–112.
15. Ромм Я.Е., Джанунц Г.А. Компьютерный анализ устойчивости по Ляпунову на основе мультипликативных и аддитивных преобразований решений обыкновенных дифференциальных уравнений / ТГПИ. — Таганрог, 2014. — 49 с. Деп. в ВИНИТИ 17.02.2014, № 53-В2014.
16. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989. — 472 с.
17. Huang A.S., Pivka L., Wu C.W., Franz M. Chua’s equation with cubic nonlinearity // Int. J. Bifurcat. Chaos. — 1996. — **12**(A). — P. 2175–2222.
18. Higham N.J. The scaling and squaring method for the matrix exponential revisited // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 2005. — **26**, N 4. — P. 1179–1193.
19. Astashova I.V. Application of dinamical systems to the study of asymptotic properties of solutions to nonlinear higher-order differential equations // Journal of Mathematical Sciences. — 2005. — **126**, N 5. — P. 1361–1390.
20. Cannas B., Pisano F. A piecewise linear approximation method for the evaluation of Lyapunov exponents of polynomial nonlinear systems // Chaos and Complex Systems. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. — P. 439–447.
21. Bertolim M.A., Jacquemard A. Time switched differential equations and the Euler polynomials // Annali di Matematica Pura ed Applicata. — 2014 August, **193**, Issue 4. — P. 1147–1165.
22. Wright K. Adaptive methods for piecewise polynomial collocation for ordinary differential equations // BIT Numerical Mathematics. — 2007. — **47**. — P. 197–212.

Поступила 15.04.2014