



**ТЕОРИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ  
ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ  
КАК УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
АППАРАТ ПОСТРОЕНИЯ ДИАГРАММЫ  
ВОРОНОГО И ЕЕ ОБОБЩЕНИЙ.  
I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ**

**Аннотация.** Рассмотрен способ построения диаграммы Вороного и ее различных обобщений, основанный на едином подходе: формулировании непрерывной задачи оптимального разбиения множества с критерием качества разбиения, обеспечивающим соответствующий вид диаграммы Вороного, и применении математического и алгоритмического аппарата решения данных задач. Результатом предложенного подхода является возможность строить не только уже известные диаграммы Вороного, но и конструировать новые.

**Ключевые слова:** диаграмма Вороного, непрерывные задачи оптимального разбиения множеств из  $E_n$ ,  $r$ -алгоритм Шора.

## ВВЕДЕНИЕ

Как известно, диаграмма Вороного — это математический объект, который не строго описывается следующим образом. Диаграмма Вороного заданного конечного множества  $M$  точек плоскости (пространства) представляет такое ее разбиение, при котором каждая область (ячейка Вороного) данного разбиения образует множество точек, расположенных ближе к одному из элементов множества  $M$ , чем к любому другому элементу этого множества.

Несмотря на то, что многие известные алгоритмы построения диаграмм Вороного имеют сложность  $O(N \log(N))$ , а некоторые из них даже работают в среднем за  $O(N)$ , все они весьма трудоемки. Построение диаграммы Вороного для пространства произвольной размерности связано со значительными алгоритмическими проблемами, так как при заданном числе точек  $N$  количество элементов, необходимых для описания диаграммы Вороного, растет экспоненциально в зависимости от размерности пространства.

В настоящей работе описан единый подход к построению диаграммы Вороного и различных ее обобщений, основанный на формулировке непрерывных задач оптимального разбиения множеств из  $n$ -мерного евклидова пространства на подмножества с критерием качества, обеспечивающим соответствующий вид диаграммы Вороного, и применении разработанного математического и алгоритмического аппарата решения таких задач. В основе этого аппарата лежит следующая общая идея. Исходные задачи оптимального разбиения множеств, математически сформулированные как бесконечномерные задачи оптимизации, сводятся посредством функционала Лагранжа к вспомогательным конечномерным негладким задачам максимизации либо к негладким задачам максимина, для численно-

го решения которых применяются современные эффективные методы недифференцируемой оптимизации, а именно различные модификации  $r$ -алгоритма Шора. Особенность такого подхода заключается в том, что решение исходных бесконечномерных задач оптимизации удается получить аналитически в явном виде, причем в аналитическое выражение могут входить параметры, представляемые как оптимальное решение описанных ранее вспомогательных конечномерных задач оптимизации с негладкими целевыми функциями.

#### ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИАГРАММЫ ВОРОНОГО

Название рассматриваемой математической структуры связано с именем Георгия Вороного [1]. Она также известна под названием полигонов Тиссена [2] или двумерных сот Дирихле [3]. Диаграммы Вороного в двух- и трехмерных пространствах используются в различных областях прикладных наук: кристаллографии, физике, астрономии, химии, микробиологии, компьютерной графике, при решении проблем искусственного интеллекта, распознавания образов, офтальмологии. В физике конденсированных сред такие структуры также известны как блоки Вигнера–Зейтца [4]. Для общих решеток в группах Ли клетки называют фундаментальными областями [5], а в случае общих метрических пространств — метрическими фундаментальными многоугольниками. Существуют также и другие названия этой математической структуры (или конкретных важных ее приложений): многогранники и полигоны Вороного, домены влияния, разложения и мозаики Вороного, тесселяции Дирихле, разбиения Вороного–Дирихле или Дирихле–Вороного.

Применение диаграмм Вороного дает возможность разрабатывать эффективные алгоритмы решения комбинаторных геометрических задач [6–8], а именно задач поиска минимального евклидова дерева; ближайших соседей множества  $M$  точек плоскости; минимальной триангуляции; построения выпуклой оболочки множества из  $N$  точек; круга наибольшего радиуса, не содержащего заданных точек, центр которого принадлежит их выпуклой оболочке;  $k$  ближайших точек из числа заданных; круга минимального радиуса, содержащего заданные  $N$  точек. Диаграммы Вороного применяются также в задачах оптимального размещения предприятий в заданном районе, оценки интегралов от монотонных функций на заданном множестве, при решении проблемы упаковки шаров в трехмерном евклидовом пространстве. Диаграммы Вороного положены в основу построения теории полиэдров и квадратичных форм. Эффективно применение диаграмм Вороного при изучении термодинамических свойств различных молекулярных и ионных соединений. По виду диаграммы Вороного судят о термодинамических характеристиках соединений, об их устойчивости, форме эквипотенциальных поверхностей и областей «влияния» ионов. В археологии многоугольники Вороного используются для нанесения на карту ареала применения орудий труда в древних культурах и для изучения влияния соперничающих центров торговли. Использование диаграммы Вороного, отражающей карту обитания животных и распределения жизненно важных ресурсов, помогает исследовать эффект перенаселенности.

Диаграммы Вороного используются:

- при отыскании оптимальных коэффициентов и узлов квадратурных формул [9, 10];
- при решении задач оптимального покрытия множества шарами равного радиуса [9, 11, 12];
- для задач наименее плотного покрытия  $n$ -мерного пространства единичными шарами [9, 13];

— при размещении сенсорных датчиков на беспилотных летательных аппаратах, выполняющих полеты на различных высотах и наблюдения за большими плоскими географическими регионами;

— в задачах размещения базовых станций сотовой сети;

— для задач оптимизации размещения электростанций [14].

В работе [15] предложено применять диаграммы Вороного в географических информационных системах. Полигоны Тиссена используются для формирования цифровых моделей рельефа. Практический пример наличия динамики в диаграммах Вороного описан в [16], где отмечается, что динамические модели данных Вороного перспективны для разработки будущих географических информационных систем.

Диаграммы Вороного применяются и для определения максимально свободного пространства. При этом формулируется задача размещения какой-либо службы или предприятия, когда нужно выбрать расположение объекта таким образом, чтобы он был максимально удален от других заданных объектов. Размещаемый объект может являться либо источником загрязнения (атомная электростанция, склад органических (токсичных) отходов) и тогда его следует располагать так, чтобы минимизировать опасность такого соседства, либо новым предприятием, и поэтому желательно избегать конкуренции за окружающее пространство.

В настоящее время диаграммы Вороного применяются в социологии и политологии. В формализованных моделях  $n$ -мерное политическое пространство разбивается на непересекающиеся области — электораты различных партий. Геометрически они представляют собой полиэдры Дирихле–Вороного: совокупности точек пространства, расположенных ближе к точке платформы данной партии, чем к любой другой платформе, и отделенных от соседней совокупности точек  $(n-1)$ -мерной гиперплоскостью. В [17] представлены результаты компьютерных экспериментов на моделях с двумя типами агентов: избирателями и партиями, с учетом возможности организации и ликвидации последних. Здесь также описано применение диаграмм Вороного и их вариаций к проблеме «нарезки» избирательных округов в США. В качестве одного из обобщений структуры рассмотрена диаграмма в стиле Вороного (Voronoi-esque Diagram) — изменение диаграммы Вороного на основе равных масс регионов.

Существуют и другие области применения разбиений Дирихле–Вороного. В работах [18, 19] приведены обзоры приложений диаграмм Вороного в различных областях, а в [20] описаны последние технические результаты и приложения с множеством ссылок на литературу по вычислительной геометрии. Кроме полезности диаграмм Вороного, в последнее время красоту и гармонию их геометрии все чаще замечают архитекторы и дизайнеры.

Далее приведем строгое определение диаграммы Вороного и ее обобщений. Представим единый подход к построению различных типов диаграмм Вороного, основанный на формулировании непрерывных задач оптимального разбиения множеств из  $n$ -мерного евклидова пространства на подмножества с критерием качества, обеспечивающим соответствующий вид диаграммы Вороного, и применении разработанного в [18, 21] математического и алгоритмического аппарата решения таких задач.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИАГРАММЫ ВОРОНОГО И НЕКОТОРЫХ ЕЕ ОБОБЩЕНИЙ

Стандартной (классической) диаграммой Вороного конечного множества  $M$  точек  $\tau_1, \dots, \tau_N$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$  ( $n \geq 1$ ) называется совокупность многогранников Вороного  $Vor(\tau_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ , исходных точек:

$$Vor(\tau_i) = \{x \in E_n : r(x, \tau_i) \leq r(x, \tau_j), j \neq i, j=1, \dots, N\}.$$

Здесь  $r(x, y)$  — одна из следующих метрик:

— евклидова  $r(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - \tau_i^j)^2}$ ;

— манхэттенская  $r(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = \sum_{j=1}^n |x^j - \tau_i^j|$ ;

— Чебышева  $r(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_0 = \max_{j=1, \dots, n} \{|x^j - \tau_i^j|\}$ .

Другими словами, диаграммой Вороного конечного множества  $M$  называется множество  $Vor(M) = \bigcup_{\tau_i \in M} Vor(\tau_i)$ , причем  $mes(Vor(\tau_i) \cap Vor(\tau_j)) = 0$ .

Далее, если не оговорено иного, будем рассматривать случай евклидовой метрики.

Многогранники Вороного формируют нормальное заполнение  $E_n$  (т.е. заполняют его полностью, без наложений и примыкают один к другому целыми гранями), образованы пересечением соответствующих полупространств, выпуклы и могут быть неограниченными. Разбиение  $E_n$  на многогранники Вороного заданного множества точек однозначно.

При определении структуры данных, обеспечивающей эффективное решение задачи поиска  $k$  ближайших соседей, может возникнуть желание определить области, содержащие точки, расположенные ближе к некоторому заданному подмножеству из  $k$  элементов заданного множества  $M$ , чем к любому другому подмножеству с таким же числом элементов. Если положить  $k = |M| - 1$ , то получится диаграмма Вороного дальней точки (Furthest Point Voronoi Diagram). Разработка алгоритмов построения таких диаграмм и вопросы их практического применения описаны в [8, 20, 22].

Одним из наглядных способов получения диаграммы Вороного является выращивание кристаллов. Если кристаллы начинают расти в одно и то же время и с одинаковой скоростью, то получается определенное число растущих кругов, которые, встречаясь, образуют прямые. В результате вся плоскость заполняется, при этом каждый кристалл точно занимает свою область Вороного. В действительности кристаллы начинают расти в разное время, и при этом, даже если они растут с одинаковой скоростью, границы между ними уже представляют собой гиперболические сегменты. Такая ситуация соответствует так называемой аддитивно взвешенной диаграмме Вороного (Additively Weighted Voronoi Diagram) [20]. Она определяется как стандартная диаграмма Вороного, но каждая точка в ней имеет свой вес  $w_i$ , который добавляется к функции, задающей расстояние, при измерении последнего:

$$AWVor(\tau_i) = \{x \in E_n : r(x, \tau_i) - w_i \leq r(x, \tau_j) - w_j \quad \forall j \neq i\}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Одним из наиболее интересных фактов использования аддитивно взвешенной диаграммы Вороного является ее применение в анимации. Например, в работе [23] описано применение таких диаграмм в качестве диаграмм деформации для коррекции искаженных изображений в электронной анимации ECTS.

Случай, когда все кристаллы начинают расти одновременно, но с разной скоростью, соответствует так называемой мультипликативно взвешенной диаграмме Вороного (Multiplicatively Weighted Voronoi Diagram) [23, 24]. Приведем ее определение.

Пусть  $\tau_1, \dots, \tau_N$  — точки в  $E_n$  ( $n \geq 1$ ), которым поставлены в соответствие положительные числа (веса)  $w_1, \dots, w_N > 0$ .

Взвешенной (мультикативно взвешенной) областью (ячейкой) Вороного точки  $\tau_i$  называют множество точек пространства, взвешенное расстояние от которых до точки  $\tau_i$  не превышает взвешенного расстояния до любой другой исходной точки:

$$MWVor(\tau_i) = \{x \in E_n : r(x, \tau_i) / w_i \leq r(x, \tau_j) / w_j \quad \forall j \neq i, j = 1, \dots, N\}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Области  $MWVor(\tau_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , образуют взвешенную (мультикативно взвешенную) диаграмму Вороного точек  $\tau_1, \dots, \tau_N$ .

Существует также обобщение диаграммы Вороного, известное под названиями комплексы ячеек Дирихле, диаграмма Пауэра или диаграмма Лагерра (Power Voronoi Diagram). Пусть  $M$  — множество из  $N$  точек в пространстве  $E_n$ . С каждой точкой  $\tau_i$  множества  $M$  связано действительное число  $w_i$ . Для каждой точки  $\tau_i \in M$  определим множество

$$GVor(M_i) = \{x \in E_n : r^2(x, \tau_i) - w_i \leq r^2(x, \tau_j) - w_j \quad \forall j \neq i, j = 1, \dots, N\}, \\ i = 1, \dots, N,$$

называемое обобщенной областью Вороного (General Voronoi Diagram) точки  $\tau_i$  (относительно множества  $M$ ). Диаграммой Пауэра (Power Voronoi Diagram) множества  $M$  называется множество вида  $GVor(M) = \bigcup_{\tau_i \in M} GVor(\tau_i)$ .

Диаграммы Вороного для  $N$  точек в  $n$ -мерном пространстве требуют  $O(N^{[n/2]})$  места для хранения. Следовательно, часто невозможно хранить диаграммы Вороного для  $n > 2$ . В качестве альтернативы используют приближенные (нечеткие) диаграммы Вороного [25], где клетки Вороного имеют нечеткие границы. Приближенные диаграммы Вороного появляются также в случае, когда любая точка множества  $M$  имеет нечеткие координаты или веса функций двух точек, определяющих ячейки Вороного, заданы нечетко.

В работе [26] исследованы диаграммы Вороного с ограничениями на мощности точек-генераторов. При этом мощностью точки-генератора  $\tau_i$  множества  $M \subset \Omega$ ,  $\Omega \subset E_n$ , является взвешенная площадь ячейки Вороного, определяемая формулой

$$|Vor(\tau_i)| = \int_{x \in Vor(\tau_i)} \rho(x) dx,$$

где  $\rho(x) > 0$ ,  $x \in \Omega$ , — заданная функция плотности.

Диаграммой Вороного с ограничениями на мощности  $|Vor(\tau_i)|$  точек  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , называют диаграмму Вороного на множестве  $\Omega$ , в которой каждая точка  $\tau_i \in M$  имеет свою мощность  $b_i \in S$  или, что аналогично, диаграмму, удовлетворяющую условию

$$\int_{x \in Vor(\tau_i)} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

причем  $b_1, \dots, b_N$  — заданные положительные числа, для которых выполняется условие

$$S = \int_{x \in \Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 < b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Отметим, что подобные диаграммы рассматривались в научной литературе задолго до опубликования работы [26]. Так, в работах [21, 27] представлены непрерывные задачи оптимального разбиения множеств (ОПМ) с ограничениями на мощности подмножеств, математические формулировки которых включают с точ-

ностью до обозначений приведенные ранее условия для взвешенных площадей ячеек Вороного. Оптимальными разбиениями в таких задачах и есть так называемые диаграммы Вороного с ограничениями на мощности точек-генераторов.

Обобщением также являются динамические диаграммы Вороного [28–30]. Так, например, в [28] задача управления малым самолетом при наличии ветров интерпретируется как задача построения динамической диаграммы Вороного (ZVD-задача). Узлы диаграммы (генераторы) не фиксированы, а являются подвижными целями, которые необходимо достичь за минимальное время. Эта задача известна как задача навигации Цермело. Использование динамических диаграмм Вороного при решении задач координации в области робототехники, контроля и биологии описано в [31, 32].

В тех случаях, когда точки-генераторы должны располагаться (выбираться) в ограниченном множестве  $\Omega \subset E_n$ , можно ввести еще один вариант диаграммы Вороного, а именно диаграмму Вороного конечного числа точек, оптимально размещенных в ограниченном множестве.

**Определение 1.** Диаграммой Вороного конечного числа точек-генераторов  $\tau_i, i=1, \dots, N$ , оптимально размещенных в ограниченном множестве  $\Omega$ , будем называть такое разбиение множества  $\Omega$  на  $N$  подмножеств, при котором суммарное взвешенное расстояние от точек множества  $\Omega$  до соответствующих точек-генераторов наименьшее, т.е. функционал

$$F(\{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{Vor(\tau_i)} (r(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x) dx$$

принимает минимальное значение.

**Замечание 1.** Задавая значения параметров  $a_1, \dots, a_N, w_1, \dots, w_N$ , вид функций  $r(x, \tau_i)$  и  $\rho(x)$  в выражении для функционала  $F(\{\tau_1, \dots, \tau_N\})$ , можно получить различные варианты диаграммы Вороного с оптимальным размещением точек-генераторов (аддитивно-, мультипликативно взвешенные и др.)

Рассмотрим единый подход к построению диаграммы Вороного и различных ее обобщений, основанный на аппарате теории непрерывных задач ОРМ [18, 21].

#### НЕПРЕРЫВНЫЕ ЗАДАЧИ ОРМ $n$ -МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА $E_n$ НА ПОДМНОЖЕСТВА

Сформулируем непрерывную линейную задачу ОРМ  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  на подмножества с ограничениями и неизвестными заранее координатами некоторых, характерных для каждого подмножества, точек, называемых «центрами» подмножеств [21].

Пусть  $\Omega$  — ограниченное, измеримое по Лебегу множество в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ . Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  множества  $\Omega \subset E_n$  будем называть возможным разбиением множества  $\Omega$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , если  $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$ ,

$mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N$ , где  $mes(\cdot)$  — мера Лебега. Обозначим  $\Sigma_{\Omega}^N$  класс всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , т.е.

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Введем функционал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx.$$

Непрерывной линейной задачей ОРМ  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  этих подмножеств соответственно называется следующая задача.

**Задача А.** Найти  $\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}}$   $F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})$  при условиях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ; функции  $c(x, \tau_i)$  — ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по аргументу  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  из  $\Omega$  для всех  $i = 1, \dots, N$ ; координаты  $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$  центра  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , заранее неизвестны;  $\rho(x)$  — ограниченная, измеримая, неотрицательная на  $\Omega$  функция;  $a_1, \dots, a_N$ ,  $b_1, \dots, b_N$  — заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь и далее интегралы понимаются в смысле Лебега. Будем считать, что мера множества граничных точек  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , равна нулю.

Разбиение  $\{\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}\}$ , являющееся решением задачи А, назовем оптимальным.

На рис. 1 изображено разбиение множества  $\Omega \subset E_2$  на три подмножества:  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ , с центрами  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  этих подмножеств соответственно.

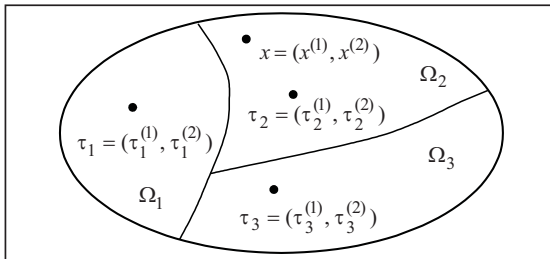


Рис. 1

Введем характеристические функции подмножеств  $\Omega_i$ :

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N,$$

и перепишем задачу А в следующем виде.

**Задача В.** Найти  $\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N}$   $I(\lambda(\cdot), \tau)$ ,

$$\Gamma_2 = \left\{ \lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ почти всюду (п.в.) для } x \in \Omega; \right. \\ \left. \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N \right\}; \\ \Gamma_1 = \left\{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega \right\}; \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N.$$

Здесь  $I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx$ .

Как доказано в работе [21], для каждого фиксированного набора  $\tau \in \Omega^N$  (в предположении, что  $\rho(x) \geq 0$  п.в. для  $x \in \Omega$ ) имеют место следующие теоремы.

**Теорема 1.** Для того чтобы возможное разбиение  $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$  множества  $\Omega$  являлось оптимальным для задачи **A**, необходимо и достаточно существование действительных констант  $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  (среди которых  $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  неотрицательны) таких, что

$$c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j, \quad i \neq j, \quad \text{п.в. для } x \in \Omega_{*i}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (1)$$

**Следствие 1.** В точках  $x$ , принадлежащих оптимальной границе подмножеств  $\Omega_{*i}$  и  $\Omega_{*j}$ , в неравенстве (1) достигается знак равенства.

**Теорема 2.** Оптимальное решение задачи **B** имеет следующий вид для  $i = 1, \dots, N$  и почти всех  $x \in \Omega$ :

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_{*i}) + a_i + \psi_i^* \leq c(x, \tau_{*j}) + a_j + \psi_j^*, \\ & i \neq j, \quad \text{п.в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, N, \quad x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в качестве  $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$  выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \right\} \rightarrow \max \quad (2)$$

при условиях

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N, \quad (3)$$

где

$$G_1(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (4)$$

Для решения конечномерной задачи (2), (3) с недифференцируемой функцией (4) применяется алгоритм псевдоградиентов с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов, близкий к  $r$ -алгоритму Шора [33–36].

Далее приведем три частные постановки задачи **A** и их решения в терминах характеристических функций подмножеств. Все условия для функций, входящих в постановки задач ОРМ, которые будут приведены далее, аналогичны задаче **A**.

Рассмотрим непрерывную задачу ОРМ  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) без ограничений с заданными координатами центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  соответственно.

**Задача A1.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}),$$

где  $F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx$ ;  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau = (\tau_1, \dots$



$\dots, \tau_i, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$ ;  $a_1, \dots, a_N$  — заданные числа; координаты  $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$  центра  $\tau_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , фиксированы.

Для сформулированной задачи **A1**, являющейся частным случаем задачи **A**, имеют место аналоги теорем 1 и 2.

**Аналог теоремы 1 для задачи A1.** Для того чтобы возможное разбиение  $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$  множества  $\Omega$  для каждого фиксированного  $\tau \in \Omega$  являлось оптимальным для задачи **A1**, необходимо и достаточно, чтобы

$$c(x, \tau_i) + a_i \leq c(x, \tau_j) + a_j, \text{ п.в. для } x \in \Omega_{*i}, i, j=1, \dots, N.$$

**Аналог теоремы 2 для задачи A1.** Компоненты характеристической вектор-функции  $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*i}(x), \dots, \lambda_{*N}(x))$ , соответствующей оптимальному решению  $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N})$  задачи **A1** для каждого фиксированного  $\tau \in \Omega$  и почти всех  $x \in \Omega$ , имеют вид:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_{*i}) + a_i \leq c(x, \tau_{*j}) + a_j, \\ & i \neq j, \text{ п.в. для } x \in \Omega, j=1, \dots, N, \text{ тогда } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях, } i=1, \dots, N. \end{cases}$$

Рассмотрим непрерывную задачу ОРМ  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) без ограничений с размещением центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  соответственно.

**Задача A2.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}),$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx,$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega;$$

координаты  $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$  центра  $\tau_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , заранее неизвестны (подлежат определению).

Для сформулированной задачи **A2**, являющейся частным случаем задачи **A**, имеют место аналоги теорем 1 и 2.

**Аналог теоремы 1 для задачи A2.** Для того чтобы возможное разбиение  $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$  множества  $\Omega$  для каждого фиксированного  $\tau \in \Omega$  являлось оптимальным для задачи **A2**, необходимо и достаточно, чтобы

$$c(x, \tau_i) + a_i \leq c(x, \tau_j) + a_j, \text{ п.в. для } x \in \Omega_{*i}, i, j=1, \dots, N.$$

**Аналог теоремы 2 для задачи A2.** Компоненты характеристической вектор-функции  $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*i}(x), \dots, \lambda_{*N}(x))$ , соответствующей оптимальному решению  $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N})$  задачи **A2** для  $i=1, \dots, N$  и почти всех  $x \in \Omega$ , имеют вид:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_{*i}) + a_i \leq c(x, \tau_{*j}) + a_j, \\ & i \neq j, \text{ п.в. для } x \in \Omega, j=1, \dots, N, \text{ тогда } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в качестве  $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$  выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) dx \rightarrow \min, \tau \in \Omega^N.$$

Рассмотрим непрерывную задачу ОРМ  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданными координатами центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  соответственно.

**Задача А3.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}), \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N,$$

при условиях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N,$$

где

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx,$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \quad \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega;$$

координаты  $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$  центра  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , фиксированы;  $a_1, \dots, a_N$ ,  $b_1, \dots, b_N$  — заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Для сформулированной задачи А3, являющейся частным случаем задачи А, имеют место аналоги теорем 1 и 2.

**Аналог теоремы 1 для задачи А3.** Для того чтобы возможное разбиение  $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$  множества  $\Omega$  для каждого фиксированного  $\tau \in \Omega$  являлось оптимальным для задачи А, необходимо и достаточно существование действительных констант  $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  (среди которых  $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$  неотрицательны) таких, что

$$c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i \leq c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j, \quad i \neq j, \quad \text{п.в. для } x \in \Omega_{*i}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

**Аналог теоремы 2 для задачи А3.** Оптимальное решение задачи А3 в терминах характеристических функций подмножеств  $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$  имеет следующий вид для  $i = 1, \dots, N$  и почти всех  $x \in \Omega$ :

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i^* \leq c(x, \tau_j) + a_j + \psi_j^*, \\ & i \neq j, \quad \text{п.в. для } x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, N, \quad \text{тогда } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

в качестве  $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$  выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\psi) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i + \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \rightarrow \max$$

при условиях  $\psi_i \geq 0$ ,  $i = p+1, \dots, N$ .

**Таблица 1.** Модели непрерывных задач ОРМ и диаграммы Вороного, являющиеся оптимальным решением соответствующих задач

| Модель непрерывной задачи ОРМ   | Тип диаграммы Вороного  |
|---|---|
| Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$<br>$c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i = 0, \quad i = \overline{1, N}$                         | Стандартная   |
| Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$<br>$c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i \neq 0, \quad i = \overline{1, N}$                      | Аддитивно взвешенная  |
| Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$<br>$c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i) / w_i, \quad w_i > 0, \quad a_i = 0, \quad i = \overline{1, N}$    | Мультипликативно взвешенная   |
| Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$<br>$c(x, \tau_i) = \beta_i r(x, \tau_i), \quad \beta_i, \quad a_i > 0, \quad i = \overline{1, N}$  | Мультипликативно и аддитивно взвешенная   |
| Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$<br>$c(x, \tau_i) = r^2(x, \tau_i), \quad a_i = A_i^2, \quad i = \overline{1, N}$                   | Диаграмма Пауэра или Лагерра<br>(Power Voronoi Diagram) с весами $A_i^2$  |
| Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$<br>$c(x, \tau_i) = -r(x, \tau_i), \quad a_i = 0, \quad i = \overline{1, N}$                        | Дальней точки   |
| Задача А1: $\rho(x)$ произвольная<br>$c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i = \text{Const}, \quad i = \overline{1, N}$                                 | Другие взвешенные диаграммы   |
| Задача А1: $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$<br>$c(x, \tau_i) = f_i(x, \tau_i), \quad a_i = 0, \quad i = \overline{1, N}$                       | Основанная на эффективности   |
| Задача А2: $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$<br>$c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i = 0, \quad i = \overline{1, N}$                         | Конечного числа точек-генераторов, оптимально размещенных в ограниченном множестве $\Omega$                             |
| Задача А2: $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$<br>$c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i \neq 0, \quad i = \overline{1, N}$                      | Аддитивно взвешенная конечного числа точек-генераторов, оптимально размещенных в ограниченном множестве $\Omega$        |
| Задача А2: $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$<br>$c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i) / w_i, \quad w_i > 0, \quad a_i \neq 0, \quad i = \overline{1, N}$ | Мультипликативно взвешенная конечного числа точек-генераторов, оптимально размещенных в ограниченном множестве $\Omega$ |
| Задача А3: $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$<br>$c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i = 0, \quad i = \overline{1, N}$                         | С ограничениями на мощности точек-генераторов   |
| Задача А3: $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$<br>$c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i), \quad a_i \neq 0, \quad i = \overline{1, N}$                      | Аддитивно взвешенная с ограничениями на мощности точек-генераторов  |
| Задача А3: $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$<br>$c(x, \tau_i) = r(x, \tau_i) / w_i, \quad w_i > 0, \quad a_i \neq 0, \quad i = \overline{1, N}$ | Мультипликативно и аддитивно взвешенная с ограничениями на мощности точек-генераторов                                   |

В табл. 1 приведено соответствие конкретного варианта диаграммы Вороного математической модели непрерывной задачи ОРМ, в результате решения которой можно получить соответствующую диаграмму.

Табл. 1 можно продолжить, изменяя параметры задачи А и получая при этом новые, не представленные в научной литературе, обобщения диаграммы Вороного.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье рассмотрена возможность построения диаграммы Вороного и различных ее обобщений путем формулирования непрерывных задач оптимального разбиения множеств из  $n$ -мерного евклидова пространства на подмножества с критерием качества, обеспечивающим соответствующий вид диаграммы Вороного, а также дальнейшего применения математического и алгоритмического аппарата решения таких задач, разработанных в [18, 21].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. — Киев: Изд-во АН УССР, 1952. — Т. 2. — 392 с.
2. Thiessen A. H. Precipitation averages for large areas // *Monthly Weather Review*. — 1911. — **39**, N 7. — P. 1082–1084.
3. Tóth F. G. Multiple packing and covering of spheres // *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*. — 1979. — **34**, N 1–2. — P. 165–176.
4. Терехов С. В. Моделирование тепловых и кинетических свойств реальных систем. — Донецк: Вебер, 2007. — 306 с.
5. Klein R. Concrete and abstract Voronoi diagrams // *Lecture Notes in Computer Science*. — 1989. — **400**. — 167 p.
6. Акимова И. Я. Применение диаграмм Вороного в комбинаторных задачах. (Обзор) // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. — 1984. — № 2. — С. 102–109.
7. Акимова И. Я. Задача оптимального размещения и обобщения одной теоремы Фейеша Тота // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. — 1982. — № 2. — С. 224–228.
8. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение / Под ред. Ю. М. Банковского. — М.: Мир, 1989. — 478 с.
9. Сухарев А. Г. Минимаксные алгоритмы в задачах целочисленного анализа. — М.: Наука, 1989. — 300 с.
10. Киселева Е. М., Степанчук Т. Ф. О выборе оптимальных коэффициентов и оптимальных узлов квадратурных формул для функциональных классов, заданных квазиметриками // *Проблемы управления и информатики*. — 2002. — № 3. — С. 138–153.
11. Киселева Е. М., Лозовская Л. И., Тимошенко Е. В. Решение непрерывных задач оптимального покрытия шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств // *Кибернетика и системный анализ*. — 2009. — № 3. — С. 98–117.
12. Брусов В. С., Пиявский С. А. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. — 1971. — **11**, № 2. — С. 304–312.
13. Тот Л. Ф. Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве. — М.: ГИФМЛ, 1958. — 364 с.
14. Коряшкина Л. С. Решение одной задачи оптимального размещения промышленного объекта // *Питання прикладної математики та математичного моделювання*. — Д.: ДДУ, 1999. — С. 65–69.
15. Ledoux H., Christopher M. Gold modelling three-dimensional geoscientific fields with the Voronoi diagram and its dual // *International Journal of Geographical Information Science*. — 2008. — **22**, N 5. — P. 547–574.
16. Menelaos I., Yvinec M. Dynamic additively weighted Voronoi diagrams in 2D // *Technical Report ECG-TR-122201-01, INRIA, Sophia; Antipolis. 10th European Symposium on Algorithms, 2002*. — P. 586–598.
17. Laver M., Sergenti E., Schilperoord M. Endogenous birth and death of political parties in dynamic party competition / Seth A., Prescott T., Bryson J. (Eds.) // *Modelling Natural Action Selection*. Ch. 21. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. — 584 p.
18. Киселева Е. М., Коряшкина Л. С. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи: монография. — К.: Наук. думка, 2013. — 606 с.
19. Okabe A., Boots B., Sugihara K., Chiu S. N. *Spatial tessellations: Concepts and applications of Voronoi diagrams*. — 2nd ed. — West Sussex (England): John Wiley and Sons Ltd, 2000. — 696 p.
20. Aurenhammer F., Klein R. Voronoi diagrams: A survey of a fundamental geometric data structure // *ACM Computing Surveys*. — 1991. — **23**, N 3. — P. 345–405.

21. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография. — К.: Наук. думка, 2005. — 564 с.
22. Yoshiaki Ohsawa. A geometrical solution for quadratic bicriteria location models // *European Journal of Operational Research*. — 1999. — **114**. — P. 380–388.
23. Trubin S.I. Information space mapping with adaptive multiplicatively weighted Voronoi diagrams // Thesis (M.S.) — Oregon State University. — 2007. — **6**, N 2. — P. 123–138.
24. Акимова И.Я., Акимов А.П. Взвешенные разбиения Вороного // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. — 1988. — № 3. — С. 186–190.
25. Jooyandeh Mohammadreza, Mohades Ali, Mirzakhah Maryam. Uncertain Voronoi diagram // *Information Processing Letters*. — 2009. — **109**, N 13. — P. 709–712.
26. Balzer M. Capacity-constrained Voronoi diagrams in continuous spaces // *The International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*. — 2009. — 10 p.
27. Киселева Е.М. Алгоритм решения задачи оптимального разбиения с ограничениями // *Кибернетика*. — 1983. — № 1. — С. 115–120.
28. Bakolas E., Tsiotras P. The Zermelo–Voronoi diagram: a dynamic partition problem // *Automatica*. — 2010. — **46**, N 12. — P. 2059–2067.
29. Hashemi L.B., Mostafavi M.A., Pouliot J. Dynamic field process simulation within gis: the Voronoi approach // *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. — Beijing, 2008. — Vol. XXXVII, Part B2. — P. 891–897.
30. Lau B., Sprunk C., Burgard W. Efficient grid-based spatial representations for robot navigation in dynamic environments // *Robotics and Autonomous Systems*. — 2013. — **61**, N 10. — P. 1116–1130.
31. Kikuo Fujita, Noriyasu Hirokawa, Tomoya Tachikawa. Voronoi diagram based cumulative approximation for engineering optimization // Department of Computer-Controlled Mechanical Systems, Graduate School of Engineering, Osaka University, Suita, Osaka 565-0871, Japan, AIAA — 2000. — **4919**. — P. 1–11.
32. Nishida T., Sugihara K., Kimura M. Stable marker-particle method for the Voronoi diagram in a flow field // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2007. — **202**, N 2. — P. 377–391.
33. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение. — К.: Наук. думка, 1979. — 200 с.
34. Шор Н.З., Бардадым Т.А., Журбенко Н.Г., Лиховид А.П., Стецюк П.И. Использование методов негладкой оптимизации в задачах стохастического программирования // *Кибернетика и системный анализ*. — 1999. — № 5. — С. 33–47.
35. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. — К.: Наук. думка, 1989. — 209 с.
36. Шор Н.З., Стецюк П.И. Использование модификации  $r$ -алгоритма для нахождения минимума полиномиальных функций // *Кибернетика и системный анализ*. — 1997. — № 4. — С. 28–49.

*Поступила 19.05.2014*