УДК 519.65

П.С. МАЛАЧИВСКИЙ, Я.В. ПИЗЮР, Н.В. ДАНЧАК, Э.Б. ОРА́ЗОВ

ЧЕБЫШЕВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ С ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ

Аннотация. Исследованы свойства чебышевского приближения экспоненциальным выражением с наименьшей относительной погрешностью и установлено достаточное условие его существования. Предложен и обоснован метод определения параметров такого приближения. Получена оценка погрешности чебышевского приближения экспоненциальным выражением. Приведен численный пример, подтверждающий теоретические результаты.

Ключевые слова: чебышевское (равномерное) приближение, точки альтернанса, относительная погрешность, ядро погрешности приближения.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу чебышевского приближения экспоненциальным выражением

$$E_n(a;x) = A\exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i + cx^p\right),\ x \ge 0,\ c \ne 0,\ p \ne k\ \ (k = \overline{0, n}), \tag{1}$$

относительно неизвестных параметров A, c, p и a_i $(i = \overline{1, n})$. Приближение экспоненциальным выражением (1) используют для описания различных физических зависимостей, в частности, при $n = 0$ и $n = 1$ для описания термометрических характеристик германиевого сенсора [1], а также констант скорости химических реакций [2]. Выражение (1) не удовлетворяет условию Хаара [3, 4], поэтому необходимо исследовать существование чебышевского приближения таким выражением.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ С ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ

Класс функций $f(x)$, для которых существует чебышевское приближение выражением (1) с относительной погрешностью, устанавливает теорема.

Теорема 1. Достаточным условием существования чебышевского приближения выражением (1) для положительной и непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$, $\alpha \ge 0$, функции $f(x)$ $(f(x) \in C[\alpha, \beta],\ f(x) > 0)$ с относительной погрешностью на $[\alpha, \beta]$ является выполнение неравенств

$$W^{(n)} > 0,\ W^{(n)} \ne W_r^{(n)},\ r = \overline{0, n}, \tag{2}$$

где

$$W^{(n)} = \frac{D_{n+1}(\bar{f}; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\bar{f}; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}; \tag{3}$$

$$D_k(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k+1}) = \frac{D_{k-1}(U; z_{j+1}, z_{j+2}, \ldots, z_{j+k+1})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_{j+1}, z_{j+2}, \ldots, z_{j+k+1})} -$$

$$- \frac{D_{k-1}(U; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_j, z_{j+1}, \ldots, z_{j+k})},\quad k = 2, 3, \ldots,\ j = \overline{1, n-k+3}; \tag{4}$$

$$D_1(U; z_j, z_{j+2}) = U(z_{j+2}) - U(z_j),\ j = \overline{1, n+2}; \tag{5}$$

$$W_r^{(n)}=\begin{cases}0, & \text{если } z_1=0,\\ \dfrac{D_{n+1}(l_r; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(l_r; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}, & \text{если } z_1>0;\end{cases} \tag{6}$$

$$s_k(x)=x^k;\ l_k(x)=x^k \ln(x);\ \bar{f}(x)=\ln(f(x)),$$

а z_j $(j=\overline{1, n+4})$ — любые упорядоченные по возрастанию числа из отрезка $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Из характеристического свойства [4] следует, что для существования чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с относительной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ достаточно, чтобы система уравнений

$$\frac{f(z_j)-A\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i z_j^i + c z_j^p\right)}{f(z_j)}=(-1)^j \mu,\ j=\overline{1, n+4}, \tag{7}$$

имела единственное решение относительно неизвестных параметров A, c, p, a_i $(i=\overline{1, n})$ и погрешности μ, где z_j $(j=\overline{1, n+4})$ — любые упорядоченные по возрастанию числа из отрезка $[\alpha, \beta]$. Покажем, что в случае выполнения условия (2) система уравнений (4) имеет единственное решение.

Исключив из системы уравнений (7) неизвестные A и μ, получим относительно c, p и a_i $(i=\overline{1, n})$ систему уравнений

$$\frac{\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i z_{j+2}^i + c z_{j+2}^p\right)}{f(z_{j+2})}=\frac{\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i z_j^i + c z_j^p\right)}{f(z_j)},\ j=\overline{1, n+2}. \tag{8}$$

Так как по условию теоремы функция $f(x)$ положительна, то система уравнений (8) эквивалентна:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (z_{j+2}^i - z_j^i) + c(z_{j+2}^p - z_j^p) = \ln(f(z_{j+2})) - \ln(f(z_j)),\ j=\overline{1, n+2}. \tag{9}$$

С учетом (5) систему уравнений (9) можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i D_1(s_i; z_j, z_{j+2}) + c D_1(\varphi; z_j, z_{j+2}) = D_1(\bar{f}; z_j, z_{j+2}),\ j=\overline{1, n+2}, \tag{10}$$

где $\varphi(p; x)=x^p$, $\bar{f}(x)=\ln(f(x))$.

Система уравнений (10) для определения параметров a_i $(i=\overline{1, n})$ чебышевского приближения выражением (1) совпадает с системой уравнений для нахождения параметров чебышевского приближения суммой полинома и степенной функции $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i + c x^p$ [3]. В работе [3] при исследовании чебышевского приближения суммой полинома и степенной функции доказано, что система уравнений (10) при выполнении условия (2) имеет единственное решение. Таким образом, для существования чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с относительной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$, $\alpha \ge 0$, достаточно выполнения условия (2).

Теорема доказана.

Для нахождения значений параметров чебышевского приближения выражением (1) можно использовать алгоритм Ремеза [4, 5].

Исследуем достаточное условие (2) существования чебышевского приближения экспоненциальным выражением (1). Значение выражения $W^{(n)}$ совпадает с $W_r^{(n)}$, $r=0,1,\ldots,n$, (6), для функций, имеющих вид

$$Bx^{b_0 x^r}, \ x>0, \tag{11}$$

где b_0 и B — любые действительные числа.

В [3] установлено, что неравенству $W^{(n)}>0$ удовлетворяют функции, n-я производная которых строго монотонная на отрезке $[\alpha, \beta]$. Поэтому достаточному условию (2) существования чебышевского приближения экспоненциальным выражением (1) с относительной погрешностью на отрезке $[\alpha, \beta]$ удовлетворяют, в частности, функции непрерывно дифференцируемые до n-го порядка, n-я производная логарифма которых строго монотонная на $[\alpha, \beta]$, за исключением функций, совпадающих с (11) для $r=\overline{0,n}$.

Следует отметить, что условие (2) не является необходимым для существования чебышевского приближения функции $f(x)$ экспоненциальным выражением (1) с относительной погрешностью. Ее выполнение необходимо лишь в точках чебышевского альтернанса. При использовании алгоритма Ремеза для нахождения параметров чебышевской аппроксимации выражением (1) условие (2) должно исполняться во всех точках промежуточных приближений к точкам альтернанса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы, а z_i $(i=\overline{1, n+4})$ — точки чебышевского альтернанса, то параметры A, c и a_i $(i=\overline{1, n})$ чебышевского приближения функции выражением (1) с относительной погрешностью определяют по формулам

$$c=\frac{D_{n+1}(\bar{f}; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}; \tag{12}$$

$$a_k=\frac{D_k(\bar{f}; z_1, z_2, \ldots, z_{k+2})-\sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i D_k(s_i; z_1, z_2, \ldots, z_{k+2})-cD_k(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{k+2})}{D_k(s_k; z_1, z_2, \ldots, z_{k+2})}, \tag{13}$$

$$k=n, n-1, \ldots, 1;$$

$$A=\frac{2f(z_1)f(z_2)}{f(z_2)\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i z_1^i+cz_1^p\right)+f(z_1)\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i z_2^i+cz_2^p\right)}, \tag{14}$$

где $\varphi(p; x)=x^p$. Для определения точек альтернанса можно использовать итерационную схему Ремеза, а для уточнения точек альтернанса — алгоритм Вале–Пуссена [4].

Значение параметра p определяют как решение трансцендентного уравнения

$$\omega_n(p)=W^{(n)}, \tag{15}$$

где

$$\omega_n(p)=\frac{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})},$$

а выражение $W^{(n)}$ определяется по формуле (3).

Согласно результатам, изложенным в [3], вычисление решения уравнения (15) проводят с учетом значения величины $W^{(n)}$, а именно, если значение величины $W^{(n+1)}$ удовлетворяет одному из неравенств

$$W_k^{(n)} < W^{(n)} < W_{k+1}^{(n)}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{16}$$

его решение принадлежит интервалу $(k, k+1)$. Поэтому сначала необходимо проверить, принадлежит ли корень уравнения (15) одному из интервалов $(k, k+1)$, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Если значение параметра p принадлежит одному из этих интервалов, то его можно определить по методу хорд или деления пополам. В противном случае значение параметра p принадлежит интервалу $(-\infty, 0)$ или (n, ∞).

Поскольку в работе [3] показано, что левая часть уравнения (15) для $\varphi(p; x) = x^p$ является степенной функцией, то его решение в интервалах $(-\infty, 0)$ и (n, ∞) целесообразно искать как корень уравнения

$$g_n(p) = V^{(n)}, \tag{17}$$

где $g_n(p) = \ln(\omega_n(p))$, $V^{(n)} = \ln(W^{(n)})$. Решение уравнения (17) можно найти с помощью итерационного метода Ньютона

$$p_{i+1} = p_i - \frac{g_n(p_i) - V^{(n)}}{g'_n(p_i)}, \ i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

где

$$g'_n(p) = \frac{D_{n+1}(\overline{\varphi}; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \ldots, z_{n+4})} - \frac{D_{n+1}(\overline{\varphi}; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \ldots, z_{n+3})};$$

$$\overline{\varphi}(p; x) = x^p \ln(x); \ \varphi(p; x) = x^p;$$

$$p_0 = \begin{cases} p^*, & \text{если } W^{(n)} < W_0^{(n)}, \\ n+1+p^*, & \text{если } W^{(n)} > W_n^{(n)}; \end{cases} \tag{19}$$

$$p^* = \frac{|\ln W^{(n)}|}{\ln(z_{n+4} + z_2) - \ln(z_{n+3} + z_1)}.$$

Выбор начального значения p_0 (19) является достаточно близким к решению уравнения (17) и обеспечивает совпадение их знаков, что необходимо для соблюдения устойчивости итерационного метода (18). Функция $g_n(p)$ при $\varphi(p; x) = x^p$ имеет разрывы в точках $p = 0, 1, \ldots, n$, и переход промежуточных значений p_i через одну из этих точек может нарушить сходимость итерационного метода (18). Предварительная проверка условия (16) и выбор начального значения p_0 по формуле (19) обеспечивают обход упомянутых точек разрыва левой части уравнения (17) при нахождении его решения по итерационной схеме (18). Предложенное применение комбинации итерационных методов для вычисления решения уравнения (17) обеспечивает достаточно быструю их сходимость.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ

Для оценки погрешности чебышевского приближения непрерывной функции $f(x)$ нелинейным относительно параметров выражением $F(a; x)$ на промежутке $[\alpha, \beta]$ с весовой функцией $w(x)$ ($w(x) > 0, x \in [\alpha, \beta]$) имеет место формула [5]

$$\frac{\min\limits_{x\in[\alpha,\beta]} \eta(f,F)}{2^{2n+5}(n+3)!\,w(x)}\Delta x^{n+3} \le \mu \le \frac{\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]} \eta(f,F)}{2^{2n+5}(n+3)!\,w(x)}\Delta x^{n+3}, \qquad (20)$$

где $\Delta x=\beta-\alpha$, а $n+3$ — количество параметров в выражении $F(a;x)$. Функцию $\eta(f,F)$ называют ядром погрешности приближения функции $f(x)$ выражением $F(a;x)$. Для того чтобы применить формулу (20), необходимо знать аналитическое выражение для ядра погрешности приближения конкретным нелинейным выражением $F(a;x)$.

Прологарифмировав экспоненциальное выражение (1), получим выражение в виде суммы многочлена и степени

$$C_n(a;x)=\ln E_n(a;x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + cx^p, \qquad (21)$$

где $a_0=\ln(A)$. Ядро погрешности чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (21) имеет вид [5, 6]

$$\eta(f,C)=f^{(n+3)}(x)-f^{(n+2)}(x)\frac{xf^{(n+2)}(x)-f^{(n+1)}(x)}{xf^{(n+1)}(x)}.$$

Используя свойство экспоненционирования приближения для ядер погрешностей [5, 7]

$$\eta(f,\exp F)=f(x)\eta(\ln f,F),$$

получим аналитическое выражение для ядра погрешности чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1)

$$\eta(f,E)=f(x)\eta(\ln f,C)=$$

$$=f(x)\left[\bar f^{(n+3)}(x)-\bar f^{(n+2)}(x)\frac{x\bar f^{(n+2)}(x)-\bar f^{(n+1)}(x)}{x\bar f^{(n+1)}(x)}\right], \qquad (22)$$

где $\bar f(x)=\ln(f(x))$.

Используя формулу (20) и ядро (22), вычислим оценки относительной погрешности чебышевского приближения гамма-функции $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ экспоненциальным выражением (1) для $n=\overline{1,3}$, на интервалах $[2, 4]$ и $[2, 10]$. (Полученные результаты см. в табл. 1.)

Таблица 1. Погрешность чебышевского приближения гамма-функции экспоненциальным выражением

$[\alpha,\beta]$	n	$\mu_{\min}$	$\mu_{\max}$	ρ
[2, 4]	1	$0.119\cdot10^{-4}$	$0.201\cdot10^{-3}$	$0.449\cdot10^{-4}$
	2	$0.591\cdot10^{-6}$	$0.185\cdot10^{-4}$	$0.321\cdot10^{-5}$
	3	$0.364\cdot10^{-7}$	$0.207\cdot10^{-5}$	$0.373\cdot10^{-6}$
[2, 10]	1	$0.719\cdot10^{-4}$	$0.515\cdot10^{-1}$	$0.128\cdot10^{-2}$
	2	$0.580\cdot10^{-5}$	$0.190\cdot10^{-1}$	$0.201\cdot10^{-3}$
	3	$0.594\cdot10^{-6}$	$0.851\cdot10^{-2}$	$0.381\cdot10^{-4}$

В таблице приведены соответственно минимальное ($\mu_{\min}$) и максимальное ($\mu_{\max}$) значения оценки относительной погрешности чебышевского приближения гамма-функции экспоненциальным выражением (1), а также значение реальной относительной погрешности чебышевского приближения (ρ):

$$\rho = \max_{x \in [\alpha, \beta]} \left| \frac{\Gamma(x) - E_n(a, x)}{\Gamma(x)} \right|.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Достаточным условием существования чебышевского приближения экспоненциальным выражением (1) с относительной погрешностью является выполнение неравенств (2). При выполнении этого условия параметры чебышевского приближения экспоненциальным выражением (1) с относительной погрешностью определяют по формулам (12)–(14). Значение параметра p находят как решение трансцендентного уравнения (15) с использованием метода деления пополам или метода Ньютона (18). Погрешность чебышевского приближения вычисляется по формуле (20), а аналитическое выражение для ядра погрешности — по формуле (22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mitin V.F., Kholevchuk V.V., Kolodych B.P. Ge-on-GaAs film resistance thermometers: Low-temperature conduction and magnetoresistance // Cryogenics. — 2011. — **51**, N 1. — P. 68–73.
2. Ибрагимова Л.В. Константы скорости химических реакций в высокотемпературном газе CO_2 // Математическое моделирование. — 2000. — **12**, № 4. — С. 3–19.
3. Малачівський П. Чебишовське наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2005. — Вип. 1. — С. 134–145.
4. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. — Киев: Наук. думка, 1980. — 352 с.
5. Попов Б.А. Равномерное приближение сыплайнами. — Киев: Наук. думка, 1989. — 272 с.
6. Попов Б.О., Сущик К.В. Рівномірне наближення сплайнами з ланками у вигляді суми многочлена та степені // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. — 1999. — № 1. — С. 196–199.
7. Пізюр Я. Наближення функцій ермітовими сплайнами з експоненціальними ланками // Вісн. Нац. ун-ту «Львівська політехніка». — 2006. — № 566. — С. 68–75.

Поступила 13.02.2014