УДК 517.9: 519.6

В.М. БУЛАВАЦКИЙ, А.В. ГЛАДКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОДНОГО НЕРАВНОВЕСНОГО ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Рассмотрена задача математического моделирования динамики неравновесного диффузионного процесса в насыщенных солевыми растворами геосредах. На основе обобщения дробной производной Хильфера предложена математическая модель для описания дробно-дифференциальной динамики исследуемого процесса и получено численно-аналитическое решение соответствующей этой модели краевой задачи.

Ключевые слова: неравновесный диффузионный процесс, насыщенные геопористые среды, уравнения дробного порядка, бипорядковая дробная производная Хильфера, краевые задачи, численно-аналитические решения.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование динамики миграционных процессов в геосредах является научным направлением, актуальность которого неоспорима, в частности, в задачах геоинформатики, геоматематики, геоэкологии (вопросы охраны подземных вод от загрязнений или засоления, изучение процессов консолидации грунтовых оснований накопителей промышленных и бытовых стоков, содержащих вредные для окружающей среды компоненты и др.). Отметим, что большинство известных математических моделей процессов переноса в насыщенных геопористых средах основано на классических законах переноса [1], недостаточно адекватных в условиях существенного отклонения от равновесного состояния, обусловленного рядом причин, например сложностью пространственно-временной структуры среды, ее неоднородностью, кавернозностью и т.д. [2]. Эффективный подход для описания динамики указанных процессов в существенно неравновесных условиях базируется на идеях интегро-дифференцирования дробного порядка [3, 4], являющегося достаточно адекватным и надежным аппаратом при построении и исследовании соответствующих математических моделей. В частности, на основе дробно-дифференциального подхода построены новые математические модели динамики неравновесных во времени геофильтрационных процессов в пористых и трещиновато-пористых средах и получены замкнутые решения соответствующих краевых задач теории неравновесной геофильтрации [5]. В рамках указанного подхода в [6–8] построены дробно-дифференциальные математические модели некоторых связанных локально-неравновесных во времени (пространстве) процессов миграции солевых растворов в изотермическом и неизотермическом случаях и найдены приближенные решения соответствующих рассмотренным моделям краевых задач.

В настоящей работе изложен подход к математическому моделированию дробно-дифференциальной динамики процесса геомиграции солевых растворов с учетом эффектов временной и слабой пространственной неравновесности. Построена математическая модель неравновесного миграционного процесса, базирующаяся на введенном понятии бипорядковой дробной производной Хильфера, и получено численно-аналитическое решение одномерной задачи неравновесной геомиграции, поставленной в рамках предложенной модели.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ НЕРАВНОВЕСНОГО ГЕОМИГРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим одномерную по геометрической переменной $x \in R$ математическую модель связанного локально-неравновесного во времени миграционного процесса в насыщенной солевым раствором геопористой среде, исходя из следующего обобщения законов Дарси и Фика на случай движения солевых растворов с учетом осмоса и ультрафильтрации:

$$w = D_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x}(-kH + \nu C), \tag{1}$$

$$q_C = D_t^{1-\alpha}\left(-d\frac{\partial C}{\partial x} + CJ_t^{1-\alpha} w + \gamma d_u \frac{\partial H}{\partial x}\right), \tag{2}$$

где $w = w(x, t)$ — скорость фильтрации, $H = p/\gamma$ — избыточный напор, p — поровое давление, γ — удельный вес жидкости, C — концентрация солей в жидкой фазе, k — коэффициент фильтрации, d — коэффициент диффузии, ν — коэффициент осмоса, q_C — плотность диффузионного потока, d_u — коэффициент ультрафильтрации, $J_t^{1-\alpha}$ — оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля порядка $1-\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$, $D_t^{1-\alpha}$ — оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля того же порядка по временной переменной t [3, 4].

На основании (1), (2) уравнения неразрывности фильтрационного потока и соотношения баланса массы солей в жидкой фазе [9] получаем систему уравнений, описывающих динамику локально-неравновесного во времени миграционного процесса солевого раствора в геопористой среде в условиях химического осмоса и ультрафильтрации

$$D_t^{(\alpha)} H = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu_* \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{3}$$

$$\sigma D_t^{(\alpha)} C = d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial}{\partial x}(kH - \nu C)\right) - \gamma d_u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{4}$$

где $D_t^{(\alpha)}$— оператор регуляризованной дробной производной порядка α по переменной t [3, 4], σ — пористость среды, C_v — коэффициент консолидации [9, 10], множитель μ_* в (3) определяется соотношением $\mu_* = \nu C_v / k$.

Отметим, что в случае, например, фильтрационно-консолидационного процесса в насыщенном солевым раствором глинистом геопористом массиве ввиду малости соответствующих фильтрационных скоростей, можно в первом приближении линеаризовать уравнение для определения концентрации, пренебрегая вторым слагаемым в правой части (4). В результате получаем дробно-дифференциальную математическую модель для описания динамики локально-неравновесного во времени фильтрационно-консолидационного процесса в насыщенном солевым раствором глинистом геопористом массиве с учетом осмотических явлений, базирующуюся на следующей системе уравнений:

$$D_t^{(\alpha)} H = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu_* \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{5}$$

$$\sigma D_t^{(\alpha)} C = d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \gamma d_u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Отсюда, в частности, при $\alpha = 1$ получаем систему уравнений динамики равновесного процесса геомиграции солевых растворов в классической постановке [10].

Обобщим систему уравнений модели геомиграции с памятью (5), (6) на случай учета пространственной неравновесности следующим образом:

$$D_t^{(\alpha)} H = D_x^{(\kappa)}(C_v H - \mu_* C), \tag{7}$$

$$\sigma D_t^{(\alpha)} C = D_x^{(\kappa)}(dC - \gamma d_u H), \tag{8}$$

где $D_x^{(\kappa)} u(x)$ — производная Капуто функции $u(x)$ порядка κ $(1 < \kappa \le 2)$ [4–6].

С учетом результатов работы [4] получаем, что из (7), (8) при $\kappa \to 2$ как частный случай следует система уравнений (5), (6) модели, описывающей равновесный по пространственной переменной x геомиграционный процесс.

БИПОРЯДКОВАЯ ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА, ЗАДАЧА ТИПА КОШИ

Определим бипорядковую дробную производную порядков α и β типа μ функции $f(t)$ следующим соотношением:

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu} f(t) = J^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} J^{(1-\mu)(1-\beta)} f(t) \ (0<\alpha, \beta \le 1;\ 0 \le \mu \le 1), \qquad (9)$$

где J^{α} — оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля [3, 4].

Соотношение (9) обобщает общепринятое понятие дробной производной Хильфера [11, 12] порядка α типа μ, обозначаемой $D_t^{\alpha,\mu} f(t)$, поскольку при $\alpha=\beta$ из (9) имеем $D_t^{(\alpha,\alpha)\mu} f(t) \equiv D_t^{\alpha,\mu} f(t)$. Поскольку $D_t^{(\alpha,\beta)1} f(t) \equiv D_t^{(\alpha)} f(t)$, $D_t^{(\alpha,\beta)0} f(t) \equiv D_t^{\beta} f(t)$, бипорядковая дробная производная является непрерывной интерполяцией по параметру $\mu \in [0,1]$ операторов различных порядков: Римана–Лиувилля D_t^{β} порядка β и Капуто $D_t^{(\alpha)}$ порядка α (в общем случае $\alpha \ne \beta$). При этом так как $D_t^{\alpha,1} f(t) \equiv D_t^{(\alpha)} f(t)$ и $D_t^{\alpha,0} f(t) \equiv D_t^{\alpha} f(t)$, производная Хильфера $D_t^{\alpha,\mu} f(t)$ является интерполяцией по параметру μ операторов Капуто и Римана–Лиувилля одного порядка α. Отсюда заключаем, что на основе понятия бипорядковой дробной производной возможно моделирование динамики более широкого класса аномальных процессов переноса, чем на основе общепринятого определения Хильфера. Дробную производную вида (9), обобщающую производную Хильфера на случай наличия двух порядков: α и β, в дальнейшем будем называть бипорядковой дробной производной Хильфера.

Рассмотрим задачу отыскания решения уравнения дробного порядка с бипорядковой производной Хильфера вида

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu} u(t) + \lambda u(t) = f(t) \ (0<\alpha, \beta \le 1;\ 0 \le \mu \le 1), \qquad (10)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$J^{(1-\mu)(1-\beta)} u(0+) = \varsigma_0, \qquad (11)$$

где $f(t)$ — заданная функция источника ($f \in L(0,+\infty)$), $\lambda, \varsigma_0 = \mathrm{const}$. Поскольку при $\alpha=\beta=1$ задача (10), (11) представляет собой задачу Коши, по аналогии будем называть задачу (10), (11) задачей типа Коши.

Предварительно получим формулу для изображения по Лапласу бипорядковой дробной производной. Обозначая $\bar{L}(f(t))$ образ Лапласа функции $f(t) \in L(0,+\infty)$, с учетом определения (9) и теоремы умножения изображений находим

$$\bar{L}(D_t^{(\alpha,\beta)\mu} f(t)) = p^{\mu(\alpha-1)}(p^{1-(1-\mu)(1-\beta)} \bar{L}(f) - J^{(1-\mu)(1-\beta)} f(0+)) =$$

$$= p^{\beta+\mu(\alpha-\beta)} \bar{L}(f) - p^{\mu(\alpha-1)} J^{(1-\mu)(1-\beta)} f(0+), \qquad (12)$$

где $J^{(1-\mu)(1-\beta)} f(0+) = \lim\limits_{t\to 0+} J^{(1-\mu)(1-\beta)} f(t)$ $(f(t) \in L(0,+\infty))$, p — параметр преобразования Лапласа. Отсюда, в частности, при $\alpha=\beta$ получаем известную формулу [11, 12] для преобразования Лапласа производной Хильфера $D_t^{\alpha,\mu} f(t)$.

Возвращаясь к задаче (10), (11), применим к уравнению (10) преобразование Лапласа по временной переменной. С учетом соотношений (11), (12) получаем

$$\bar{L}(u) = \varsigma_0 \frac{p^{\mu(\alpha-1)}}{p^{\beta+\mu(\alpha-\beta)}+\lambda} + \frac{\bar{L}(f)}{p^{\beta+\mu(\alpha-\beta)}+\lambda}, \qquad (13)$$

где $\bar{L}(u), \bar{L}(f)$ — изображения по Лапласу функций u и f соответственно.

Возвращаясь в соотношении (13) к оригиналам, с учетом следующего равенства из [4]:

$$\bar{L}(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})) = \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^{\alpha}-\lambda} \ (\mathrm{Re}\, p > |\lambda|^{1/\alpha}) \qquad (14)$$

(в соотношении (14) $E_{\alpha,\beta}(z)$ — обобщенная функция Миттаг–Леффлера [3, 4, 13]), имеем

$$u(t)=\varsigma_0 t^{(1-\mu)(\beta-1)}E_{\gamma,\gamma+\mu(1-\alpha)}(-\lambda t^{\gamma})+\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}(-\lambda(t-\tau)^{\gamma})f(\tau)d\tau\,, \quad (15)$$

где $\gamma=\beta+\mu(\alpha-\beta)$, $0<\alpha,\beta\le 1$; $0\le\mu\le 1$, $f(t)\in L(0,+\infty)$.

Таким образом, задача типа Коши (10), (11) для уравнения с бипорядковой дробной производной имеет решение (15).

Отметим, что из соотношения (15) при $\alpha=\beta$ получаем решение соответствующей задачи типа Коши для уравнения вида (11) с производной Хильфера порядка α типа μ, приведенное в работе [12].

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ГЕОМИГРАЦИИ В РАМКАХ МОДЕЛИ С БИПОРЯДКОВОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Расширение базы неравновесных геомиграционных процессов, описанных моделью, основанной на системе уравнений (7), (8), достигается с использованием понятия бипорядковой дробной производной. Тогда соответствующая система уравнений модели принимает вид

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu}H=D_x^{(\kappa)}(C_vH-\mu_*C)\,, \quad (16)$$

$$\sigma D_t^{(\alpha,\beta)\mu}C=D_x^{(\kappa)}(dC-\gamma d_uH)\,, \quad (17)$$

где $D_t^{(\alpha,\beta)\mu}$— оператор бипорядковой дробной производной по переменной t.

В рамках данной модели задача моделирования динамики локально-неравновесного во времени и пространстве процесса миграции солевого раствора в глинистом геопористом массиве конечной мощности l сводится (в случае проницаемости граней массива) к решению в области $(0<x<l)\times(0<t<+\infty)$ системы уравнений (16), (17) при условиях

$$H(0,t)=0,\ H(l,t)=0, \quad (18)$$

$$C(0,t)=\varphi_1(t),\ C(l,t)=\varphi_2(t)\,, \quad (19)$$

$$J_t^{(1-\mu)(1-\beta)}H(x,0+)=H_0,\ J_t^{(1-\mu)(1-\beta)}C(x,0+)=C_0, \quad (20)$$

где H_0, C_0 — заданные начальные значения избыточного напора в массиве и концентрации солей, $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ — заданные концентрации солей на входе и выходе фильтрационного потока.

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$x'=\frac{x}{l}\,,\ t'=\left(\frac{C_v}{l^{\kappa}}\right)^{(\beta+\mu(\alpha-\beta))^{-1}}t\,,\ C'=\frac{C}{C_0}\,,\ H'=\frac{H}{H_0}\,,\ \varphi'_1=\frac{\varphi_1}{C_0}\,,\ \varphi'_2=\frac{\varphi_2}{C_0}\,,$$

$$\mu'_*=\frac{\mu_*C_0}{C_vH_0}\,,\ a'_1=\frac{d}{\sigma C_v}\,,\ a'_2=\frac{\gamma d_uH_0}{\sigma C_vC_0}\,. \quad (21)$$

Переходя в (16)–(20) к безразмерным переменным согласно соотношениям (21) и опуская в дальнейшем знак «штрих» над безразмерными величинами, получаем задачу

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu}H=D_x^{(\kappa)}(H-\mu_*C)\,, \quad (22)$$

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu}C=D_x^{(\kappa)}(a_1C-a_2H)\,, \quad (23)$$

$$H(0,t)=0\,,\ H(1,t)=0\,, \quad (24)$$

$$C(0,t)=\varphi_1(t)\,,\ C(1,t)=\varphi_2(t)\,, \quad (25)$$

$$J_t^{(1-\mu)(1-\beta)}H(x,0+)=\varsigma_0,\ J_t^{(1-\mu)(1-\beta)}C(x,0+)=\varsigma_0, \quad (26)$$

где $\varsigma_0=(C_v/l^{\kappa})^{(1-\mu)(1-\beta)(\beta+\mu(\alpha-\beta))^{-1}}$.

Умножая уравнение (22) на неопределенный действительный множитель q ($q\ne 0$) и сложив полученный результат с (23), получаем

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu}(qH+C)=D_x^{(\kappa)}((q-a_2)H+(a_1-q\mu_*)C)\,. \quad (27)$$

Положим в (27)

$$q - a_2 = qr, \quad a_1 - q\mu_* = r, \tag{28}$$

где r — некоторая действительная постоянная, определяемая далее. Из соотношения (28) имеем квадратное уравнение для определения r:

$$r^2 - (1+a_1)r + a_1 - \mu_* a_2 = 0.$$

Отсюда

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}(1 + a_1 \pm \sqrt{\Delta}), \ \Delta = (1-a_1)^2 + 4\mu_* a_2 > 0. \tag{29}$$

Определяемым согласно (29) корням r_i $(i=1,2)$ соответствуют два значения q: $q_i = \dfrac{a_2}{1-r_i}$ $(i=1,2;\ r_i \neq 1)$.

Пусть

$$\psi_i(x,t) = q_i H(x,t) + C(x,t) \ (i=1,2). \tag{30}$$

С учетом (27), (28), (30) получаем для отыскания неизвестных функций ψ_i $(i=1,2)$ совокупность уравнений

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu}\psi_i(x,t) = r_i D_x^{(\kappa)}\psi_i(x,t) \ (i=1,2). \tag{31}$$

Соответствующие краевые условия принимают вид

$$\psi_i(0,t) = \varphi_1(t), \ \psi_i(1,t) = \varphi_2(t) \ (i=1,2), \tag{32}$$

$$J_t^{(1-\mu)(1-\beta)}\psi_i(x,0+) = \varsigma_0(1+q_i) \ (i=1,2). \tag{33}$$

Отметим, что для физической корректности задач (31)–(33) необходимо выполнение условий $r_i > 0$ $(i=1,2)$. Неравенство $r_1 > 0$ очевидно выполнено, а неравенство $r_2 > 0$ имеет место при $\nu\gamma d_u < kd$. Приведем граничные условия (32) к соответствующим однородным с помощью подстановки

$$u^{(i)}(x,t) = \psi_i(x,t) - \upsilon(x,t) \ (i=1,2), \tag{34}$$

где

$$\upsilon(x,t) = \varphi_1(t) + x(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)). \tag{35}$$

В результате получаем следующие задачи:

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu}u^{(i)}(x,t) = r_i D_x^{(\kappa)}u^{(i)}(x,t) + f(x,t) \ (i=1,2), \tag{36}$$

$$u^{(i)}(0,t) = 0, \ u^{(i)}(1,t) = 0 \ (i=1,2), \tag{37}$$

$$J_t^{(1-\mu)(1-\beta)}u^{(i)}(x,0+) = \theta^{(i)}(x) \ (i=1,2), \tag{38}$$

где

$$\theta^{(i)}(x) = \varsigma_0(1+q_i) - J_t^{(1-\mu)(1-\beta)}\upsilon(x,0+), \quad f(x,t) = -D_t^{(\alpha,\beta)\mu}\upsilon(x,t),$$

а функции $u^{(i)}(x,t)$ $(i=1,2)$, $\upsilon(x,t)$ определяются соотношениями (34), (35).

На основе конечноразностного подхода [14] можно найти численные решения задач (36)–(38) как главной составляющей в моделировании динамики рассматриваемого процесса. Однако, если для моделирования неравновесных по пространству свойств геомиграционного процесса использовать модификацию производной Капуто следующего вида (локальный учет эффектов пространственной неравновесности):

$$D_x^{(\kappa)}u(x) = \frac{1}{2\Gamma(2-\kappa)}\int_{x-h}^{x+h}\frac{u''(s)ds}{|x-s|^{\kappa-1}}$$

($h \le x \le 1-h,\ 0 < h << 1,\ 1 < \kappa \le 2$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [13]), то возможно построение замкнутых численно-аналитических решений задач вида (36)–(38). Указанные решения строятся на базе совместного использования дифференциально-разностного метода в совокупности с методом суммарных представлений [15] и последовательность соответствующих выкладок, кратко состоит в следующем.

Введем в рассмотрение сеточную область $\omega_h = \{x_j : x_j = jh \quad (j = \overline{0, m+1})\}$ (h — шаг сетки по геометрической переменной) и поставим в соответствие задачам (36)–(38) следующие дифференциально-разностные задачи:

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu} u^{(i)}(t) = \rho^{(i)}(T^{(m)} - 2E)u^{(i)}(t) + f(t) \ (i = 1,2), \tag{39}$$

$$J_t^{(1-\mu)(1-\beta)} u^{(i)}(0+) = \theta^{(i)} \ (i = 1,2), \tag{40}$$

где

$$u^{(i)}(t) = [u_1^{(i)}(t), u_2^{(i)}(t), \ldots, u_m^{(i)}(t)]^{\mathrm{T}}, \ f(t) = [f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)]^{\mathrm{T}},$$

$$\theta^{(i)} = [\theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)}, \ldots, \theta_m^{(i)}]^{\mathrm{T}}, \ u_k^{(i)}(t) = u^{(i)}(x_k, t), \ \theta_k^{(i)} = \theta^{(i)}(x_k),$$

$$f_k(t) = f(x_k, t), \ \rho^{(i)} = \frac{r_i}{h^{\kappa}\Gamma(3-\kappa)},$$

$T^{(m)}$ — квадратная матрица порядка m, определенная в [15], E — единичная матрица m-го порядка.

Отметим, что в правой части соотношения (39) использована следующая аппроксимация производной $D_x^{(\kappa)} u$:

$$D_x^{(\kappa)} u\Big|_{x_j} \approx \frac{u_{\bar{x}x}}{2\Gamma(2-\kappa)} \int_{x_j-h}^{x_j+h} \frac{ds}{|x_j - s|^{\kappa-1}} = \frac{h^{2-\kappa}}{\Gamma(3-\kappa)} u_{\bar{x}x} = \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^{\kappa}\Gamma(3-\kappa)}.$$

Введем в рассмотрение $P^{(m)}$-трансформации векторов $u^{(i)}, f, \theta^{(i)}$ соотношениями

$$\hat{u}^{(i)}(t) = P^{(m)} u^{(i)}(t), \ \hat{f}(t) = P^{(m)} f(t), \ \hat{\theta}^{(i)} = P^{(m)} \theta^{(i)} \ (i = 1,2),$$

где $P^{(m)}$ — фундаментальная по отношению к матрице $T^{(m)}$ матрица порядка m, определенная следующим соотношением из [15]:

$$P^{(m)} = [p_{kj}]_{k,j=1}^{m} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \left[\sin\left(\frac{\pi kj}{m+1}\right)\right]_{k,j=1}^{m}.$$

Умножая (39), (40) слева на матрицу $P^{(m)}$, с учетом равенства $T^{(m)} = P^{(m)} \Lambda^{(m)} P^{(m)}$ ($\Lambda^{(m)} = [\lambda_1^{(m)}, \lambda_2^{(m)}, \ldots, \lambda_m^{(m)}]$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $T^{(m)}$, $\lambda_k^{(m)} = 2\cos(\pi k / (m+1))$ $(k = \overline{1, m})$) из [15] получаем в изображениях задачи, записываемые в скалярной форме в виде

$$D_t^{(\alpha,\beta)\mu} \hat{u}_j^{(i)}(t) + \omega_j^{(i)} \hat{u}_j^{(i)}(t) = \hat{f}_j(t) \ (i = 1,2; \ j = \overline{1, m}), \tag{41}$$

$$J_t^{(1-\mu)(1-\beta)} \hat{u}_j^{(i)}(0+) = \hat{\theta}_j^{(i)} \quad (i = 1,2; \ j = \overline{1, m}), \tag{42}$$

где $\omega_j^{(i)} = \rho^{(i)}(2 - \lambda_j^{(m)})$ $(i = 1,2; \ j = \overline{1, m})$.

Решения задач типа Коши (41), (42) на основании соотношения (15) запишутся в виде

$$\hat{u}_j^{(i)}(t) = \hat{\theta}_j^{(i)} t^{(1-\mu)(\beta-1)} E_{\gamma, \gamma+\mu(1-\alpha)}(-\omega_j^{(i)} t^{\gamma}) +$$

$$+ \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}(-\omega_j^{(i)} (t-\tau)^{\gamma}) \hat{f}_j(\tau) d\tau \ (i = 1,2; \ j = \overline{1, m}). \tag{43}$$

Возвращаясь в соотношениях (43) в область оригиналов по геометрической переменной, получаем решение рассматриваемых дифференциально-разностных задач в виде

$$u_j^{(i)}(t) = \Phi_j^{(i)}(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_{jk}^{(i)}(t-\tau) f_k(\tau)\, d\tau \ (i = 1,2; \ j = \overline{1, m}), \tag{44}$$

где

$$\Phi_j^{(i)}(t)=t^{(1-\mu)(\beta-1)}\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\theta_k^{(i)}p_{js}p_{sk}E_{\gamma,\gamma+\mu(1-\alpha)}(-\omega_s^{(i)}t^{\gamma}), \qquad (45)$$

$$G_{jk}^{(i)}(t)=t^{\gamma-1}\sum_{s=1}^{m}p_{js}p_{sk}E_{\gamma,\gamma}(-\omega_s^{(i)}t^{\gamma}) \ (i=1{,}2;\ j=\overline{1,m};\ k=\overline{1,m}). \qquad (46)$$

Осуществляя переход к функциям напора H и концентрации C согласно соотношений

$$H=\frac{\psi_1-\psi_2}{q_1-q_2}, \quad C=\frac{q_1\psi_2-q_2\psi_1}{q_1-q_2},$$

где $\psi_i(x,t)=u^{(i)}(x,t)+\upsilon(x,t)$ $(i=1{,}2)$, получаем с учетом (44)–(46) численно-аналитическое решение рассматриваемой задачи (22)–(26), непрерывное по временной и дискретное по геометрической переменной. При этом приведенные соотношения при $\kappa\to 2$ дают численно-аналитическое решение соответствующей геомиграционной задачи в условиях учета лишь временной неравновесности динамики процесса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе понятия бипорядковой дробной производной Хильфера построена неклассическая математическая модель для описания дробно-дифференциальной динамики неравновесного диффузионного процесса в насыщенных геосредах и получено численно-аналитическое решение соответствующей краевой задачи поставленной в рамках этой модели.

Преимуществом найденного решения является, в частности, возможность выборочного счета значений искомых характеристик процесса в фиксированных точках сеточной области в заданный момент времени, что позволяет сократить время вычисления решения и удобно в инженерных приложениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лыков А.В. Тепломассообмен. — М.: Энергия, 1978. — 479 с.
2. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. — Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 288 с.
3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 p.
4. Podlubny I. Fractional differential equations. — New York: Acad. Press, 1999. — 341 p.
5. Булавацкий В.М. Некоторые математические модели геоинформатики для описания процессов переноса в условиях временной нелокальности // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 3. — С. 128–137.
6. Булавацкий В.М. Численное моделирование динамики некоторых аномальных процессов переноса // Допов. НАН Украины. — 2012. — № 12. — С. 31–40.
7. Bulavatsky V.M. Nonclassical mathematical model in geoinformatics to solve dynamic problems for nonequilibrium nonisothermal seepage fields // Cybernetics and systems analysis. — 2011. — **47**, N 6. — P. 899–906.
8. Bulavatsky V.M., Krivonos Yu.G. Mathematical modeling in the geoinformation problem of the dynamics of geomigration under space-time nonlocality // Cybernetics and systems analysis. — 2012. — **48**, N 4. — P. 539–546.
9. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. — Киев: Наук. думка, 1991. — 264 с.
10. Kaczmarek M., Huekel T. Chemo-mechanical consolidation of clays: analytical solution for a linearized one-dimensional problem // Transport in porous media. — 1998. — **32**. — P. 49–74.
11. Hilfer R. Fractional time evolution// Applications of fractional calculus in physics / Ed. R. Hilfer. — Singapore: World scientific, 2000. — P. 87–130.
12. Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives // Fractional calculus and applied analysis. — 2009. — **12**. — № 3. — P. 299–318.
13. Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. — New York: Dover, 1965. — 831 p.
14. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
15. Polozhii G.N. The method of summary representation for numerical solution of problems of mathematical physics. — Oxford: Pergamon Press, 1965. — 283 p.

Поступила 09.10.2013