УДК 519.6:539.3

А.А. АРАЛОВА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА

Аннотация. Проведен анализ термоупругого состояния составного цилиндра. Представлены классические обобщенные задачи, определенные на классах разрывных функций, получены явные выражения градиентных невязок (с помощью решения прямых и сопряженных задач) для реализации градиентных методов Алифанова, путем использования функций метода конечных элементов построены вычислительные схемы повышенного порядка точности численной дискретизации прямых и сопряженных задач. Представлены результаты решения некоторых модельных примеров.

Ключевые слова: математическое моделирование, термоупругое состояние, цилиндрические составные тела, метод конечных элементов, разрывное решение, градиентные методы идентификации.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] на основе результатов теории оптимального управления состояниями различных многокомпонентных распределенных систем [2, 3] предложена технология построения явных выражений градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами [4] различных параметров многокомпонентных распределенных систем. В работах [5–8] эта технология использовалась для идентификации параметров задач осесимметричного, теплового, термоупругого деформирования длинного полого цилиндра.

В настоящей статье рассмотрены методы решения с помощью градиентных методов обратных задач термоупругости для составного полого цилиндра. Представлены результаты решения некоторых модельных обратных краевых задач.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРОГОГО СОСТОЯНИЯ СОСТАВНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим длинный составной полый изотропный цилиндр. Исходя из [2, 9] и учитывая симметрию, опишем термоупругое состояние его с помощью уравнения

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=0,\ \ r\in\overline{\Omega}. \tag{1}$$

Здесь $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1=(r_1,\xi)$, $\Omega_2=(\xi,r_2)$, $0<r_1<\xi<r_2<\infty$, $\overline{\Omega}=[r_1,r_2]$, r_1, r_2 — радиусы внутренней и внешней круговых поверхностей соответственно; r — радиальная координата цилиндрической системы координат; $\sigma_r=\sigma_r(y,T)$, $\sigma_\varphi=\sigma_\varphi(y,T)$ — компоненты тензора напряжений.

Пусть

$$\sigma_r=(\lambda+2\mu)\varepsilon_r+\lambda\varepsilon_\varphi-(3\lambda+2\mu)\alpha T,\ \ \sigma_\varphi=\lambda\varepsilon_r+(\lambda+2\mu)\varepsilon_\varphi-(3\lambda+2\mu)\alpha T,$$
$$\varepsilon_r=\frac{dy}{dr},\ \ \varepsilon_\varphi=\frac{y}{r}, \tag{2}$$

$y = y(r)$ — радиальное смещение точки с координатой r; λ, μ — постоянные Ляме; α — коэффициент линейного температурного расширения; $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi$ — компоненты тензора деформаций; T — изменение температуры. С учетом (2) равенство (1) принимает вид

$$-\left\{(\lambda+2\mu)\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right)-(\lambda+2\mu)\frac{y}{r}-(3\lambda+2\mu)\alpha r\frac{dT}{dr}\right\}=0,\ \ r\in\Omega. \tag{3}$$

Изменение температуры T удовлетворяет уравнению

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rk\frac{dT}{dr}\right)=\bar{f},\ \ r\in\Omega\,, \tag{4}$$

где k — коэффициент теплопроводности. На внутренней и внешней поверхностях составного цилиндра заданы напряжения

$$\sigma_r\,|_{r=r_i}=-p_i,\ \ i=1,2. \tag{5}$$

Краевые условия принимают вид

$$-k\frac{dT}{dr}=-\alpha_1 T+\beta_1,\ \ r=r_1, \tag{6}$$

$$k\frac{dT}{dr}=u,\ \ r=r_2, \tag{7}$$

где $\alpha_1=\mathrm{const}>0,\ \beta_1=\mathrm{const}$. В точке $r=\xi$ на круговой поверхности контакта составляющих Ω_1,Ω_2 тела условия сопряжения неидеального контакта имеют вид

$$[y]=0,\ \ [\sigma_r(y)]=0,\ \ \left[k\frac{dT}{dr}\right]=0,\ \ \left\{k\frac{dT}{dr}\right\}^{\pm}=\bar{r}\,[T]. \tag{8}$$

Здесь первые два условия выражают непрерывность радиального смещения и нормального напряжения на поверхности контакта, а третье и четвертое — наличие слаботеплопроницаемого слоя с термическим сопротивлением $\bar{r}=\mathrm{const}\geq 0$, $[\phi]=\phi^+-\phi^-$, $\phi^{\pm}=\{\phi\}^{\pm}=\phi(\xi\pm 0)$.

2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕРМОУПРУГИМИ СОСТОЯНИЯМИ СОСТАВНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Пусть заданы наблюдения

$$\begin{gathered} Z(u)=Cy(u),\\ Cy(u)=y(u;r_2), \end{gathered} \tag{9}$$

где $C\in\mathcal{L}(V,\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ — некоторое гильбертово пространство. Поставим в соответствие каждому управлению $u\in\mathcal{U}=R$ значение функционала стоимости

$$J(u)=\|\,Cy(u)-z_g\,\|^2_{\mathcal{H}}+(\bar{a}u,u)_{\mathcal{U}}\,, \tag{10}$$

где $z_g\in\mathcal{H}=R,\ (\bar{a}u,u)_{\mathcal{U}}\geq\nu_0\|\,u\,\|^2_{\mathcal{U}},\ \forall u\in\mathcal{U},\ \nu_0=\mathrm{const}>0,\ \bar{a}=\mathrm{const}>0.$

Определение 1. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (3)–(8) называется вектор-функция $Y=(y,T)\in\mathcal{H}$, которая $\forall z=(z_1,z_2)\in\mathcal{H}$ удовлетворяет тождествам

$$a(y,z_1)=l(T;z_1), \tag{11}$$

$$a_0(T,z_2)=l_0(u;z_2), \tag{12}$$

где $\mathcal{H}=V\times V_0$, $V=\{v(r):v\,|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,2;[v]\,|_{\xi}=0\}$; $V_0=\{v(r):v\,|_{\Omega_i}\in$ $\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,2\}$, $W_2^1(\Omega_i)$ — пространство функций Соболева, определенных на области Ω_i, $i=1,2,$

$$a(y,w)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} r\left((\lambda+2\mu)\left(\frac{dy}{dr}\frac{dw}{dr}+\frac{y}{r}\frac{w}{r}\right)+\lambda\left(\frac{y}{r}\frac{dw}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{w}{r}\right)\right)dr,$$

$$a_0(T,w)=\sum_{i=1}^{2}\left(\int_{\Omega_i}\left(rk\frac{dT}{dr}\frac{dw}{dr}\right)dr\right)+\bar{r}[T][w]+\bar{\alpha}r_2T(r_2)w(r_2),$$
$$l(T;w)=\sum_{i=1}^{2}\left(\int_{\Omega_i}r(3\lambda+2\mu)\alpha T\left(\frac{dw}{dr}+\frac{w}{r}\right)dr\right)+r_1p_1w(r_1)-r_2p_2w(r_2), \qquad (13)$$
$$l_0(u;w)=\sum_{i=1}^{2}\left(\int_{\Omega_i}r\bar{f}w\,dr\right)+r_1uw(r_1)+\beta r_2w(r_2).$$

Теорема 1. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенное решение $Y=(y,T)$ краевой задачи (3)–(8) существует и единственно в V.

Справедливость теоремы устанавливается на основе леммы Лакса–Мильграма [10].

Рассмотрим $y'=y(u')$, $y''=y(u'')$ — решения из V задачи (11), которые при элементе $u\in\mathcal{U}$ равны соответственно u', u'' и определяются фиксированными единственными решениями $T'=T(u')$, $T''=T(u'')$ задачи (12) из V_0. Учитывая обобщенное неравенство Фридрихса [11], имеем

$$\alpha_0'\,|\,y'-y''\,|^2\,(r_2)\le\alpha_0\,||\,y'-y''\,||_V^2\le a(y'-y'',\,y'-y'')=l(T';\,y'-y'')-l(T';\,y'-y'')=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}r(3\lambda+2\mu)\alpha(T'-T'')\left(\frac{d(y'-y'')}{dr}+\frac{y'-y''}{r}\right)dr\le c_0\,||\,T'-T''\,||\;||\,y'-y''\,||_V,$$

$$||\,T'-T''\,||_V^2\le c_1a_0(T'-T'',\,T'-T'')=l_0(u';\,y'-y'')-l_0(u'';\,y'-y'')\le$$

$$\le r_1|\,u'-u''\,|\,|T'-T''\,|\,(r_2)\le c_1'\,|\,u'-u''\,|\,||\,T'-T''\,||_V.$$

Значит,
$$|\,y'-y''\,|\,(r_2)\le c_0\,|\,u'-u''\,|. \qquad (14)$$

Полученное неравенство обеспечивает непрерывность на $\mathcal{U}$ линейного функционала $L(\cdot)$ и билинейной формы $\pi(\cdot,\cdot)$, где

$$\pi(u,v)=(y(u)-y(0),\;y(v)-y(0))_{\mathcal{H}}+(\bar{a}u,v)_{\mathcal{U}},$$
$$L(v)=(z_g-y(0),\;y(v)-y(0))_{\mathcal{H}}.$$

Функционал (10) можно представить в следующем виде:

$$J(u)=||\,y(u)-z_g\,||_{\mathcal{H}}^2+(\bar{a}u,u)=\pi(u,u)-2L(u)+||\,z_g-y(0)\,||_{\mathcal{H}}^2, \qquad (15)$$

где $(y(u),\,y(v))_{\mathcal{H}}=y(u;r_2)\,y(v;r_2)$, $(u,v)_{\mathcal{U}}=uv$.

На основании [14] доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть состояние системы определяется как единственное решение (11), где T — единственное решение (12). Тогда существует единственный элемент выпуклого замкнутого в $\mathcal{U}$ множества $\mathcal{U}_\partial$, для которого

$$J(u)=\inf_{v\in\mathcal{U}_\partial}J(v). \qquad (16)$$

Исходя из (15), $\lim\limits_{\lambda\to0}\dfrac{J(u+\lambda(v-u))-J(u)}{\lambda}=\pi(u,v-u)-L(v-u)\ge0$. Тогда неравенство

$$\pi(u,v-u)\ge L(v-u),\;\;\forall v\in\mathcal{U}_\partial, \qquad (17)$$

— необходимое и достаточное условие оптимальности управления $u\in\mathcal{U}_\partial$.

Исходя из [12], сопряженное состояние $Y^{*}=(p,\psi)\in\mathcal{H}^{*}=\mathcal{H}$ для каждого управления $v\in\mathcal{U}$ определяется как обобщенное решение краевой задачи, заданной равенствами:

$$-(\lambda+2\mu)\left(\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right)-\frac{p}{r}\right)=0,\ r\in\Omega,$$

$$\sigma_r(p)\Big|_{r=r_1}=0,\ \sigma_r(p)\Big|_{r=r_2}=\frac{1}{r_2}(y(v;r_2)-z_g),\ \sigma_r(p)=(\lambda+2\mu)\frac{dp}{dr}+\lambda\frac{p}{r},$$

$$-\frac{d}{dr}\left(rk\frac{d\psi}{dr}\right)-r(3\lambda+2\mu)\alpha\left(\frac{dp}{dr}+\frac{p}{r}\right)=0,\ r\in\Omega,\tag{18}$$

$$-k\frac{d\psi}{dr}\Bigg|_{r=r_1}=0,\ k\frac{d\psi}{dr}\Bigg|_{r=r_2}=-\bar{\alpha}\psi(r_2),\ [p]\big|_{r=\xi}=0,\ [\sigma_r(p)]\big|_{r=\xi}=0,$$

$$\left[k\frac{d\psi}{dr}\right]\Bigg|_{r=\xi}=0,\ \left\{k\frac{d\psi}{dr}\right\}^{\pm}=\bar{r}[\psi]\big|_{r=\xi}.$$

Определение 2. Обобщенным решением краевой задачи (18) называется вектор-функция $Y^{*}=(p,\psi)\in\mathcal{H}^{*}=\mathcal{H}$, которая $\forall z=(z_1,z_2)\in\mathcal{H}$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(p,z_1)=(y(u_n;r_2)-z_g)z_1(r_2),\tag{19}$$

$$a_0(\psi,z_2)-\int_{\Omega}\left(r(3\lambda+2\mu)\alpha z_2\left(\frac{dp}{dr}+\frac{p}{r}\right)\right)dr=0.\tag{20}$$

Теорема 3. Краевая задача (18) имеет единственное обобщенное решение $Y^{*}=(p,\psi)\in\mathcal{H}$, где $p\in V$ определяется как единственный элемент, доставляющий минимум функционалу

$$\Phi_1(w)=a(w,w)-2(y-z_g)w\big|_{r=r_2},\tag{21}$$

и является единственным в V решением задачи (19), заключающийся в нахождении функции $p\in V$, удовлетворяющий $\forall z_1\in V$ тождеству (19), а элемент $\psi\in V_0$ определяется как единственная функция $\psi\in V_0$, которая достовляет на V_0 минимум функционалу

$$\Phi_{01}(w)=a_0(w,w)-2\int_{\Omega}\left(r(3\lambda+2\mu)\alpha w\left(\frac{dp}{dr}+\frac{p}{r}\right)\right)dr\tag{22}$$

и является единственным в V_0 решением задачи в слабой постановке: найти элемент $\psi\in V_0$, удовлетворяющий тождеству (20), где функция p предварительно определена как решение эквивалентных задач (19), (21).

Следовательно, выполнение тождеств (19), (20) и неравенства

$$(y(u)-z_g,\ y(v)-y(u))_{\mathcal{H}}+(\bar{a}u,v-u)_{\mathcal{U}}\geq 0,\ \forall v\in\mathcal{U},\tag{23}$$

является необходимым и достаточным условием существования оптимального управления $u\in\mathcal{U}_{\partial}$.

Выбираем в (20) вместо z_2 разность $T(v)-T(u)$ с учетом симметрии билинейной формы $a_0(\cdot,\cdot)$ и тождества (12), просуммируем попарно левые и правые части полученного равенства с выражением (19) и примем $z_1=y(v)-y(u)$. В результате имеем

$$(y(u)-z_g, y(v)-y(u))_{\mathcal{H}} = a((y(v)-y(u), p))-$$

$$-\int_{\Omega}\left(r(3\lambda+2\mu)\alpha(T(v)-T(u))\left(\frac{dp}{dr}+\frac{p}{r}\right)\right)dr + r_1(v-u,\psi)\Big|_{r=r_1},$$

т.е. $(y(u)-z_g, y(v)-y(u))_{\mathcal{H}} = r_1(\psi, v-u)\Big|_{r=r_1}$. Учитывая полученное равенство, неравенство (23) запишем в виде

$$(r\psi, v-u)\Big|_{r=r_1} + (\bar{a}u, v-u)_{\mathcal{U}} \ge 0, \ \forall v \in \mathcal{U}_{\partial}. \tag{24}$$

Таким образом, выполнение соотношений (19), (20), (24) — необходимое и достаточное условие оптимальности управления $u \in \mathcal{U}_{\partial}$. При $\mathcal{U}_{\partial} = \mathcal{U}$ (случай отсутствия ограничений) из (24) следует

$$r_1\psi(r_1) + \bar{a}u = 0. \tag{25}$$

Итак, при отсутствии ограничений с помощью (25) можно исключить управление u из (12). В результате получаем задачу: найти вектор-функцию $(Y, Y^*) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}$, которая удовлетворяет системе тождеств

$$a(y,v) = l(T;v), \ \forall v \in V, \ a_0(T,w) = l_0\left(\frac{-r_1\psi(r_1)}{\bar{a}}; w\right), \ \forall w \in V_0,$$

$$a(p, z_1) = (y-z_g, z_1)_{\mathcal{H}}, \ \forall z_1 \in V, \tag{26}$$

$$a_0(\psi, z_2) = \int_{\Omega} r(3\lambda+2\mu)\alpha\left(\frac{dp}{dr}+\frac{p}{r}\right)z_2\,dr, \ \forall z_2 \in V_0.$$

Решив задачу (26), оптимальное управление u найдем с помощью выражения $u = \dfrac{-r_1\psi(r_1)}{\bar{a}}$.

3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ СОСТАВЛЕННОЙ ТОЛСТОЙ ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Задача (11) эквивалентна задаче поиска минимума функционала $\Phi(v) = a(v,v) - 2l(T;v)$. Рассмотрим конечномерное подпространство $\mathcal{H}_2^N \subset \mathcal{H}$ непрерывных на $[r_1, r_2]$ функций, являющихся полиномами второй степени $V_2^N(r) = \alpha_1^i + \alpha_2^i r + \alpha_3^i r^2$, на каждом элементарном отрезке $[r^i, r^{i+1}]$, $r_1 = r^0 < r^1 < \ldots < r^N = r_2$. Тогда функционал $\Phi(v) = a(v,v) - 2l(T;v)$ можно представить в следующем виде:

$$\Phi(\Psi_n; v_2^N) = a(v_2^N; v_2^N) - 2\bar{l}(\Psi_n; v_2^N) =$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_j} r\left((\lambda_j+2\mu_j)\frac{dv_2^N}{dr}\frac{dv_2^N}{dr} + \lambda\left(\frac{v_2^N}{r}\frac{dv_2^N}{dr} + \frac{dv_2^N}{dr}\frac{v_2^N}{r}\right)+\right.$$

$$\left.+(\lambda_j+2\mu_j)\frac{v_2^N}{r}\frac{v_2^N}{r}\right)dr - 2e_n v_2^N(r_2) =$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\lambda_j+2\mu_j}{6h_{ij}}\omega_{ij}^T\begin{pmatrix}14r_{ij}+3h_{ij} & -16r_{ij}-4h_{ij} & 2r_{ij}+h_{ij}\\ -16r_{ij}-4h_{ij} & 32r_{ij}+16h_{ij} & -16r_{ij}-12h_{ij}\\ 2r_{ij}+h_{ij} & -16r_{ij}-12h_{ij} & 14r_{ij}+11h_{ij}\end{pmatrix}\omega_{ij}+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_j\omega_{ij}^T\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\omega_{ij}+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{N-1}(\lambda_j+2\mu_j)\left(\ln\left(\frac{r_{ij}+h_{ij}}{r_{ij}}\right)\omega_{ij}^T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\omega_{ij}+\right.$$

$$+\left(1-\frac{r_{ij}}{h_{ij}}\ln\left(\frac{r_{ij}+h_{ij}}{r_{ij}}\right)\right)\omega_{ij}^T\begin{pmatrix}-6&4&-1\\4&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\omega_{ij}+\frac{1}{h_{ij}}\left(\frac{h_{ij}}{2}-r_{ij}+\frac{(r_{ij})^2}{h_{ij}}\ln\left(\frac{r_{ij}+h_{ij}}{r_{ij}}\right)\right)\times$$

$$\times\omega_{ij}^T\begin{pmatrix}13&-16&5\\-16&16&-4\\5&-4&1\end{pmatrix}\omega_{ij}+\frac{1}{(h_{ij})^2}\left(\frac{(h_{ij})^2}{3}-\frac{r_{ij}h_{ij}}{2}+(r_{ij})^2-\frac{(r_{ij})^3}{h_{ij}}\ln\left(\frac{r_{ij}+h_{ij}}{r_{ij}}\right)\right)\times$$

$$\times\omega_{ij}^T\begin{pmatrix}-12&20&-8\\20&-32&12\\-8&12&-4\end{pmatrix}\omega_{ij}+\frac{1}{(h_{ij})^3}\left(\frac{(r_{ij})^4}{h_{ij}}\ln\left(\frac{r_{ij}+h_{ij}}{r_{ij}}\right)-(r_{ij})^3-\frac{7}{2}(r_{ij})^2h_{ij}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}r_{ij}(h_{ij})^2+\frac{(h_{ij})^3}{4}\right)\omega_{ij}^T\begin{pmatrix}4&-8&4\\-8&16&-8\\4&-8&4\end{pmatrix}\omega_{ij}-2e_n v_2^N(r_2)\right)=V^TAV-2V^TB, \quad (27)$$

где $V^T=(V_0,V_1,\ldots,V_N)$ — значение решения $\Psi(u_n;r)$ в узловых точках r_i, $r_{i+1/2}$, $i=\overline{0,N}$, A — симметричная положительно-определенная матрица, $B=\{b_i\}_{i=0}^N$.

Задача (12) эквивалентна задаче поиска минимума функционала $\Phi_0(w)=a_0(w,w)-2l_0(u;w)$, который можно записать в виде

$$\Phi_1(\Psi;v_2^N)=a_1(v_2^N;v_2^N)-2\bar{l}_1(\Psi;v_2^N)=\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_j}rk_j\left(\frac{dv_2^N}{dr}\right)^2dr+$$

$$+\bar{r}[v_2^N]^2+\bar{\alpha}r_1(v_2^N)^2-2\left(\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_j}rv_2^N(3\lambda_j+2\mu_j)\alpha_j\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\Psi}{r}\right)dr\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{k_j}{6h_{ij}}\bar{\omega}_{ij}^T\begin{pmatrix}14r_{ij}+3h_{ij} & -16r_{ij}-4h_{ij} & 2r_{ij}+h_{ij}\\ -16r_{ij}-4h_{ij} & 32r_{ij}+16h_{ij} & -16r_{ij}-12h_{ij}\\ 2r_{ij}+h_{ij} & -16r_{ij}-12h_{ij} & 14r_{ij}+11h_{ij}\end{pmatrix}\bar{\omega}_{ij}+$$

$$+v_0^2-\sum_{j=1}^{2}(3\lambda_j+2\mu_j)\alpha_j\sum_{i=0}^{N-1}\bar{\omega}_{ij}^T\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\alpha_1^{ij}h_{ij}+\frac{1}{6}\alpha_2^{ij}r_{ij}-\frac{1}{20}\alpha_3^{ij}h_{ij}\\ \frac{2}{3}\alpha_1^{ij}h_{ij}+\frac{2}{3}\alpha_2^{ij}(r_{ij}+h_{ij})+2\alpha_3^{ij}\left(\frac{1}{3}r_{ij}+\frac{3}{10}h_{ij}\right)\\ \frac{1}{6}\alpha_1^{ij}h_{ij}+\frac{1}{3}\alpha_2^{ij}\left(\frac{1}{2}r_{ij}+h_{ij}\right)+\alpha_3^{ij}\left(\frac{1}{3}r_{ij}+\frac{9}{20}h_{ij}\right)\end{pmatrix}=$$

$$=V^TAV-2V^TB. \quad (28)$$

Здесь $V^T=(V_0, V_1, \ldots, V_N)$ — значение решения $p(u_n; r)$ в узловых точках r_i, $r_{i+1/2}$, $i=\overline{0, N}$, A — симметричная положительно-определенная матрица, $B=\{b_i\}_{i=0}^N$, а $(\alpha_1^{ij}; \alpha_2^{ij}; \alpha_3^{ij})=(\Psi_{ij}; (4\Psi_{ij+1/2}-\Psi_{ij+1}-3\Psi_{ij}); (2\Psi_{ij+1}+2\Psi_{ij}-4\Psi_{ij+1/2}))$.

При каждом $u=u_n$ для приближения $(y_2^N, T_2^N)\in\mathcal{H}_2^N\times\mathcal{H}_2^N$ решения $(y, T)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ задачи (11), (12) имеет место оценка

$$\begin{gathered} \| y(u_n)-y_2^N(u_n)\|_{W_2^1(r_1, r_2)}\leq Ch^2, \\ \| T(u_n)-T_2^N(u_n)\|_{W_2^1(r_1, r_2)}\leq C_1 h^2, \end{gathered} \tag{29}$$

где $C, C_1=\text{const}$, $h=\max h_i$, $h_i=r^{i+1}-r^i$.

4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ЗА СМЕЩЕНИЕМ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Пусть состояние системы описывается краевой задачей (3)–(8), где $u\in\mathcal{U}$ неизвестен. Считаем, что в точке $r=r_2$ известно смещение

$$y(r_2)=f_0. \tag{30}$$

В результате получена задача (3)–(8), (30), которая заключается в определении значения $u\in\mathcal{U}$, при котором составляющая решения $Y=(y, T)$ краевой задачи (3)–(8) удовлетворяет равенству (30). Построим функционал-невязку

$$J(u)=\frac{1}{2}| y(u; r_2)-f_0|^2. \tag{31}$$

При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ вместо классического решения задачи (3)–(8) будем использовать ее обобщенное решение, т.е. решение $Y=(y, T)\in\mathcal{H}$ задачи (11), (12). Тем самым получена задача (11), (12), (31), заключающаяся в определении элемента $u\in\mathcal{U}$, при котором выполняется равенство

$$J(u)=\inf_{v\in\mathcal{U}} J(v) \tag{32}$$

при условии (11), (12). Для решения задачи (11), (12), (31) используем градиентные методы Алифанова [4], где $(n+1)$-е приближение u_{n+1} искомого решения $u\in\mathcal{U}$ находится с помощью

$$u_{n+1}=u_n-\beta_n p_n, \ n=0, 1, \ldots, n^*. \tag{33}$$

Направление спуска p_n и коэффициент β_n можно определить с помощью формулы для метода минимальных невязок

$$p_n=J'_{u_n}, \ \beta_n=\frac{\| e_n\|^2}{\| J'_{u_n}\|^2}, \tag{34}$$

где J'_{u_n} — градиент функционала (31) при $u=u_n$, $e_n=Au_n-f_0$, $Au_n=y(u_n; r_2)$.

Имеет место равенство

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{J(u+\lambda(v-u))-J(u)}{\lambda}=\pi(u, v-u)-L(v-u)=(y(u)-f_0, y(v)-y(u))_{\mathcal{H}}. \tag{35}$$

Значит,

$$\langle J'_u, v-u\rangle=(y(u)-f_0, y(v)-y(u))_{\mathcal{H}}. \tag{36}$$

Учитывая (35), (36), на основании краевой задачи (18), т.е. на основании соответствующей ей задачи в слабой постановке (19), (20), получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = (y(u_n) - f_0, y(u_{n+1}) - y(u_n))\big|_{r=r_2} = r_1 \psi(r_1) \Delta u_n,$$

где

$$J'_{u_n} = r_1 \psi(r_1). \qquad (37)$$

Таким образом, для получения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (11), (12), (31) необходимо решить прямую задачу (11), (12) при $u = u_n$, если невязка $\| e_n \|$ не удовлетворяет условию $\| e_n \| < \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число, то решаем сопряженную задачу (18) в слабой постановке (19), (20). С помощью составляющей ψ ее решения $Y^* = (p, \psi)$ по формуле (37) определяем градиент J'_{u_n} функционала (35) при $u = u_n$ и находим u_{n+1} на основании выражения (33).

Пример 1. Пусть $r_1 = \pi/4$, $r_2 = \pi$, $\xi = \pi/2$. Классическое решение краевой задачи (3)–(8) на отрезке $[\pi/4, \pi/2]$ принимает вид $T = 1.5\cos(0.5r) + 2$, $y = \cos(r)$, а на отрезке $[\pi/2, \pi]$ имеем $T = 1.5\exp(-0.5r) + 1.2$, $y = 1.2\exp(-0.5r) + 1$. Также известно, что $R_1 = 0.5$, $R_2 = 0.609453$; $\alpha_2 = 1$; $\beta_2 = 1.02822$; $k_1 = 2$; $k_2 = 3.10176$, $\lambda_1 = 2$, $\mu_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\mu_2 = 1.053169$, $\alpha = 3$, $u = 0.574025$ и значение смещения в точке r_2 $f_0 = 1.279$. Будем считать в этой задаче $u \in U$ неизвестным. Для приведенных входных данных задачу решаем с помощью градиентных методов, где на каждом шаге определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ прямая и сопряженная задачи решены с помощью метода конечных элементов (МКЭ) с использованием кусочно-квадратичных функций путем минимизации соответствующего функционала энергии. В этом случае получаем погрешность $O(h^2)$ в норме пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$, h — наибольшая из длин всех конечных элементов. В табл. 1 приведены результаты вычислительного эксперимента (u_0 — начальное приближение итерационного процесса; u_n — результирующее значение; e_n — погрешность; N_1 — количество разбиений на отрезке $[r_1, \xi]$; N_2 — количество разбиений на отрезке $[\xi, r_2]$; n — номер итерации, на котором завершается итерационный процесс, который для данного примера с его входными данными равен 2).

Таблица 1

Элементы	**Результаты вычислительных экспериментов**						
u_0	1	0	10	-10	10	100	10
u_n	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574
e_n	$-3 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-14}$	$4 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-11}$	$-2 \cdot 10^{-11}$	$-3 \cdot 10^{-13}$	$-4 \cdot 10^{-12}$
N_1	20	20	20	20	50	50	30
N_2	20	20	20	20	50	30	50

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведен анализ задач термоупругих состояний составного цилиндрического тела вращения. На основе теории оптимального управления получены классические задачи в слабой постановке, в том числе и такие, которые определены на классах разрывных функций; исследованы вопросы оптимального управления состоянием таких тел с квадратичным функционалом качества Лионса; получены явные выражения градиентов функционалов невязок (с помощью решения прямых и соответствующих сопряженных задач) для реализации градиентных методов Алифанова идентификации параметров; показано, что для прямых и сопряженных задач существует единственное решение, в том числе и разрывное; путем использования функций МКЭ, в том числе и разрывных, построены и теоретически обоснованы вычислительные схемы повышенного порядка точности численного решения прямых и сопряженных дискретных задач; решены модельные примеры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. — Киев: Наук. думка, 2009. — 640 с.
2. Дейнека В.С. Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2005. — 364 с.
3. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. — New York: Kluwer Academ. Publ., 2005. — 400 p.
4. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988. — 288с.
5. Аралова А.А., Дейнека В.С. Численное решение обратных краевых задач осесимметричного деформирования длинного толстого полого цилиндра // Компьютерная математика. — 2011. — № 2. — С. 3–12.
6. Аралова А.А., Дейнека В.С. Численное решение обратных краевых задач осесимметричного термоупругого деформирования длинного толстого полого цилиндра // Там же. — 2011. — № 1. — С. 3–12
7. Аралова А.А., Дейнека В.С. Численное решение обратных задач теплопроводности для составного цилиндра // Там же. — 2012. — № 1. — С. 31–40.
8. Аралова А.А., Дейнека В.С. Оптимальное управление термонапряженным состоянием полого цилиндра // Доп. НАН України. — 2012. — № 5. — С. 38–42.
9. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем // Тр. междунар. конф. «Многопроцессорные вычислительные и управляющие системы». — Дивногорск: НИИ МВСТГРУ, 2007. — С. 147–149.
10. Сьярле Р. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980. — 512 с.
11. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. — Киев: Наук. думка, 2001. — 606 с.
12. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комплексных обратных задач термоупругости // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 5. — С. 64–87.
13. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. — Киев: Наук. думка, 2003. — 506 с.
14. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.

Поступила 27.03.2014