УДК 519.21

Б.В. БОНДАРЕВ, В.О. БОЛДЫРЕВА

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ, РАБОТАЮЩЕЙ НА (B, S)-РЫНКЕ. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИСКИ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРЕМИИ

Аннотация. Для модели Крамера–Лундберга со стохастическими премиями выводятся интегро-дифференциальные уравнения для вероятности неразорения на конечном и бесконечном промежутках времени функционирования страховой компании, работающей на (B, S)-рынке. Для вывода уравнений не требуется существования гладких плотностей распределения страховых премий и исков. Рассмотрены примеры, когда задача сведена к решению дифференциальных либо интегральных уравнений.

Ключевые слова: модель П. Самуэльсона, вероятность неразорения, стохастические премии и иски, плотность вероятности перехода, уравнение Ито.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших задач актуарной и финансовой математики [1, 2] является нахождение вероятности неразорения страховой компании, поскольку такая деятельность, как страхование требует наиболее полного учета влияния различных случайных факторов. Чтобы получить модель компании, максимально приближенную к реальным условиям, используются стохастические премии и иски, которые учитывают случайный характер времени и размеров поступающих в компанию страховых требований и премий. Также необходимо учитывать средства, получаемые страховой компанией от вложений свободных денег на банковский счет и в акции. Вопрос о нахождении вероятности неразорения страховой компании получил свое разрешение для некоторых простых моделей с частными случаями распределений. В общем случае были получены интегро-дифференциальные и интегральные уравнения для конечного и бесконечного интервалов времени. Отсутствие диффузионной составляющей в основном процессе Самуэльсона требовало наличия гладких плотностей распределения размеров премий, исков и цен акций, что накладывало дополнительные ограничения [3]. Цель данной работы — получение нового способа выведения уравнений для вероятности неразорения страховой компании.

МЕТОД ВЫВЕДЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕННИЙ

Рассмотрим модель Крамера–Лундберга для страховой компании, функционирующей на (B, S)-рынке, т.е. когда имеющиеся средства размещают на банковском счету (безрисковый актив B), а также в рисковый актив S — акции. Обозначим $\xi_x(t)$ капитал компании в момент времени t при условии, что в начальный момент времени капитал компании составляет $\xi_x(0) = x$. Предположим, что поступающие в компанию страховые иски и премии — стохастические. Количество поступающих исков подчиняется пуассоновскому закону распределения $Z(t)$, а количество поступающих премий — пуассоновскому закону распределения $Z_1(t)$. Суммарные иски $\sum_{k=1}^{Z(t)} \eta_k$ (считаем, что $\sum_{k=1}^{0} \eta_k = 0$), где η_k — величины исков, $P(\eta_k < x) = F(x)$, составляют сложный пуассоновский процесс с параметром λ, который представим в виде стохастического интеграла $\int_0^t \int_0^{+\infty} \alpha \nu(d\alpha, ds)$ [2], где $\nu(d\alpha, ds)$ — пуассоновская мера, а $M\nu(d\alpha, ds) = \lambda F(d\alpha) ds$, где $F(d\alpha)$ — мера интервала $(\alpha, \alpha + d\alpha)$.

Аналогично суммарные премии $\sum_{i=1}^{Z_1(t)} \gamma_i$, где γ_i — величины премий, $P(\gamma_i < x) = G(x)$, являют собой сложный пуассоновский процесс с параметром λ_1 и представим в виде стохастического интеграла $\int_0^t \int_0^{+\infty} \beta \nu_1(d\beta, ds)$ [2], где $\nu_1(d\beta, ds)$ — пуассоновская мера, а $M\nu_1(d\beta, ds) = \lambda_1 G(d\beta) ds$, где $G(d\beta)$ — мера интервала $(\beta, \beta + d\beta)$.

В любой момент времени капитал компании разделяется на две части: доля u, $0 \le u \le 1$, отводится на покупку акций, доля $1-u$ — на банковский счет под процентную ставку r. В денежном соотношении: $u\xi_x(t)$ — количество денег, которое отводится на покупку акций, $(1-u)\xi_x(t)$ — количество денег, которое кладется на банковский счет. Тогда на момент времени $t + \Delta t$ на банковском счету будет $(1-u)\xi_x(t)(1 + r\Delta t)$ денег.

Пусть цена рискового актива описывается моделью П. Самуэльсона:

$$P(t) = P(0) \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right\}, \ t \ge 0.$$

Тогда по формуле Ито [1, 4]

$$dP(t) = P(t)(\mu dt + \sigma dW(t)). \tag{1}$$

Перепишем уравнение (1) в виде

$$P(t + \Delta t) - P(t) \approx P(t)(\mu \Delta t + \sigma \Delta W(t)),$$

где $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$. Отсюда с точностью до бесконечно малых высшего порядка имеем $P(t + \Delta t) = P(t)(1 + \mu \Delta t + \sigma \Delta W(t))$.

Количество акций, которое можно купить на сумму $u\xi_x(t)$ по цене $P(t)$ за акцию, составляет $\frac{u\xi_x(t)}{P(t)}$. Тогда новая цена пакета акций к моменту времени $t + \Delta t$ равна $u\xi_x(t)(1 + \mu \Delta t + \sigma \Delta W(t))$.

Очевидно, что соотношение для эволюции капитала компании имеет вид

$$\xi_x(t + \Delta t) = \sum_{i=Z_1(t)}^{Z_1(t+\Delta t)} \gamma_i - \sum_{k=Z(t)}^{Z(t+\Delta t)} \eta_k +$$

$$+ (1-u)\xi_x(t)(1 + r\Delta t) + u\xi_x(t)(1 + \mu \Delta t + \sigma \Delta W(t)).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ в выражении

$$\xi_x(t + \Delta t) = \int_0^{+\infty} \beta \nu_1(d\beta, \Delta t) - \int_0^{+\infty} \alpha \nu(d\alpha, \Delta t) +$$

$$+ (1-u)\xi_x(t)(1 + r\Delta t) + u\xi_x(t)(1 + \mu \Delta t + \sigma \Delta W(t)),$$

получим

$$d\xi_x(t) = \xi_x(t)(u\mu - ur + r)dt + u\sigma \xi_x(t) dW(t) + \int_0^{+\infty} \beta \nu_1(d\beta, dt) - \int_0^{+\infty} \alpha \nu(d\alpha, dt). \tag{2}$$

Воспользуемся идеями и методами работ [1, 3, 5, 6]. Пусть первый скачок капитала происходит в момент времени $\tau = s$, а его величина равна y. До этого момента уравнение капитала имеет вид

$$d\xi_x(t) = \xi_x(t)(u\mu - ur + r)dt + u\sigma \xi_x(t) dW(t), \text{ где } \xi_x(0) = x. \tag{3}$$

Далее по формуле полной вероятности составим уравнение для вероятности неразорения страховой компании для балансового уравнения (2) на конечном интервале времени $[0, t]$

$$\varphi(x, t) = \int_0^t e^{-(\lambda_1+\lambda)s} \int_0^{+\infty} P(x, s, dz) \left(\lambda \int_0^z \varphi(z-y, t-s) dF(y) + \right.$$

$$\left. + \lambda_1 \int_0^{+\infty} \varphi(z+y, t-s) dG(y) \right) ds + e^{-(\lambda_1+\lambda)t}, \tag{4}$$

где $P(x, t, A) = P\{\xi_x(t) \in A\}$ — вероятность перехода процесса $\xi_x(t)$ из точки x за время $t > 0$ в множество A.

Покажем, что у вероятности перехода существуют плотность $\rho(x, t, z)$, а также частные производные $\frac{\partial \rho(x, t, z)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \rho(x, t, z)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial \rho(x, t, z)}{\partial t}$. Для этого найдем явный вид плотности. Этот факт вытекает из следующих рассуждений. Воспользовавшись формулой Ито, выпишем решение уравнения (3)

$$\xi_x(t) = x \exp\left\{ \left(\mu u + (1-u)r - \frac{u^2\sigma^2}{2} \right) t + u\sigma W(t) \right\}. \tag{5}$$

Пусть $u(t, x) = Mf(\xi_x(t)) = Mf\left(x \exp\left\{ \left(\mu u + (1-u)r - \frac{u^2\sigma^2}{2} \right) t + u\sigma W(t) \right\} \right)$, где $t > 0, x \in R$, $u(0, x) = f(x)$. Функция $f \in C^2[0, R]$ произвольная. Тогда $u(t, x)$ является решением задачи

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} u^2\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + (u\mu - ur + r)x \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, \ u(0, x) = f(x). \tag{6}$$

Далее построим фундаментальное решение, т.е. найдем плотность вероятности перехода $\rho(x, t, y)$ для процесса $\xi_x(t)$ — такую функцию, что $P(x, t, A) = P\{\xi_x(t) \in A\} = \int_A \rho(x, t, y) dy$. Выполним построение плотности вероятности перехода следующим образом [7, 8]:

$$u(t, x) = Mf\left(x \exp\left\{ \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2} \right) t + u\sigma W(t) \right\} \right) =$$

$$= Mf\left(x \exp\left\{ \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2} \right) t + u\sigma \frac{W(t)}{\sqrt{t}} \sqrt{t} \right\} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x \exp\left\{ \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2} \right) t + u\sigma\sqrt{t} \cdot y \right\} \right) \exp\left(-\frac{y^2}{2} \right) dy. \tag{7}$$

Введем замену $y\sqrt{t} = k$. Тогда

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x \exp\left\{ \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2} \right) t + u\sigma k \right\} \right) \exp\left(-\frac{k^2}{2t}\right) dk. \tag{8}$$

При этом

$$u(t, x) = \int_0^{+\infty} f(z) \rho(x, t, z) dz, \tag{9}$$

где $\rho(x, t, z)$ — плотность вероятности перехода процесса $\xi_x(t)$ из состояния x в состояние z.

Для того чтобы найти $\rho(x, t, z)$, приведем (8) к виду (9) и сделаем замену:

$$x \exp\left\{ \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2} \right) t + u\sigma k \right\} = z.$$

Выразив $k = \frac{1}{u\sigma}\left(\ln\frac{z}{x} - \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)t\right)$, получим

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}u\sigma}\int_0^{+\infty} f(z)\frac{1}{z}\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{z}{x} - \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{2u^2\sigma^2 t}\right)dz, \quad (10)$$

откуда

$$\rho(x, t, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}u\sigma z}\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{z}{x} - \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{2u^2\sigma^2 t}\right). \quad (11)$$

Непосредственной проверкой убедимся в существовании производных и в том, что $\rho(x, t, z)$ удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial\rho(t, x, z)}{\partial t} = \frac{1}{2}u^2\sigma^2 x^2\frac{\partial^2\rho(t, x, z)}{\partial x^2} + (u\mu - ur + r)x\frac{\partial\rho(t, x, z)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\rho(x, t, z)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}u\sigma zx}\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{z}{x} - \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{2u^2\sigma^2 t}\right)\times$$

$$\times\frac{\ln\frac{z}{x} - \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)t}{u^2\sigma^2 t}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2\rho(x, t, z)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}u^3\sigma^3 zx^2}\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{z}{x} - \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{2u^2\sigma^2 t}\right)\times$$

$$\times\left(\ln\frac{z}{x} - \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)t + 1 - \frac{\left(\ln\frac{z}{x} - \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{u^2\sigma^2 t}\right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial\rho(x, t, z)}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}u\sigma z}\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{z}{x} - \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)t\right)^2}{2u^2\sigma^2 t}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2} + \frac{\ln\frac{z}{x} - \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)t}{2u^2\sigma^2 t}\times\right.$$

$$\left.\times\left(-2\left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)t - \left(\ln\frac{z}{x} - \left(u\mu - ur + r - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)t\right)\right)\right]. \quad (14)$$

Подставим полученные производные (12)–(14) в уравнение (6) вместо функции $u(t, x)$. Как видим, $\rho(x, t, z)$ обладает свойствами дельта-функции и является фундаментальным решением уравнения.

Далее соотношение для вероятности неразорения страховой компании $\varphi(x, t)$ перепишем в виде

$$\varphi(x,t)=\int_0^t e^{-(\lambda_1+\lambda)s}\int_0^{+\infty}\rho(x,s,z)\left(\lambda\int_0^z\varphi(z-y,\,t-s)dF(y)+\right.$$
$$\left.+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(z+y,\,t-s)dG(y)\right)dzds+e^{-(\lambda_1+\lambda)t}. \tag{15}$$

Проинтегрируем (15) по частям:

$$\varphi(x,t)=e^{-(\lambda_1+\lambda)t}-\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda)t}}{\lambda_1+\lambda}\int_0^{+\infty}\rho(x,t,z)\left(\lambda\int_0^z\varphi(z-y,0)dF(y)+\right.$$
$$\left.+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(z+y,0)dG(y)\right)dz+\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\times$$
$$\times\int_0^{+\infty}\rho(x,0,z)\left(\lambda\int_0^z\varphi(z-y,t)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(z+y,t)dG(y)\right)dz+\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\times$$
$$\times\int_0^t e^{-(\lambda_1+\lambda)s}\int_0^{+\infty}\frac{\partial\rho(x,s,z)}{\partial s}\left(\lambda\int_0^z\varphi(z-y,t-s)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(z+y,t-s)dG(y)\right)dzds+$$
$$+\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\int_0^t e^{-(\lambda_1+\lambda)s}\int_0^{+\infty}\rho(x,s,z)\left(\lambda\int_0^z\frac{\partial\varphi}{\partial s}(z-y,\,t-s)dF(y)+\right.$$
$$\left.+\lambda_1\int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial s}(z+y,\,t-s)dG(y)\right)dzds. \tag{16}$$

Поскольку $\rho(x,t,z)$ является фундаментальным решением уравнения (6) (т.е. в точке $t=0$ является дельта-функцией), получим

$$\varphi(x,t)=e^{-(\lambda_1+\lambda)t}-\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda)t}}{\lambda_1+\lambda}\times$$
$$\times\int_0^{+\infty}\rho(x,t,z)\left(\lambda\int_0^z\varphi(z-y,0)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(z+y,0)dG(y)\right)dz+$$
$$+\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\int_0^{+\infty}\rho(x,0,z)\left(\lambda\int_0^z\varphi(z-y,t)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(z+y,t)dG(y)\right)dz+$$
$$+\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\int_0^t e^{-(\lambda_1+\lambda)s}\int_0^{+\infty}\left(\frac{u^2\sigma^2x^2}{2}\frac{\partial^2\rho(x,s,z)}{\partial x^2}+(u\mu-ur+r)x\frac{\partial\rho(x,s,z)}{\partial x}\right)\times$$
$$\times\left(\lambda\int_0^z\varphi(z-y,t-s)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(z+y,t-s)dG(y)\right)dzds+$$
$$+\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\int_0^t e^{-(\lambda_1+\lambda)s}\int_0^{+\infty}\rho(x,s,z)\left(\lambda\int_0^z\frac{\partial\varphi}{\partial s}(z-y,\,t-s)dF(y)+\right.$$
$$\left.+\lambda_1\int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial s}(z+y,\,t-s)dG(y)\right)dzds. \tag{17}$$

Заметим, что

$$\int_0^t e^{-(\lambda_1+\lambda)s}\int_0^{+\infty}\rho(x,s,z)\left(\lambda\int_0^z\frac{\partial\varphi}{\partial s}(z-y,t-s)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial s}(z+y,t-s)dG(y)\right)dzds=$$
$$=-\int_0^t e^{-(\lambda_1+\lambda)s}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{+\infty}\rho(x,s,z)\left(\lambda\int_0^z\varphi(z-y,t-s)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(z+y,t-s)dG(y)\right)dzds.$$

Для выражения (15) найдем производную по t:

$$\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t} = -(\lambda_1+\lambda)e^{-(\lambda_1+\lambda)t} -$$

$$-e^{-(\lambda_1+\lambda)t}\int_0^{+\infty}\rho(x, t, z)\left(\lambda\int_0^z\varphi(z-y, 0)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(z+y, 0)dG(y)\right)dz -$$

$$-\int_0^t e^{-(\lambda_1+\lambda)s}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{+\infty}\rho(x, s, z)\left(\lambda\int_0^z\varphi(z-y, t-s)dF(y)+\right.$$

$$\left.+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(z+y, t-s)dG(y)\right)dzds. \qquad (18)$$

Прибавив к выражению (18) выражение (17), умноженное на $(\lambda_1+\lambda)$, получим

$$(\lambda_1+\lambda)\varphi(x, t)+\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t} =$$

$$=\int_0^{+\infty}\rho(x, 0, z)\left(\lambda\int_0^z\varphi(z-y, t)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(z+y, t)dG(y)\right)dz +$$

$$+\int_0^t e^{-(\lambda_1+\lambda)s}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2\rho(x, s, z)}{\partial x^2}+(u\mu-ur+r)x\frac{\partial\rho(x, s, z)}{\partial x}\right)\times$$

$$\times\left(\lambda\int_0^z\varphi(z-y, t-s)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(z+y, t-s)dG(y)\right)dzds.$$

Получаем уравнение для вероятности неразорения страховой компании на конечном интервале времени

$$(\lambda_1+\lambda)\varphi(x, t)+\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t} = \lambda\int_0^x\varphi(x-y, t)dF(y)+$$

$$+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(x+y, t)dG(y)+\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2\varphi(x, t)}{\partial x^2}+(u\mu-ur+r)x\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x}.$$

Поскольку функция $\varphi(x, t)$ при фиксированном x с ростом t не возрастает и ограничена снизу нулем, то при $t\to\infty$ функция $\varphi(x, t)$ имеет предел и $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t}=0$.

Устремив t к бесконечности, получим уравнение для бесконечного интервала функционирования компании

$$(\lambda_1+\lambda)\varphi(x) = \lambda\int_0^x\varphi(x-y)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(x+y)dG(y)+$$

$$+\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}+(u\mu-ur+r)x\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}.$$

Заметим, что в частном случае, если компания не работает на (B, S)-рынке, т.е. $r=0$, $u=0$, получим уже известный результат [9] для конечного интервала времени

$$(\lambda_1+\lambda)\varphi(x, t)+\frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial t} = \lambda\int_0^x\varphi(x-y, t)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(x+y, t)dG(y)$$

и для бесконечного интервала времени

$$(\lambda_1+\lambda)\varphi(x)+\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t} = \lambda\int_0^x\varphi(x-y)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(x+y)dG(y).$$

Таким образом, найденные результаты можно сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 1. На конечном промежутке времени $[0, t]$ функционирования страховой компании с эволюцией капитала, заданного уравнением (2), вероятность неразорения удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$(\lambda_1+\lambda)\varphi(x,t)+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}=\lambda\int_0^x\varphi(x-y,t)dF(y)+$$
$$+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(x+y,t)dG(y)+\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}+(u\mu-ur+r)x\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}. \quad (19)$$

Теорема 2. На бесконечном промежутке времени $[0,\infty)$ функционирования страховой компании с эволюцией капитала, заданного уравнением (2), вероятность неразорения удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$(\lambda_1+\lambda)\varphi(x)=\lambda\int_0^x\varphi(x-y)dF(y)+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(x+y)dG(y)+$$
$$+\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}+(u\mu-ur+r)x\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}. \quad (20)$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

Рассмотрим некоторые методы сведения уравнения (20) к виду, более привычному для математиков.

Бесконечный случай. Экспоненциальное распределение. Предположим, что величины исков и страховых премий распределены с помощью экспоненциального закона. Пусть $F(x)=1-e^{-ax}$, $G(x)=1-e^{-bx}\,(a,b>0)$. Тогда получим уравнение

$$(\lambda_1+\lambda)\varphi(x)=\lambda\int_0^x\varphi(x-y)ae^{-ay}dy+\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(x+y)be^{-by}dy+$$
$$+\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\varphi''(x)+(u\mu-ur+r)x\varphi'(x). \quad (21)$$

Продифференцируем дважды уравнение по x:

$$(\lambda_1+\lambda)\varphi'(x)+(\lambda_1b-\lambda a)\varphi(x)=-\lambda a\int_0^x\varphi(x-y)ae^{-ay}dy+$$
$$+\lambda_1b\int_0^{+\infty}\varphi(x+y)be^{-by}dy+\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\varphi'''(x)+(u\mu-ur+r)\varphi'(x)+$$
$$+u^2\sigma^2x\varphi''(x)+(u\mu-ur+r)x\varphi''(x); \quad (22)$$

$$(\lambda_1+\lambda)\varphi''(x)+(\lambda_1b-\lambda a)\varphi'(x)+(\lambda_1b^2+\lambda a^2)\varphi(x)=$$
$$=\lambda a^2\int_0^x\varphi(x-y)ae^{-ay}dy+\lambda_1b^2\int_0^{+\infty}\varphi(x+y)be^{-by}dy+$$
$$+\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\varphi^{IV}(x)+x(2u^2\sigma^2+u\mu-ur+r)\varphi'''(x)+$$
$$+(2u^2\sigma^2+u\mu-ur+r)\varphi''(x). \quad (23)$$

Теперь найдем сумму выражения (21), умноженного на ab, и выражения (22), умноженного на $(b-a)$, и вычтем из нее выражение (23). Получим дифференциальное линейное однородное уравнение четвертой степени с переменными коэффициентами:

$$\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\varphi^{IV}(x)+\left[x(2u^2\sigma^2+u\mu-ur+r)-\frac{b-a}{2}u^2\sigma^2x^2\right]\varphi'''(x)+$$

$$+\left[2u^2\sigma^2+u\mu-ur+r-(\lambda_1+\lambda)-(b-a)(u\mu-ur+r)-\right.$$
$$\left.-(b-a)u^2\sigma^2x+\frac{1}{2}abu^2\sigma^2x^2\right]\varphi''(x)+$$
$$+\varphi'(x)[b\lambda-a\lambda_1-(u\mu-ur+r)abx-(b-a)(u\mu-ur+r)]=0. \qquad (24)$$

Краевые условия:

$$\begin{cases}\varphi(\infty)=1,\\ (\lambda_1+\lambda)\varphi(0)=\lambda_1\int\limits_0^{+\infty}\varphi(y)be^{-by}dy,\\ (\lambda_1+\lambda)\varphi'(0)+(\lambda_1 b-\lambda a)\varphi(0)=\lambda_1 b\int\limits_0^{+\infty}\varphi(y)be^{-by}dy+(u\mu-ur+r)\varphi'(0),\\ (\lambda_1+\lambda)\varphi''(0)+(\lambda_1 b-\lambda a)\varphi'(0)+(\lambda_1 b^2+\lambda a^2)\varphi(0)=\\ =-\lambda_1 b^2\int\limits_0^{+\infty}\varphi(y)be^{-by}dy+(2u^2\sigma^2+u\mu-ur+r)\varphi''(0).\end{cases} \qquad (25)$$

Уравнение (24) с помощью замены $\varphi'(x)=z(x)$ сводится к дифференциальному линейному однородному уравнению третьей степени с переменными коэффициентами:

$$\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2z'''(x)+\left[x(2u^2\sigma^2+u\mu-ur+r)-\frac{b-a}{2}u^2\sigma^2x^2\right]z''(x)+$$
$$+\left[2u^2\sigma^2+u\mu-ur+r-(\lambda_1+\lambda)-(b-a)(u\mu-ur+r)-\right.$$
$$\left.-(b-a)u^2\sigma^2x+\frac{1}{2}abu^2\sigma^2x^2\right]z'(x)+$$
$$+z(x)[b\lambda-a\lambda_1-(u\mu-ur+r)abx-(b-a)(u\mu-ur+r)]=0. \qquad (26)$$

Использование функции Грина для построения решения. Изначальное уравнение запишем в виде

$$\beta^2x^2\varphi''(x)+\alpha x\varphi'(x)-(\lambda+\lambda_1)\varphi(x)=$$
$$=-\lambda\int\limits_0^x\varphi(x-y)dF(y)-\lambda_1\int\limits_0^{+\infty}\varphi(x+y)dG(y). \qquad (27)$$

Для построения функции Грина найдем вначале решение соответствующего однородного уравнения

$$\beta^2x^2\varphi''(x)+\alpha x\varphi'(x)-(\lambda+\lambda_1)\varphi(x)=0.$$

Решение будем находить в виде $\varphi(x)=cx^{\gamma}$:

$$\beta^2x^2c\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}+\alpha xc\gamma x^{\gamma-1}-(\lambda+\lambda_1)cx^{\gamma}=0;$$
$$cx^{\gamma}(\beta^2\gamma^2+(\alpha-\beta^2)\gamma-(\lambda+\lambda_1))=0; \quad D=(\alpha-\beta^2)^2+4\beta^2(\lambda+\lambda_1)\ge 0.$$

Отсюда $\gamma_1=\dfrac{\beta^2-\alpha+\sqrt{D}}{2\beta^2}$, $\gamma_2=\dfrac{\beta^2-\alpha-\sqrt{D}}{2\beta^2}$.

Таким образом, получаем фундаментальную систему решений

$$\varphi_1=c_1x^{\frac{\beta^2-\alpha+\sqrt{(\alpha-\beta^2)^2+4\beta^2(\lambda+\lambda_1)}}{2\beta^2}}, \quad \varphi_2=c_2x^{\frac{\beta^2-\alpha-\sqrt{(\alpha-\beta^2)^2+4\beta^2(\lambda+\lambda_1)}}{2\beta^2}}.$$

Строим функцию Грина для уравнения (27):

$$g(x,\xi)=\frac{\operatorname{sign}(x-\xi)}{2\beta^2\xi^2(\gamma_2-\gamma_1)\xi^{\gamma_2+\gamma_1-1}}(\xi^{\gamma_1}x^{\gamma_2}-\xi^{\gamma_2}x^{\gamma_1}).$$

Заметим, что $g(x,x)=0$, $g'_x(x,x)=\dfrac{1}{2\beta^2x^2}$ при $x>\xi$.

С помощью функции Грина получим интегральное уравнение для вероятности неразорения

$$\varphi(x)=\int_0^x g(x,\xi)\left[-\lambda\int_0^{\xi}\varphi(\xi-y)dF(y)-\lambda_1\int_0^{+\infty}\varphi(\xi+y)dG(y)\right]d\xi. \qquad (28)$$

Уравнение (28) далее можно решать методом последовательных приближений.

Как представляется авторам, решение уравнений (26) и (28) является для математиков более известной задачей, чем решение исходного уравнения (20).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для модели страховой компании со стохастическими премиями, функционирующей на (B,S)-рынке, были выведены интегро-дифференциальные уравнения на конечном и бесконечном интервалах времени функционирования. Полученные результаты проверены для частного случая: модели страховой компании со стохастическими премиями, которая не размещает свои свободные средства на банковском счету и не вкладывает их в акции либо другие рисковые активы.

Заметим, что такой способ получения уравнений для вероятности неразорения не накладывает ограничений на существование гладких плотностей распределения для величин страховых исков и премий, как в работах [3, 6], а также подтверждает существование производных для вероятности неразорения страховой компании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. — К.: Інформтехніка, 1995. — 380 с.
2. Бондарев Б.В. Математические модели в страховании. — Донецк: АПЕКС, 2002. — 117 с.
3. Бондарев Б.В., Рагулина Е.Ю. О вероятности неразорения страховой компании на конечном интервале времени при инвестировании капитала на финансовом (B,S)-рынке // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 5. — С. 112–124.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. — 576 с.
5. Рагуліна О.Ю. Про диференційовність імовірності небанкрутства страхової компанії в моделях зі сталою відсотковою ставкою // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. — 2010. — № 1–2. — С. 82–116.
6. Pervozvansky A.A., Jr. Equation for survival probability in a finite time interval in case of non-zero real interest force // Insurance: Mathematics and Economics. — 1998. — **23**, Issue 3. — P. 287–295.
7. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения: Пер. с англ. — М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003. — 408 с.
8. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. — М.: Наука, 1971. — 664 с.
9. Бойков А.В. Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и ее применения. — 2002. — **47**, вып. 3. — С. 549–553.

Поступила 21.11.2013