УДК 517.988

В.В. СЕМЕНОВ

ГИБРИДНЫЕ МЕТОДЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ[1]

Аннотация. Предложены новые алгоритмы для решения системы операторных включений с монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Алгоритмы основаны на трех известных методах: алгоритме расщепления Ценга и двух гибридных алгоритмах для аппроксимации неподвижных точек нерастягивающих операторов. Доказаны теоремы о сильной сходимости порожденных алгоритмами последовательностей.

Ключевые слова: операторное включение, максимальный монотонный оператор, резольвента, гильбертово пространство, алгоритм Ценга, гибридный алгоритм, сильная сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

Теория монотонных операторов является активно развивающимся направлением нелинейного анализа [1, 2]. Многие задачи исследования операций и математической физики можно записать в виде вариационных неравенств, задач равновесного типа или в форме операторных включений с монотонными операторами [3–6], для решения которых в настоящее время предложено и обосновано много методов [2, 7–25]. Однако далеко не все вопросы разработаны с исчерпывающей полнотой. В данной статье предложены два новых алгоритма для системы операторных включений с монотонными операторами, обобщающей задачу из [26–29]. Алгоритмы основаны на трех известных методах: алгоритме расщепления Ценга [13] и двух гибридных алгоритмах для аппроксимации неподвижных точек нерастягивающих операторов. Доказаны теоремы о сильной сходимости порожденных алгоритмами последовательностей.

ОБЗОР ИЗВЕСТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работах [26–29] рассмотрены задачи вида: пусть H — гильбертово пространство, для каждого $i=1,\ldots,d$ даны оператор $B_i : H \to H$ и непустое выпуклое замкнутое множество $C_i \subseteq H$. Необходимо найти

$$x \in \cap_{i=1}^{d} C_i : \ (B_i x,\ y-x) \ge 0 \ \ \forall y \in C_i \ , \ \ \forall i \in \{1,\ldots,d\}. \tag{1}$$

В частности, в [27] для случая, когда операторы B_i — обратно сильно монотонные (ко–коерцитивные) [2, 7], предлжены алгоритмы

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{d} \omega_i P_{C_i}(x_n - \lambda B_i x_n)\,, \tag{2}$$

$$x_{n+1} = \prod_{i=1}^{d} P_{C_i}(x_n - \lambda B_i x_n)\,, \tag{3}$$

где $\sum_{i=1}^{d} \omega_i = 1$, $\omega_i > 0$, $\lambda \in (0, 2\min_i L_i)$, $L_i > 0$ — константа обратной сильной монотонности оператора B_i, P_{C_i} — оператор проектирования на множество C_i. Напомним, что оператор $B : H \to H$ называют обратно сильно монотонным с константой $L > 0$ (L-ко-коерцитивным), если $(Bx - By, x - y) \ge L \| Bx - By \|^2$ для всех $x, y \in H$. Известно, что дифференцируемый функционал $f : H \to \mathbb{R}$ с производной f', удовлетворяющей условию Липшица с константой $L > 0$, является выпуклым тогда и только тогда, когда оператор f' — обратно сильно монотонный с константой $1/L$ (теорема Байона–Аддада) [2]. Алгоритмы (2) и (3) в случае разрешимости системы (1) слабо сходятся к ее решению [27]. В работе [28] предложен сильно сходящийся модифицированный экстраградиентный алгоритм

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Верховной Рады Украины (именная стипендия Верховной Рады Украины для молодых ученых, 2013) и ГФФИ Украины (Проект GP/F49/061).

для задачи (1) в случае многозначных монотонных и липшицевых операторов B_i. Заметим, что, используя итеративную регуляризацию [30], легко модифицировать (2) и (3) для получения сильно сходящихся аппроксимаций решения системы (1) с минимальной нормой. Например, для алгоритма (3) соответствующая модификация имеет вид

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)\prod_{i=1}^{d} P_{C_i}(x_n - \lambda B_i x_n),$$

где $\alpha_n \in (0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.

Системы задач равновесного программирования рассмотрены в [31–33], а системы монотонных включений — в [34].

В данной работе для системы операторных включений $0 \in (A_i + B_i)x$ $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$, обобщающей систему (1), предложены два сильно сходящихся итерационных алгоритма. Относительно операторов A_i предполагается максимальная монотонность, а операторов B_i — только однозначность, монотонность и липшицевость. Каждый алгоритм является регуляризацией векторного варианта метода расщепления Ценга [13] с помощью соответствующего гибридного метода (внешних аппроксимаций) поиска неподвижных точек нерастягивающих операторов [35–38].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМОВ

Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Для оператора $T: H \to 2^H$ используем следующие обозначения: $\mathrm{dom}(T) = \{x \in H: Tx \neq \varnothing\}$, $T^{-1}0 = \{x \in H: 0 \in Tx\}$. Напомним, что резольвентой оператора $T: H \to 2^H$ называют оператор $J_T = (E+T)^{-1}: H \to 2^H$, где E — единичный оператор [2, 7]. Известно, что в случае максимальной монотонности оператора T резольвента J_T является однозначным, всюду заданным и твердо нерастягивающим (firmly nonexpansive) оператором, а множество $T^{-1}0$ — замкнутым и выпуклым (возможно пустым) [2, 7].

Лемма 1 [2]. Пусть $T: H \to 2^H$ — максимальный монотонный оператор, x, $u \in H$. Тогда

$$(u - v, x - y) \geq 0 \ \ \forall y \in \mathrm{dom}(T), \ \forall v \in Ty \ \Leftrightarrow \ x \in \mathrm{dom}(T), \ u \in Tx.$$

Пусть также P_C – оператор метрического проектирования на непустое выпуклое и замкнутое множество $C \subseteq H$, т.е. $P_C x$ — единственный элемент множества C со свойством $\| P_C x - x \| = \min\limits_{z \in C} \| z - x \|$. Используем следующие характеризации элемента $P_C x$ [2]:

$$y = P_C x \ \Leftrightarrow \ y \in C, \ (y - x, z - y) \geq 0 \ \ \forall z \in C,$$

$$y = P_C x \ \Leftrightarrow \ y \in C, \ \| y - z \|^2 \leq \| x - z \|^2 - \| y - x \|^2 \ \ \forall z \in C.$$

Заметим, что $P_C = J_{N_C}$, где N_C — нормальный конус множества C [2].

Перейдем к формулировке задачи. Пусть $I = \{1, 2, \ldots, d\}$, где $d \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество операторов $\{A_1, \ldots, A_d, B_1, \ldots, B_d\}$ и предположим, что для всех $i \in I$ выполняются следующие условия:

A1) $A_i: H \to 2^H$ — максимальный монотонный оператор;

A2) $B_i: H \to H$ — монотонный и липшицевый оператор с константой Липшица $L_i > 0$, причем $\mathrm{dom}(B_i) = H$.

Отметим, что все операторы $A_i + B_i: H \to 2^H$ являются максимальными монотонными и $\mathrm{dom}(A_i + B_i) = \mathrm{dom}(A_i)$.

Рассмотрим систему операторных включений

$$0 \in (A_i + B_i)x, \ \ i \in I. \tag{4}$$

Замечание 1. Если для всех $i \in I$ имеем $A_i = N_{C_i}$ — нормальный конус замкнутого выпуклого множества $C_i \subseteq H$, то задача (4) является системой вариационных неравенств: найти элемент $x \in H$ такой, что для всех $i \in I$ имеем $x \in C_i$ и $(B_i x, y - x) \geq 0 \ \forall y \in C_i$.

Предположим, что $S = \cap_{i \in I} (A_i + B_i)^{-1} 0 \neq \varnothing$.

Зафиксируем числовую последовательность (λ_n), удовлетворяющую условию

B1) $\lambda_n \in [a, b] \subseteq \left(0, \min_{i \in I} \dfrac{1}{L_i}\right)$.

Для получения сильно сходящихся аппроксимаций решений системы операторных включений (4) предлагаем следующие алгоритмы.

Алгоритм 1

Выбираем $x_1 = x \in H$, генерируем последовательность элементов $x_n \in H$ с помощью итерационной схемы

$$\begin{cases} y_{(n,i)} = x_n - \lambda_n B_i x_n, \\ z_{(n,i)} = J_{\lambda_n A_i} y_{(n,i)}, \\ v_{(n,i)} = x_n - y_{(n,i)} + z_{(n,i)} - \lambda_n B_i z_{(n,i)}, \\ C_n = \{z \in H \colon \max_{i \in I} \| v_{(n,i)} - z \| \leq \| x_n - z \| \}, \\ Q_n = \{z \in H \colon (x_n - z, x - x_n) \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x. \end{cases}$$

Алгоритм 2

Выбираем $x \in H$, $x_1 \in H$, $C_1 = H$, генерируем последовательность элементов $x_n \in H$ с помощью итерационной схемы

$$\begin{cases} y_{(n,i)} = x_n - \lambda_n B_i x_n, \\ z_{(n,i)} = J_{\lambda_n A_i} y_{(n,i)}, \\ v_{(n,i)} = x_n - y_{(n,i)} + z_{(n,i)} - \lambda_n B_i z_{(n,i)}, \\ C_{n+1} = C_n \cap \{z \in H \colon \max_{i \in I} \| v_{(n,i)} - z \| \leq \| x_n - z \| \}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x. \end{cases}$$

Замечание 2. Алгоритм 1 реализует идею регуляризации векторного варианта метода расщепления Ценга [13] с помощью гибридного метода [35], а алгоритм 2 — с помощью метода [37].

Замечание 3. Имеющиеся в алгоритмах множества $C_n \cap Q_n$ и C_{n+1} являются выпуклыми и замкнутыми. Далее показана их непустота и корректность определения элементов x_n.

Замечание 4. Для систем вариационных неравенств согласно замечанию 1 алгоритмы 1 и 2 имеют вид

$$\begin{cases} z_{(n,i)} = P_{C_i} (x_n - \lambda_n B_i x_n), \\ v_{(n,i)} = z_{(n,i)} - \lambda_n (B_i z_{(n,i)} - B_i x_n), \\ C_n = \{z \in H \colon \max_{i \in I} \| v_{(n,i)} - z \| \leq \| x_n - z \| \}, \\ Q_n = \{z \in H \colon (x_n - z, x - x_n) \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{(n,i)} = P_{C_i} (x_n - \lambda_n B_i x_n), \\ v_{(n,i)} = z_{(n,i)} - \lambda_n (B_i z_{(n,i)} - B_i x_n), \\ C_{n+1} = C_n \cap \{z \in H \colon \max_{i \in I} \| v_{(n,i)} - z \| \leq \| x_n - z \| \}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x \end{cases}$$

соответственно. Итерационный шаг приведенного выше варианта алгоритма 1 более простой, чем шаг в методе из [29], имеющем в данном случае следующий вид:

$$\begin{cases} y_{(n,i)} = P_{C_i}(x_n - \lambda_{(n,i)} B_i x_n), \\ z_{(n,i)} = P_{C_i}(x_n - \lambda_{(n,i)} B_i y_{(n,i)}), \\ C_n = \{z \in H \colon \max_{i \in I}(x_n - z_{(n,i)}, z - x_n - \gamma_{(n,i)}(z_{(n,i)} - x_n)) \le 0\}, \\ Q_n = \{z \in H \colon (x_n - z, x - x_n) \ge 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x, \end{cases}$$

где $\lambda_{(n,i)} \in [a, b] \subseteq \left(0, \min_{k \in I} \dfrac{1}{L_k}\right)$, $\gamma_{(n,i)} \in \left[\varepsilon, \dfrac{1}{2}\right]$, $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Справедливо важное неравенство, связывающее расстояния от порожденных алгоритмами точек до множества S.

Лемма 2. Для последовательностей (x_n), $(z_{(n,i)})$ и $(v_{(n,i)})$, порожденных алгоритмом 1 или алгоритмом 2, имеет место неравенство

$$\| v_{(n,i)} - z \|^2 \le \| x_n - z \|^2 - (1 - \lambda_n^2 L_i^2) \| x_n - z_{(n,i)} \|^2,$$

где $z \in S$.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Имеем

$$\| v_{(n,i)} - z \|^2 = \| x_n - y_{(n,i)} + z_{(n,i)} - \lambda_n B_i z_{(n,i)} - z \|^2 =$$

$$= \| (z_{(n,i)} - z) + \lambda_n (B_i x_n - B_i z_{(n,i)}) \|^2 = \| z_{(n,i)} - z \|^2 + \lambda_n^2 \| B_i x_n - B_i z_{(n,i)} \|^2 +$$

$$+ 2\lambda_n (B_i x_n - B_i z_{(n,i)}, z_{(n,i)} - z). \tag{5}$$

Из монотонности оператора $\lambda_n A_i$ и равенства $z_{(n,i)} = J_{\lambda_n A_i} y_{(n,i)}$ следует $(z_{(n,i)} - y_{(n,i)} - B_i z, z_{(n,i)} - z) \le 0$. А из монотонности оператора B_i следует $(\lambda_n B_i z - \lambda_n B_i z_{(n,i)}, z_{(n,i)} - z) \le 0$.

Сложив эти неравенства, получим

$$(z_{(n,i)} - y_{(n,i)} - B_i z_{(n,i)}, z_{(n,i)} - z) \le 0. \tag{6}$$

Из (6) следует неравенство

$$2\lambda_n (B_i x_n - B_i z_{(n,i)}, z_{(n,i)} - z) = 2(z_{(n,i)} - y_{(n,i)} - B_i z_{(n,i)}, z_{(n,i)} - z) +$$
$$+ 2(\lambda_n B_i x_n + y_{(n,i)} - z_{(n,i)}, z_{(n,i)} - z) \le 2(x_n - z_{(n,i)}, z_{(n,i)} - z) =$$
$$= \| x_n - z \|^2 - \| z_{(n,i)} - z \|^2 - \| z_{(n,i)} - x_n \|^2. \tag{7}$$

С учетом (7) в (5) получим

$$\| v_{(n,i)} - z \|^2 \le \| x_n - z \|^2 - \| x_n - z_{(n,i)} \|^2 + \lambda_n^2 \| B_i x_n - B_i z_{(n,i)} \|^2 \le$$

$$\le \| x_n - z \|^2 - (1 - \lambda_n^2 L_i^2) \| x_n - z_{(n,i)} \|^2,$$

что и следовало доказать. ■

Перейдем к доказательству сильной сходимости алгоритмов.

СХОДИМОСТЬ АЛГОРИТМА 1

Рассмотрим важное свойство локализации множества решений операторного включения (4) с помощью многогранников $C_n \cap Q_n$.

Лемма 3. Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место вложение

$$S \subseteq C_n \cap Q_n. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $z \in S = \cap_{i \in I} (A_i + B_i)^{-1} 0$. Из неравенства леммы 2 следует, что $\| v_{(n,i)} - z \| \leq \| x_n - z \|$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $i \in I$. Таким образом, $S \subseteq C_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Теперь с использованием математической индукции покажем, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо вложение $S \subseteq C_n \cap Q_n$. Для $n = 1$ имеем $Q_n = H$. Следовательно, $S \subseteq C_1 \cap Q_1$. Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполняется $S \subseteq C_k \cap Q_k$. Тогда существует единственная точка $x_{k+1} \in C_k \cap Q_k$ такая, что $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x$. Из $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k} x$ следует $(x_{k+1} - z, x - x_{k+1}) \geq 0$ $\forall z \in C_k \cap Q_k$. Поскольку $S \subseteq C_k \cap Q_k$, то $S \subseteq Q_{k+1}$. Таким образом, $S \subseteq C_{k+1} \cap Q_{k+1}$. Вложение (8) доказано для всех $n \in \mathbb{N}$. ■

Лемма 4. Последовательности (x_n), $(z_{(n,i)})$ и $(v_{(n,i)})$ ограничены и

$$\lim_{n \to \infty} \| z_{(n,i)} - x_n \| = \lim_{n \to \infty} \| v_{(n,i)} - x_n \| = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Покажем, что последовательность (x_n) ограничена. Существует единственная точка $z_0 \in S$ такая, что $z_0 = P_S x$. Из $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x$ следует $\| x_{n+1} - x \| \leq \| x - z \|$ $\forall z \in C_n \cap Q_n$. Поскольку $z_0 \in S \subseteq C_n \cap Q_n$, то

$$\| x_{n+1} - x \| \leq \| z_0 - x \| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Откуда следует ограниченность (x_n).

Докажем, что

$$\lim_{n \to \infty} || x_{n+1} - x_n || = 0. \tag{11}$$

Из $x_{n+1} \in C_n \cap Q_n \subseteq Q_n$ и $x_n = P_{Q_n} x$ следует $\| x_{n+1} - x \| \geq \| x_n - x \|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(\| x_n - x \|)$ ограничена и неубывающая. Следовательно, существует конечный предел $\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \|$. Однако, поскольку $x_{n+1} \in Q_n$, то $(x_n - x_{n+1}, x - x_n) \geq 0$ и

$$\| x_n - x_{n+1} \|^2 = \| (x_n - x) - (x_{n+1} - x) \|^2 =$$

$$= \| x_n - x \|^2 - 2(x_n - x, x_{n+1} - x) + \| x_{n+1} - x \|^2 =$$

$$= \| x_{n+1} - x \|^2 - \| x_n - x \|^2 - 2(x_n - x_{n+1}, x - x_n) \leq \| x_{n+1} - x \|^2 - \| x_n - x \|^2.$$

Откуда получаем (11).

Поскольку $x_{n+1} \in C_n$, то $\| v_{(n,i)} - x_{n+1} \| \leq \| x_n - x_{n+1} \|$ $\forall i \in I$. Откуда получаем ограниченность $(v_{(n,i)})$ и

$$\| v_{(n,i)} - x_n \| \leq \| v_{(n,i)} - x_{n+1} \| + \| x_n - x_{n+1} \| \leq 2 \| x_n - x_{n+1} \| \to 0. \tag{12}$$

Используя лемму 2, получаем

$$\| x_n - z_{(n,i)} \|^2 \leq$$

$$\leq \frac{\| x_n - z \|^2 - \| v_{(n,i)} - z \|^2}{1 - \lambda_n^2 L_i^2} = \frac{(\| x_n - z \| - \| v_{(n,i)} - z \|)(\| x_n - z \| + \| v_{(n,i)} - z \|)}{1 - \lambda_n^2 L_i^2} \leq$$

$$\leq \frac{(\| x_n - z \| + \| v_{(n,i)} - z \|)}{1 - \lambda_n^2 L_i^2} \| x_n - v_{(n,i)} \|,$$

где $z \in S$. Из (12) следует $\lim_{n \to \infty} \| z_{(n,i)} - x_n \| = 0$ и ограниченность последовательности $(z_{(n,i)})$. ■

Лемма 5. Слабые предельные точки последовательностей (x_n), $(z_{(n,i)})$ и $(v_{(n,i)})$ принадлежат множеству S.

Доказательство. Из ограниченности последовательности (x_n) следует существование подпоследовательности (x_{n_k}), слабо сходящейся к точке $w \in H$. Покажем, что $w \in S$. Из (9) следует $z_{(n_k,i)} \to w$ слабо, $\upsilon_{(n_k,i)} \to w$ слабо и

$$u_{(n_k,i)} = \frac{x_{n_k} - z_{(n_k,i)}}{\lambda_{n_k}} + B_i z_{(n_k,i)} - B_i x_{n_k} \to 0, \; u_{(n_k,i)} \in (A_i + B_i) z_{(n_k,i)}.$$

Имеем

$$(u_{(n_k,i)} - p, z_{(n_k,i)} - y) \geq 0 \;\; \forall y \in \mathrm{dom}(A_i + B_i), \;\; \forall p \in (A_i + B_i) y.$$

После предельного перехода получим $(0 - p, w - y) \geq 0$ $\forall y \in \mathrm{dom}(A_i + B_i)$, $\forall p \in (A_i + B_i) y$. Поскольку операторы $A_i + B_i$ являются максимальными монотонными, то согласно лемме 1 имеем $0 \in (A_i + B_i) w$, $i \in I$. ■

Сформулируем один из основных результатов работы.

Теорема 1. Пусть выполняются условия A1), A2), B1) и $S = \cap_{i \in I} (A_i + B_i)^{-1} 0 \neq \varnothing$. Тогда порожденные алгоритмом 1 последовательности (x_n), $(z_{(n,i)})$ и $(\upsilon_{(n,i)})$ сильно сходятся к элементу $z_0 = P_{\cap_{i\in I}(A_i+B_i)^{-1}0} x$.

Доказательство. Пусть подпоследовательность (x_{n_k}) слабо сходится к элементу $w \in H$. Известно, что $w \in S = \cap_{i \in I} (A_i + B_i)^{-1} 0$. Для $z_0 = P_{\cap_{i\in I}(A_i+B_i)^{-1}0} x$ из неравенства (10) следует

$$\| x - z_0 \| \leq \| x - w \| \leq \varliminf_{k\to\infty} \| x - x_{n_k} \| \leq \varlimsup_{k\to\infty} \| x - x_{n_k} \| \leq \| x - z_0 \|.$$

Таким образом, получено $\lim\limits_{k\to\infty} \| x - x_{n_k} \| = \| x - w \| = \| x - z_0 \|$. Откуда $x_{n_k} \to w = z_0$. Следовательно, $x_n \to z_0$. В силу (9) получаем $\upsilon_{(n,i)} \to z_0$ и $z_{(n,i)} \to z_0$. ■

Далее рассмотрим сходимость алгоритма 2.

СХОДИМОСТЬ АЛГОРИТМА 2

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполняются условия A1), A2), B1) и $S = \cap_{i \in I} (A_i + B_i)^{-1} 0 \neq \varnothing$. Тогда порожденные алгоритмом 2 последовательности (x_n), $(z_{(n,i)})$ и $(\upsilon_{(n,i)})$ сильно сходятся к элементу $z_0 = P_{\cap_{i\in I}(A_i+B_i)^{-1}0} x$.

Доказательство. Для $z \in S$ и порожденных алгоритмом 2 последовательностей имеет место неравенство

$$\| \upsilon_{(n,i)} - z \|^2 \leq \| x_n - z \|^2 - (1 - \lambda_n^2 L_i^2) \| x_n - z_{(n,i)} \|^2. \tag{13}$$

Покажем, что алгоритм 2 порождает цепочку вложений

$$H = C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n \supseteq \ldots \supseteq S = \cap_{i \in I} (A_i + B_i)^{-1} 0.$$

Предположим, что $S = \cap_{i \in I} (A_i + B_i)^{-1} 0 \subseteq C_n$. Для $z \in S$ из неравенства (13) следует $\max\limits_{i \in I} \| \upsilon_{(n,i)} - z \| \leq \| x_n - z \|$. Откуда, $S \subseteq C_{n+1} \subseteq C_n$.

Покажем существование конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x \|$. Поскольку $x_n = P_{C_n} x$, $S \subseteq C_n$, для всех $z \in S$ имеет место неравенство $\| x_n - z \|^2 \leq$ $\leq \| x - z \|^2 - \| x_n - x \|^2$. Откуда $\| x_n - x \|^2 \leq \| x - z \|^2$.

Последовательность $(\| x_n - x \|)$ ограничена сверху. Поскольку $C_{n+1} \subseteq C_n$, то $\| x_{n+1} - x \| \geq \| x_n - x \|$. Следовательно, последовательность $(\| x_n - x \|)$ ограничена сверху и неубывающая, поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x \|$.

Покажем фундаментальность последовательности (x_n). Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ с учетом того, что $C_{n+m} \subseteq C_n$, имеем

$$\| x_{n+m} - x_n \|^2 = \| x_{n+m} - P_{C_n} x \|^2 \leq \| x - x_{n+m} \|^2 - \| x_n - x \|^2.$$

Откуда следует фундаментальность последовательности (x_n).

Таким образом, $x_n \to z_0 \in H$ при $n \to \infty$.

Поскольку $x_{n+1} \in C_{n+1}$, то

$$\| v_{(n,i)} - x_n \| \le \| v_{(n,i)} - x_{n+1} \| + \| x_{n+1} - x_n \| \le 2 \| x_{n+1} - x_n \| \to 0 .$$

Используя неравенство (13), получаем

$$\| x_n - z_{(n,i)} \|^2 \le \frac{\| x_n - z \|^2 - \| v_{(n,i)} - z \|^2}{1 - \lambda_n^2 L_i^2} \le$$

$$\le \frac{(\|| x_n - z \| + \| v_{(n,i)} - z \|)}{1 - \lambda_n^2 L_i^2} \| x_n - v_{(n,i)} \| ,$$

где $z \in S$. Следовательно, имеем $v_{(n,i)} \to z_0$ и $z_{(n,i)} \to z_0$ при $n \to \infty$.

Покажем, что $z_0 \in S$. Имеем

$$u_{(n,i)} = \frac{x_n - z_{(n,i)}}{\lambda_n} + B_i z_{(n,i)} - B_i x_n \to 0 ,\ u_{(n,i)} \in (A_i + B_i) z_{(n,i)} .$$

Вследствие монотонности $A_i + B_i$ справедливо неравенство

$$(u_{(n,i)} - p,\, z_{(n,i)} - y) \ge 0 \quad \forall y \in \operatorname{dom}(A_i + B_i) ,\ \forall p \in (A_i + B_i) y .$$

После предельного перехода получим

$$(0 - p,\, z_0 - y) \ge 0 \quad \forall y \in \operatorname{dom}(A_i + B_i) ,\ \forall p \in (A_i + B_i) y .$$

Поскольку операторы $A_i + B_i$ являются максимальными монотонными, согласно лемме 1 имеем $0 \in (A_i + B_i) z_0$, $i \in I$, т.е. $z_0 \in S$.

Поскольку $x_n = P_{C_n} x$ и $S \subseteq C_n$, то

$$(x_n - x,\, z - x_n) \ge 0 \quad \forall z \in S. \tag{14}$$

Совершив в неравенстве (14) предельный переход, получим $(z_0 - x,\, z - z_0) \ge 0$ $\forall z \in S$, т.е. $z_0 = P_{\cap_{i \in I} (A_i + B_i)^{-1} 0} x$. ■

Замечание 5. Используя технику из работ [39, 40] можно обосновать такой вариант алгоритма 2 построения сильно сходящихся аппроксимаций решений системы (4).

Алгоритм 2*

Выбираем $x \in H$, $x_1 \in H$, $C_1 = H$, генерируем последовательность элементов $x_n \in H$ с помощью итерационной схемы

$$\begin{cases} y_n = x_n - \lambda_n B_{p(n)} x_n, \\ z_n = J_{\lambda_n A_{p(n)}} y_n, \\ v_n = x_n - y_n + z_n - \lambda_n B_{p(n)} z_n, \\ C_{n+1} = C_n \cap \{ z \in H \colon \| v_n - z \| \le \| x_n - z \| \}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x, \end{cases}$$

где $\lambda_n \in [a, b] \subseteq \left(0, \min_{i \in I} \dfrac{1}{L_i} \right)$, $p \colon \mathbb{N} \to I$ — сюръективное отображение такое, что для произвольного индекса $i \in I$ множество $p^{-1}(i) = \{ k \in \mathbb{N} : p(k) = i \}$ бесконечно.

Замечание 6. Условие $\lambda_n \in [a, b] \subseteq \left(0, \min_{i \in I} \dfrac{1}{L_i} \right)$ в алгоритмах не является конструктивным и имеет скорее теоретическое значение. На практике величину λ_n можно получить дроблением какой-нибудь начальной величины $\sigma > 0$ за конечное число шагов. Например,

$$
\begin{cases}
j(n) = \min\left\{ j \ge 0 : \max_{i \in I} \dfrac{\| B_i J_{\sigma 2^{-j} A_i} (E - \sigma 2^{-j} B_i) x_n - B_i x_n \|}{\| J_{\sigma 2^{-j} A_i} (E - \sigma 2^{-j} B_i) x_n - x_n \|} \le \dfrac{2^j \theta}{\sigma} \right\}, \\
\lambda_n = \dfrac{\sigma}{2^{j(n)}},
\end{cases}
$$

где $\sigma > 0$, $\theta \in (0,1)$ — заданные параметры [13, 16]. Заметим, что в этой схеме дробления необходимо вычислять значения композиций $(E + \sigma 2^{-j} A_i)^{-1} (E - \sigma 2^{-j} B_i)$, что может сказаться на общей вычислительной эффективности метода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена проблема решения конечной системы операторных включений с максимальными монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Предложены два итерационных алгоритма аппроксимации метрической проекции заданной точки на множество решений системы операторных включений. Алгоритмы основаны на трех известных методах: векторном варианте алгоритма расщепления Ценга и двух гибридных алгоритмах для аппроксимации неподвижных точек нерастягивающих операторов. Доказаны теоремы о сильной сходимости порожденных алгоритмами последовательностей.

Заметим, что основным недостатком алгоритмов является возрастающая сложность многогранных множеств, на которые проектируется точка x. В случае $I = \{1\}$ в алгоритме 1 проектирование на множество $C_n \cap Q_n$ осуществляется явно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brezis H. Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. — North–Holland, 1973. — 183 p.
2. Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2011. — 408 p.
3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
4. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М.: Мир, 1983. — 256 с.
5. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. — М.: Наука, 1988. — 448 с.
6. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. — 325 p.
7. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — М.: Наука, 1989. — 400 с.
8. Konnov I.V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer–Verlag, 2001. — 181 p.
9. Facchinei F., Pang J.-S. Finite–dimensional variational inequalities and complementarity problem. — New York: Springer, 2003. — **2**. — 666 p.
10. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
11. Brezis H., Lions P.L. Produits infinis de résolvantes // Israel J. Math. — 1978. — **29**. — P. 329–345.
12. Малицкий Ю.В., Семенов В.В. Вариант экстраградиентного алгоритма для монотонных вариационных неравенств // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — № 2. — С. 125–131.
13. Tseng P. A modified forward–backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — **38**. — P. 431–446.
14. Xiu N., Zhang J. Some recent advances in projection–type methods for variational inequalities // J. Comput. Appl. Math. — 2003. — **152**. — P. 559–585.
15. Корпелевич Г.М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и мат. методы. — 1976. — **12**, № 4. — С. 747–756.

16. Хоботов Е.Н. О модификации экстраградиентного метода для решения вариационных неравенств и некоторых задач оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1987. — 27, № 10. — С. 1462–1473.

17. Malitsky Yu.V., Semenov V.V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // J. Global Optimiz. — 2014. — P. 1–10. — DOI 10.1007/s10898–014–0150–x.

18. Войтова Т.А., Семенов В.В. Метод решения двухэтапных операторных включений // Журн. обчисл. та прикл. математики. — 2010. — № 3 (102). — С. 34–39.

19. Маліцький Ю.В., Семенов В.В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Там же. — С. 79–88.

20. Семенов В.В. О методе параллельной проксимальной декомпозиции для решения задач выпуклой оптимизации // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 2. — С. 42–46.

21. Ляшко С.И., Семенов В.В., Войтова Т.А. Экономичная модификация метода Корпелевич для монотонных задач о равновесии // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 4. — С. 146–154.

22. Денисов С.В., Семенов В.В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // Журн. обчисл. та прикл. математики. — 2011. — № 3 (106). — С. 27–32.

23. Семенов В.В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Там же. — 2012. — № 2 (108). — С. 53–58.

24. Апостол Р.Я., Гриненко А.А., Семенов В.В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // Там же. — № 1 (107). — С. 3–14.

25. Ceng L.C., Chou C.Y. On the relaxed hybrid–extragradient method for solving constrained convex minimization problems in Hilbert spaces // Taiwanese J. Math. — 2013. — **17**, N 3. — P. 911–936.

26. Коннов И.В. О системах вариационных неравенств // Изв. вузов. Математика. — 1997. — № 12. — С. 79–88.

27. Censor Y., Gibali A., Reich S. A von Neumann alternating method for finding common solutions to variational inequalities // Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications. — 2012. — **75**. — P. 4596–4603.

28. Censor Y., Gibali A., Reich S., Sabach S. Common solutions to variational inequalities // Set–Valued and Variational Analysis. — 2012. — **20**. — P. 229–247.

29. Censor Y., Gibali A., Reich S. Algorithms for the split variational inequality problem // Numer. Algorithms. — 2012. — **59**. — P. 301–323.

30. Xu H.K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — **298**. — P. 279–291.

31. Nguyen B., Dang T.T.H. Tikhonov regularization method for system of equilibrium problems in Banach spaces // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 8. — С. 1098–1105.

32. Semenov V.V. Strongly convergent algorithms for variational inequality problem over the set of solutions the equilibrium problems // Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications / M.Z. Zgurovsky and V.A. Sadovnichiy (Eds). — Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer Intern. Publ. (Switzerland), 2014. — **211**. — P. 131–146.

33. Combettes P.L., Hirstoaga S.A. Equilibrium Programming in Hilbert Spaces // J. Nonlinear Convex Anal. — 2005. — **6**. — P. 117–136.

34. Combettes P.L. Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators // Optimization. — 2004. — **53**. — P. 475–504.

35. Nakajo K., Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — **279**. — P. 372–379.

36. Nadezhkina N., Takahashi W. Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz–continuous monotone mappings // SIAM J. Optim. — 2006. — **16**, N 4. — P. 1230–1241.

37. Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — **341**. — P. 276–286.

38. Войтова Т.А., Денисов С.В., Семенов В.В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журн. обчисл. та прикл. математики. — 2011. — № 1 (104). — С. 10–23.

39. Семенов В.В. Об одной принципиальной схеме вычисления обобщенной проекции // Доп. НАН України. — 2013. — № 6. — С. 41–46.

40. Малицкий Ю.В., Семенов В.В. Схема внешних аппроксимаций для вариационных неравенств на множестве неподвижных точек фейеровских операторов // Там же. — 2013. — № 7. — С. 47–52.

Поступила 25.07.2013