УДК 519.21

В.С. КИРИЛЮК

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ МЕРЫ РИСКА И ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОРТФЕЛИ ПО СООТНОШЕНИЮ ВОЗНАГРАЖДЕНИЕ–РИСК[1]

Аннотация. Изучены проблемы поиска оптимальных портфельных решений по соотношению вознаграждение–риск в условиях риска и частичной неопределенности. Показано, каким образом подобные проблемы сводятся к задачам линейного программирования как для случая известных распределений случайных величин, так и для случая неточных вероятностей сценариев. Рассмотрены примеры применения описанного аппарата.

Ключевые слова: полиэдральная когерентная мера риска, условный *VaR*, спектральная мера риска, оптимизация портфеля, соотношение вознаграждение–риск, мера эффективности.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе сделана попытка систематизировать подходы к принятию решений по соотношению вознаграждение–риск в условиях риска и неопределенности. Под условиями риска понимается ситуация, когда лицо, принимающее решения (ЛПР), знает вероятностное распределение случайных величин (с.в.), влияющих на выбор решения. Условия частичной неопределенности подразумевают неполную информацию о таких распределениях, например, в случае неточных сценарных вероятностей.

Ситуация, в которой развитие будущих событий описывается множеством альтернативных сценариев с посценарными распределениями значений соответствующих с.в., типична. Однако точно идентифицировать вероятности сценариев (особенно малые) достаточно сложно. Зачастую их можно лишь оценить, например, сверху и снизу. Если вероятностные распределения с.в. известны, то решения принимаются с учетом этой информации. Если доступны только некоторые оценки сценарных вероятностей, то естественно принимать решения, исходя из робастных постановок задач, учитывающих подобные обстоятельства.

В стохастическом программировании давно известен минимаксный (робастный) подход к принятию решений, заключающийся в использовании наихудшего среднего ожидания по некоторому множеству распределений [1]. Такое множество позволяет описывать неопределенность, обусловленную неполнотой информации о распределении с.в., которую можно представить значительно шире [2–4], чем неточными оценками сценарных вероятностей (например, известны только некоторые моменты с.в. [2]).

В случае применения мер риска используется подход, отличающийся лишь обоснованием подобных математических конструкций. Если известно распределение с.в., по нему искусственно строится множество вероятностных мер, наихудшее среднее ожидание по которому используется для оценки риска. В зависимости от конструкции этого множества получается та или иная мера риска, используемая в качестве критерия для выбора решений. Мотивацией такого построения является не неполнота информации о распределении, а желание получить более надежные (робастные) решения по сравнению с теми, которые обусловлены оценкой риска с помощью средних значений с.в.

Если информация о распределении содержит неопределенность, то она дополнительно учитывается в конструкции упомянутого множества вероятностных

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Международного проекта в рамках сотрудничества с Международным институтом системного анализа (IIASA), распоряжение Президиума НАН Украины № 212 от 28.02.2012.

мер при построении меры риска. Чтобы не выходить за рамки математического аппарата для мер риска, применяемого при известных распределениях с.в., изучим при учете подобной неопределенности только случай неточных сценарных вероятностей.

При изложении ограничимся также случаем конечных дискретно распределенных с.в., который позволяет описывать постановки и методы решения формулируемых задач с помощью достаточно простого аппарата математического программирования.

В работе рассмотрен аппарат полиэдральных когерентных мер риска (ПКМР), который затем используется в задачах оптимизации портфеля как по соотношению вознаграждение–риск (оптимизации одного критерия при ограничениях на другой), так и по отношению вознаграждение–риск (оптимизации вознаграждения на единицу риска). Сформулированы теоремы, позволяющие сводить такие проблемы к соответствующим задачам линейного программирования (ЛП) как для случая известных распределений с.в., так и при неточных сценарных вероятностях.

1. ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ МЕРЫ РИСКА

1.1. Случай известных распределений случайных величин. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P_0) задана с.в. $X(.):\Omega \to R$, описывающая некий финансовый поток. В основополагающей работе [5] для оценки риска с.в. X введено понятие когерентной меры риска (КМР). Его смысл заключается в том, что с теоретической точки зрения мера риска должна удовлетворять четырем аксиомам:

1) $\rho(X+a) = \rho(X) - a$ — трансляционно инвариантна;
2) $\rho(X_1 + X_2) \le \rho(X_1) + \rho(X_2)$ — субаддитивна;
3) $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$, $\lambda \ge 0$, — положительно однородна;
4) $\rho(X_1) \le \rho(X_2)$, $X_1 \ge X_2$, — монотонна.

Здесь a — детерминированная величина (наличных денег), которая при добавлении к финансовому потоку уменьшает на данную величину его меру риска (потенциальные потери), а отношение предпочтение для с.в. в п. 4 понимается в смысле стохастического доминирования первого порядка (по распределению).

Функции с описанными свойствами названы КМР. Доказано, что необходимым и достаточным условием выполнения этих свойств является представление подобной меры в виде

$$\rho(X) = \sup\{E_P[-X] : P \in Q\}, \tag{1}$$

где $E_P[.]$ — математическое ожидание по вероятностной мере P, а Q — некоторое выпуклое замкнутое множество вероятностных мер. Нетрудно видеть, что точное описание множества Q однозначно определяет КМР $\rho(.)$.

Такая мера риска описывает для с.в. финансового потока X детерминированную величину его потенциальных потерь. Это наименьшая величина (наличных денег), добавление которой к потоку X делает его безрисковым.

В работах [6, 7] предложена мера Conditional Value-at-Risk (*CVaR*):

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_X(p)dp,$$

где $q_X(\alpha) = \inf\{z / F_X(z) \ge \alpha\}$ — функция квантиля, а $F_X(.)$ — функция распределения с.в. X.

По сути $CVaR_\alpha$ — среднее значение по правому $(1-\alpha)$-хвосту распределения. Поскольку в представленном выше виде *CVaR* вводилась для описания потерь с.в. потока X, которые описываются величиной $(-X)$, для применения данной формулы такую меру риска надо обозначать $CVaR_\alpha(-X)$. Во избежание этого в статье используется соответствующее определение из [8] в виде

$$CVaR_\alpha(X) = -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\alpha} q_X(p)dp.$$

Отметим, что величина $VaR_\alpha(X) = -q_X(\alpha)$ в литературе в области финансов называется Value-at-Risk (VaR). Она является популярной мерой риска в теории финансов, давно используется и легко интерпретируется, однако пренебрегает ущербами на $(1-\alpha)$-хвосте распределения и несубаддитивна. Это серьезный недостаток в портфельной оптимизации.

Нетрудно видеть, что в таких обозначениях

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} VaR_p(X)dp,$$

поэтому она интерпретируется как интегральная VaR. Ныне $CVaR$ — наиболее известный представитель класса КМР. Отметим, что эта мера риска известна и под другими названиями: Expected Shortfall [8, 9], Tail VaR [10], Averaged VaR [11] и др. В последнее время она рассматривается как вариант для замены VaR в финансовых приложениях.

Для конечных дискретно распределенных с.в. в работе [12] введен, а затем в [13] подробно изучен класс ПКМР, являющихся подмножеством КМР, у которых в представлении (1) множество Q имеет вид выпуклой оболочки конечного числа точек.

Рассмотрим случай конечных дискретно распределенных с.в., представленных в виде векторов значений $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и сценарных вероятностей $p_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0)$. Тогда такое множество вероятностных мер Q имеет вид $Q = \mathrm{co}\,\{p_i : i = 1, \ldots, k\}$ или

$$Q = \{p : Bp \le c,\ p \ge 0\}, \tag{2}$$

где B и c — матрица и вектор соответствующих размерностей.

Поскольку Q — множество вероятностных мер, его описание в (2) содержит стандартное условие $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, которое представлено двумя неравенствами: $\sum_{i=1}^n p_i \le 1$ и $-\sum_{i=1}^n p_i \le -1$.

Разделим описание множества Q в (2) на стандартную (обязательную) и содержательную части. Представим матрицу B и вектор c как

$$B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix},\quad c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где B_0 и c_0, описывающие приведенные выше неравенства, стандартны:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1\ldots1 \\ -1\ldots-1 \end{pmatrix},\quad c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

а B_1 и c_1 описывают содержательную часть в соотношении (3), которая и определяет меру риска в виде соотношений (1)–(4).

Таким образом, для идентификации ПКМР в представлении (1)–(4) достаточно описать матрицу B_1 и вектор c_1.

Замечание 1. Отметим, что независимо от работ [12, 13] Айхорн и Ремиш предложили в [14] близкое определение полиэдральной меры риска, которое затем применяли и развивали, например, в [15–17]. Они распространили это понятие на многоэтапные задачи стохастического программирования [15]. Определение вводилось ими как некоторое обобщение представления $CVaR$ из [6, 7] в двойственной форме, поэтому используемые в нем многогранные множества попадают в двойственные конечномерные пространства. Это обстоятельство позволяет разрешить техническую сторону проблемы при работе с непрерывно распределенными с.в. в пространствах $L_p(\Omega, \Sigma, P), 1 \le p < \infty$. Однако, по мнению автора, определения из [12] вполне достаточно для приложений, где обычно используются дискретные с.в., распределенные на конечном множестве событий-сценариев. К тому же оно позволяет конструировать различные меры риска в исходных пространствах. Переход к таким двойственным представлениям более естественен при преобразовании исходных задач, чем в их постановках.

Класс ПКМР достаточно широк, поскольку он содержит целый ряд известных мер риска и инвариантен относительно операций выпуклой комбинации, функций максимума и инфимальной конволюции [13].

Пример 1. Мера $CVaR_\alpha$ является ПКМР и представляется как (1)–(4), где матрица B_1 и вектор c_1 имеют вид:

$$B_1 = I,\ c_1 = \frac{1}{1-\alpha} p_0, \tag{5}$$

здесь I — единичная матрица, а p_0 — вектор сценарных вероятностей.

Пример 2. Для наихудшего случая (при максимальных убытках) Q представляет собой множество всех возможных вероятностных мер, т.е. в описании Q (3) не имеется содержательной части, описанной B_1 и c_1.

Пример 3. Математическое ожидание потерь $E_{P_0}[-X]$ также является тривиальным примером подобной меры риска, для него множество $Q = \{p_0\}$ содержит всего одну точку p_0.

Пример 4. Спектральная КМР $M_\varphi(.)$, которая вводилась в [18] как

$$M_\varphi(X) = -\int_0^1 \varphi(p) q_X(p) dp, \tag{6}$$

где функция $\varphi{:}[0,1] \to R$, названная спектром риска, имеет следующие свойства: а) $\varphi(.) \geq 0$; б) $\varphi(.)$ — убывающая функция; в) $\int_0^1 \varphi(p) dp = 1$.

Для дискретных с.в. на множестве с n элементарными событиями-сценариями спектральная мера риска $M_\varphi(.)$ представляется в виде выпуклой комбинации $CVaR_\alpha$ при различных α:

$$M_\varphi(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i CVaR_{\alpha_i}(X),\ 0 \leq \lambda_i \leq 1,\ i = 1, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \tag{7}$$

где можно точно указать параметры λ_i, α_i, $i = 1, \ldots, n$.

Упорядочим посценарные значения с.в. X в порядке убывания, перенумеровав в соответствии с этим порядком сценарии и их вероятности. Обозначим последние p_i^*, $i = 1, \ldots, n$.

Представим $M_\varphi(.)$ в виде выпуклой комбинации VaR_α, т.е.

$$M_\varphi(X) = \sum_{i=1}^n \mu_i VaR_{\alpha_i}(X),$$

где

$$\alpha_i = 1 - \sum_{j=1}^i p_j^*,\ i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

$$\mu_1 = \int_0^{p_1^*} \varphi(p) dp,\quad \mu_2 = \int_{p_1^*}^{p_1^* + p_2^*} \varphi(p) dp,\quad \mu_i = \int_{p_1^* + \ldots + p_{i-1}^*}^{p_1^* + \ldots + p_i^*} \varphi(p) dp,\ i = 3, \ldots, n.$$

Сравнивая это описание $M_\varphi(.)$ с его представлением в (7) при α_i, $i = 1, \ldots, n$, из (8), можем пересчитать λ_i, $i = 1, \ldots, n$, используя величины μ_i, $i = 1, \ldots, n$. Не вдаваясь в подробности, в результате такого пересчета получаем

$$\lambda_i = \frac{p_1^* + \ldots + p_i^*}{p_i^*}\left(\mu_i - \frac{p_i^*}{p_{i+1}^*}\mu_{i+1}\right),\ i = 1, \ldots, n-1,\ \lambda_n = \frac{\mu_n}{p_n^*}.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = \left(\int_0^{p_1^*} \varphi(p)dp - \frac{p_1^*}{p_2^*}\int_{p_1^*}^{p_1^* + p_2^*} \varphi(p)dp\right),\ \lambda_n = \frac{1}{p_n^*}\int_{p_1^* + \ldots + p_{n-1}^*}^{1} \varphi(p)dp, \tag{9}$$

$$\lambda_i = \frac{p_1^* + \ldots + p_i^*}{p_i^*}\left(\int_{p_1^* + \ldots + p_{i-1}^*}^{p_1^* + \ldots + p_i^*} \varphi(p)dp - \frac{p_i^*}{p_{i+1}^*}\int_{p_1^* + \ldots + p_i^*}^{p_1^* + \ldots + p_{i+1}^*} \varphi(p)dp\right),\ i = 2, \ldots, n-1. \tag{10}$$

Можно проверить, что $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}\mu_i = \int_0^1 \varphi(p)dp = 1$ (свойство спектра в)) и $0 \le \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$ (свойства спектра а) и б)).

Таким образом, спектральная мера риска $M_\varphi(.)$ для дискретно распределенной с.в. X представляется в виде (7)–(10).

В случае, когда вероятности всех сценариев равны $\frac{1}{n}$, выражения для параметров представления $M_\varphi(.)$ в (7)–(10) значительно упрощаются:

$$\alpha_i = 1 - \frac{i}{n},\ i = 1, \ldots, n,$$

$$\lambda_i = i\left(\int_{(i-1)/n}^{i/n} \varphi(p)dp - \int_{i/n}^{(i+1)/n} \varphi(p)dp\right),\ i = 1, \ldots, n-1,\ \lambda_n = n\int_{(n-1)/n}^{1} \varphi(p)dp.$$

Замечание 2. В отличие от представления спектральной меры риска $M_\varphi(.)$ в [18], где α обозначает ширину хвоста для *CVaR*, в (7)–(10) шириной хвоста является величина $(1-\alpha)$.

Пусть имеется некоторая выпуклая комбинация *CVaR* для с.в. X:

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i CVaR_{\alpha_i}(X),\ 0 \le \lambda_i \le 1,\ i = 1, \ldots, k,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1. \tag{11}$$

Утверждение 1. Выпуклая комбинация $CVaR_{\alpha_i}(X)$ в (11) есть $CVaR_{\alpha_*}(X)$, где α_* определяется из соотношения

$$\frac{1}{1-\alpha_*} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\alpha_i}. \tag{12}$$

Доказательство. Проведем его с помощью элементарных рассуждений об операциях над подобными выпуклыми многогранниками. Рассмотрим представление $CVaR_{\alpha_1}$ в форме КПМР (1)–(5), где соответствующее множество Q_1 из (1) описывается как

$$Q_1 = \left\{Ip \le \frac{1}{1-\alpha_1}p_0, < e, p > \le 1, < -e, p > \le -1, -Ip \le 0\right\}, \tag{13}$$

или в компактном виде

$$Q_1 = \left\{0 \le Ip \le \frac{1}{1-\alpha_1}p_0, < e, p > = 1\right\},$$

где I — тождественная матрица, $e = (1, \ldots, 1)$ — единичный вектор.

Нетрудно видеть, что эта мера риска имеет вид опорной функции

$$CVaR_{\alpha_1}(X) = W_{Q_1}(-x) = \max\{< -x, p >: p \in Q_1\}$$

выпуклого многогранника Q_1, который задан в (13) с помощью $2n+2$ нормалей, представленных в левых частях неравенств коэффициентами матриц I и $-I$, а также единичными векторами e и $-e$.

Таким образом, множество Q_1 задается однозначно. Изучим его опорную функцию $W(-x)$ (по направлению $-x$). Как нетрудно видеть,

$$\lambda_1 CVaR_{\alpha_1}(X) = W_{Q_1}(-\lambda_1 x) = \max\{< -\lambda_1 x, p >: p \in Q_1\} =$$
$$= \max\{< -x, \lambda_1 p >: p \in Q_1\} = \max\{< -x, p >: p \in \lambda_1 Q_1\} = W_{\lambda_1 Q_1}(-x)$$

является опорной функцией многогранника

$$\lambda_1 Q_1 = \left\{ 0 \le Ip \le \frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} p_0, < e, p > = \lambda_1 \right\}, \tag{14}$$

который получен умножением многогранника Q_1 на коэффициент λ_1.

Аналогичную операцию можно проделать с многогранником Q_2:

$$\lambda_2 Q_2 = \left\{ 0 \le Ip \le \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2} p_0, < e, p > = \lambda_2 \right\}. \tag{15}$$

Как известно из выпуклого анализа (см., например, [19]), сумма опорных функций множеств — опорная функция суммы Минковского таких множеств, т.е.

$$\lambda_1 CVaR_{\alpha_1}(X) + \lambda_2 CVaR_{\alpha_2}(X) = W_{\lambda_1 Q_1}(-x) + W_{\lambda_2 Q_2}(-x) = W_{\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2}(-x).$$

Поскольку множества (14) и (15) являются подобными выпуклыми многогранниками, которые задаются с помощью одного и того же множества нормалей, их сумма Минковского имеет вид

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 = \left\{ 0 \le Ip \le \left(\frac{\lambda_1}{1-\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{1-\alpha_1} \right) p_0, < e, p > = \lambda_1 + \lambda_2 \right\}.$$

Проводя аналогичные рассуждения для произвольной выпуклой комбинации $CVaR_\alpha$, получаем

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i CVaR_{\alpha_i}(X) = \sum_{i=1}^{k} W_{\lambda_i Q_i}(-x) = W_{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q_i}(-x) = \max\left\{ < -x, p >: p \in \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q_i \right\}, \tag{16}$$

где с учетом равенства $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ имеем

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q_i = \left\{ 0 \le Ip \le \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_0, < e, p > = 1 \right\}. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что (16), (17) описывают ПКМР в виде (1)–(5), где

$$B_1 = I, c_1 = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_0.$$

Таким образом, матрица B_1 является тождественной, а вектор c_1 пропорционален вектору p_0. В соответствии с (5) это есть не что иное, как $CVaR_{\alpha_*}$, параметр которого α_* описывается соотношением

$$\frac{1}{1-\alpha_*} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i}.$$

Замечание 3. Подобные рассуждения можно использовать и в более общих пространствах. Так, утверждение 1 имеет место в пространствах $L_p(\Omega, \Sigma, P)$, $1 \leq p < \infty$.

Действительно, для с.в. $X(.) \in L_p(\Omega, \Sigma, P)$ распределение вероятностей на σ-алгебре Σ описывается стохастической мерой P (аналог вектора p_0), а $CVaR_\alpha(X)$ представляется в следующем виде:

$$CVaR_\alpha(X) = \sup\left\{ -\int_\Omega x(\omega)q(\omega)dP(\omega) : q(.) \in Q_1 \right\},$$

где $Q_1 = \left\{ q(.) \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, P), 0 \leq q(.) \leq \frac{1}{1-\alpha} \, a.s., \int_\Omega q(\omega)dP(\omega) = 1 \right\}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

В этом случае множество вероятностных мер Q из (1) описывается как

$$Q = \{P_q : P_q(E) = \int_E q(\omega)dP(\omega), E \in \Sigma, q(.) \in Q_1\}.$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i CVaR_{\alpha_i}(X) = \sup\left\{ -\int_\Omega x(\omega)q(\omega)dP(\omega) : q(.) \in Q_2 \right\},$$

где $Q_2 = \left\{ q(.) \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, P), 0 \leq q(.) \leq \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} a.s., \int_\Omega q(\omega)dP(\omega) = 1 \right\}$.

Нетрудно видеть, что это выражение представляется формулой (1) с множеством вероятностных мер Q:

$$Q = \left\{ P_q : P_q(E) = \int_E q(\omega)dP(\omega), E \in \Sigma, q(.) \in Q_2 \right\}.$$

А это не что иное, как $CVaR_{\alpha_*}(X)$, где α_* описывается равенством (12). Следовательно, утверждение 1 имеет место в пространствах $L_p(\Omega, \Sigma, P)$, $1 \leq p < \infty$.

Следствие 1. Спектральная мера риска $M_\varphi(.)$ из (6), представленная для дискретных с.в. с конечным множеством сценариев-событий в виде (7)–(10), является $CVaR_{\alpha_*}(X)$, где α_* определяется из соотношения

$$\frac{1}{1-\alpha_*} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i}, \tag{18}$$

в котором α_i, λ_i, $i = 1, \ldots, n$, описываются формулами (8)–(10).

Пример 5. Представление Кусуоки инвариантных по распределению КМР [20, 21] имеет вид

$$\max_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i CVaR_{\alpha_i}(X), \tag{19}$$

где Λ — выпуклое замкнутое множество векторов весовых коэффициентов, сумма которых равна 1.

Следствие 2. Представление Кусуоки (19) есть не что иное, как $CVaR_{\alpha_*}(X)$, где α_* определяется из соотношения

$$\frac{1}{1-\alpha_*} = \max_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i}. \tag{20}$$

Покажем это. Как следует из утверждения 1, выпуклые комбинации $CVaR_{\alpha_i}(X)$, стоящие под знаком максимума, являются также некоторыми $CVaR$.

На множестве таких мер имеется очевидное отношение порядка: $CVaR_{\alpha_1}(X) \geq$ $\geq CVaR_{\alpha_2}(X)$ для $\frac{1}{1-\alpha_1} \geq \frac{1}{1-\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 \geq \alpha_2$.

Нетрудно видеть, что мера риска из (19) становится максимальной для α_* из соотношения (20).

Замечание 4. Для ПКМР матрица B_1 и вектор c_1, вообще говоря, могут быть произвольными. Их выбор должен основываться на разумной (содержательной) аргументации.

1.2. Случай неполной информации о сценарных вероятностях. Рассмотрим случай, когда значения дискретно распределенной по событиям-сценариям с.в. X известны, а вектор сценарных вероятностей $p_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0)$ точно не идентифицирован. Будем его обозначать P_0, если он трактуется как вероятностная мера соответствующего дискретного распределения. Например, данный вектор допускает лишь некоторые оценки в виде принадлежности к множеству

$$P_0 \in P_U, \tag{21}$$

где P_U — некоторое множество вероятностных мер.

Замечание 5. Иногда описанная неопределенность в вероятностях множества сценариев проявляется в постановках задач в явном виде. Например, при оценке риска наводнений, когда имеется фиксированный набор базовых сценариев возникновения и распространения наводнений, для которых трудно идентифицировать сценарные вероятности [22, 23].

Для каждого распределения (X, P_0), где $P_0 \in P_U$, можно определить ПКМР в виде (1), (2), в которой конструкция множества Q из (2), вообще говоря, зависит от исходной меры P_0. Таким образом, Q — уже не множество, а многозначное отображение (м.о.) с многогранными образами, которое определяет меру риска $\rho(.)$ в зависимости от исходной вероятностной меры P_0 как $Q(P_0)$ [13], т.е. $\rho(X) = \sup\{E_P[-X]: P \in Q(P_0)\}$.

Это описано в примерах 1 и 3. Так, $CVaR_\alpha$ представлена в (1)–(5), где P_0 используется в (5) в явном виде при описании $c_1(P_0)$, а для средних потерь $Q(P_0) = \{P_0\}$.

На основании таких рассуждений можно определить меру риска на множестве неопределенности P_U вида (21) по исходной мере риска $\rho_0(.)$ (описанной м.о. $Q_{\rho_0}(.)$) с помощью следующей робастной конструкции [24]:

$$\rho_{\rho_0, P_U}(X) = \sup\{E_P[-X]: P \in Q_{\rho_0}(P_U)\}, \tag{22}$$

где $Q_{\rho_0}(P_U) = \overline{\text{co}}\left(\bigcup_{P_0 \in P_U} Q_{\rho_0}(P_0)\right)$, $\overline{\text{co}}$ — выпуклая замкнутая оболочка.

Нетрудно видеть, что такая конструкция оценивает риск наибольшим значением исходной меры $\rho_0(.)$, обусловленным множеством неопределенности P_U.

Замечание 6. Понятно, что для многогранных множеств P_U определение (22) не выводит меры риска $\rho_{\rho_0, P_U}(.)$ из класса исходной меры $\rho_0(.)$. Если $\rho_0(.)$ являлась ПКМР, то и построенная в соответствии с (22) $\rho_{\rho_0, P_U}(.)$ остается ПКМР.

Замечание 7. Для класса ПКМР представление $\rho_{\rho_0, P_U}(.)$ в виде (1)–(4) требует пересчета соответствующих матрицы B_1 и вектора c_1 для $\rho_{\rho_0, P_U}(.)$ по исходным B_1, c_1 для $\rho_0(.)$ и множеству P_U. Вообще говоря, такой пересчет не является тривиальным, хотя и не выходит за рамки аппарата линейного программирования (ЛП).

Иногда необходимые матрица и вектор выписываются сразу. Это связано с достаточно простой структурой исходных множества P_U и м.о. $Q_{\rho_0}(.)$ [24]. Например, это имеет место при неточных сценарных вероятностях.

Неточные сценарные вероятности. Пусть для вектора сценарных вероятностей p_0 известны только покоординатные оценки сверху и снизу в виде соответствующих векторов p_l и p_u, а именно

$$P_U = \left\{ p: p \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \ p_l \leq p \leq p_u \right\}. \tag{23}$$

Пример 6. При неточных сценарных вероятностях риск оценивается средними потерями $E_{P_0}[-X]$. Учитывая, что $Q_E(P_0) = \{P_0\}$, имеем

$$Q_E(P_U) = \left\{ p: p \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_l \leq p \leq p_u \right\} =$$

$$= \left\{ p: p \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, -Ip \leq -p_l, Ip \leq p_u \right\}.$$

Следовательно, $\rho_{E,P_U}(.)$ описывается соотношениями (1)–(4), где

$$B_1 = \begin{pmatrix} -I \\ I \end{pmatrix}, \ c_1 = \begin{pmatrix} -p_l \\ p_u \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Пример 7. При неточных вероятностях риск оценивается $CVaR_{\alpha_*}$. С учетом соотношений (2)–(5) для $CVaR_{\alpha_*}$ соответствующее м.о. $Q_{CVaR_{\alpha_*}}(.)$ имеет вид

$$Q_{CVaR_{\alpha_*}}(p_0) = \left\{ p: p \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, Ip \leq \frac{p_0}{1-\alpha_*} \right\}.$$

Учитывая (23), окончательно имеем

$$Q_{CVaR_{\alpha_*}}(P_U) = \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{p_l \leq p_0 \leq p_u} \left\{ p: p \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, Ip \leq \frac{p_0}{1-\alpha_*} \right\} =$$

$$= \left\{ p: p \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, Ip \leq \frac{p_u}{1-\alpha_*} \right\}.$$

Таким образом, ПКМР $\rho_{CVaR_{\alpha_*},P_U}(.)$ можно описать соотношениями (1)–(4), где

$$B_1 = I, \ c_1 = \frac{p_u}{1-\alpha_*}. \tag{25}$$

Пример 8. При неточных вероятностях риск оценивается спектральной мерой риска (7)–(10). Согласно следствию 1 этой мерой риска является $CVaR$, описанная в (1)–(5), (18), (8)–(10), для которой применим результат примера 7. В итоге получим меру риска в виде (1)–(4), (25), где используемые в (25) параметры α_* вычисляются с помощью (18), (8)–(10).

Таким образом, такая мера описывается соотношениями (1)–(4), (25), (18), (8)–(10).

Пример 9. При неточных вероятностях риск оценивается представлением Кусуоки в виде (19). Согласно следствию 2 этой мерой риска является $CVaR$, описанная как (1)–(5), (20). Применяя результат из примера 7, получаем меру риска в виде (1)–(4), (25), (20).

Замечание 8. Множества неопределенностей P_U бывают более сложными, чем оценки вероятностей сверху и снизу, например, могут задаваться в виде линейных неравенств.

2. ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ПО СООТНОШЕНИЮ ВОЗНАГРАЖДЕНИЕ–РИСК

Использованный ранее термин «мера риска» по сути обозначает некую функцию риска, оценивающую его количественно. В настоящем разделе будем называть ее также, рассматривая наряду с ней и функцию вознаграждения для определения эффективных решений по соотношению вознаграждение–риск.

Традиционно такой подход предлагал Марковиц в основополагающих работах по портфельной теории. В [25] он в качестве функции вознаграждения использовал среднюю доходность $E[X]$ финансового актива X, а в качестве функции риска — его дисперсию $\sigma^2(X)$. Затем в [26] Марковиц предложил для оценки риска применять полудисперсию $\sigma_-^2(X) = E[(X - E[X])_-^2]$, учитывающую только отклонение вниз.

Отношение предпочтения зададим с помощью соотношения функций вознаграждения–риска. Построим такие функции с помощью конструкций, близких к ПКМР.

В качестве функции вознаграждения $r(\cdot)$ рассмотрим функцию

$$r(X) = \min\{E_P[X] : P \in Q_r\}, \tag{26}$$

где Q_r — некоторое полиэдральное множество вероятностных мер:

$$Q_r = \{p : B_r p \le c_r,\ p \ge 0\}. \tag{27}$$

Нетрудно видеть, что такая функция имеет свойства, подобные приведенным в пп. 1–4 разд. 1 для КМР, а именно:

1′) $r(X + a) = r(X) + a$;
2′) $r(X_1 + X_2) \ge r(X_1) + r(X_2)$;
3′) $r(\lambda X) = \lambda r(X)$, $\lambda \ge 0$;
4′) $r(X_1) \ge r(X_2)$, $X_1 \ge X_2$.

Отметим вогнутость функции, которая означает, что диверсификация активов не уменьшает потенциального (гарантированного) вознаграждения. Представление (26) описывает вознаграждение $r(.)$ как наихудшую по некоторому множеству вероятностных мер ожидаемую доходность.

В качестве функции риска рассмотрим некоторую ПКМР $\rho(.)$:

$$\rho(X) = \max\{E_P[-X] : P \in Q_\rho\}, \tag{28}$$

где Q_ρ — некоторое полиэдральное множество вероятностных мер,

$$Q_\rho = \{p : B_\rho p \le c_\rho,\ p \ge 0\}. \tag{29}$$

Напомним, что B_r, B_ρ и c_r, c_ρ — матрицы и векторы соответствующих размерностей.

Понятно, что, вообще говоря, Q_r и Q_ρ должны быть разными множествами, поскольку их совпадение означает использование одного и того же критерия (с разными знаками для различных функций).

Как и ранее, разделим описание множеств Q_r и Q_ρ на стандартную и содержательную части, т.е.

$$B_r = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_{1r} \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_{1r} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$B_\rho = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_{1\rho} \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_{1\rho} \end{pmatrix}, \tag{31}$$

в которых B_0 и c_0 стандартные:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 \ldots 1 \\ -1 \ldots -1 \end{pmatrix},\ c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Пример 10. Рассмотрим предпочтение по соотношению средняя доходность–ПКМР. Нетрудно видеть, что $r(X) = E_{P_0}[-X]$ для $Q_1 = \{p_0\}$, а $\rho(.)$ является ПКМР, если Q_ρ задано в виде (29), (31), (32). Их соотношение и будет определять соответствующее предпочтение.

Замечание 9. В [24] в качестве аналога функции $r(.)$ использовалась отличная от (26) конструкция. Она применялась там для оценки сверху потенциальных границ средней доходности, поэтому учитывала оптимистический вариант неопределенности. В (26) как в робастной конструкции учитывается ее пессимистическая составляющая.

Подобное задание функции $r(.)$ позволяет рассматривать робастное представление средней доходности в виде ее гарантированной оценки по множеству (неопределенности) сценарных вероятностей Q_r.

Пример 11. Рассмотрим робастное предпочтение по соотношению средняя доходность–ПКМР при неточных вероятностях.

Пусть, как и ранее, неточные сценарные вероятности заданы своими оценками снизу и сверху в виде (23). Представим соотношения

$$B_{1r} = \begin{pmatrix} -I \\ I \end{pmatrix}, \quad c_{1r} = \begin{pmatrix} -p_l \\ p_u \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Тогда функция вознаграждения $r(.)$ описывается в виде (26), где множество Q_r представляется как (27), (30), (32), (33).

Соответственно функция риска $\rho_{\rho,P_U}(X)$ имеет вид конструкции (22), которая строится по исходной ПКМР (28), (29), (31), (32) и множеству P_U из (23).

Представим соотношения

$$B_{1\rho} = I, \quad c_{1\rho} = \frac{p_u}{1-\alpha}. \tag{34}$$

Пример 12. Если в предыдущем примере в качестве ПКМР использовалась $CVaR_\alpha$, то соответствующая функция риска $\rho_{CVaR_\alpha, P_U}(X)$ описывалась в виде (28), где множество Q_ρ представлялось как (29), (31), (32), (34).

Сформулируем проблему оптимизации портфеля по соотношению вознаграждение–риск, которое задано функциями $r(.)$ и $\rho(.)$ из (26), (27), (30), (32) и (28), (29), (31), (32) соответственно.

Введем некоторые обозначения для изложения задач оптимизации портфеля по соотношению доходность–риск. Пусть распределение доходности компонент портфеля z_j, $j = 1, \ldots, k$, описывается матрицей H размерности $n \times k$, где j-й столбец представляет распределение j-й компоненты. Вектор $u = (u_1, \ldots, u_k)$, описывающий структуру портфеля, рассматривается как переменная, где $\sum_1^k u_i = 1$, $u_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$. Необходимо найти такую структуру портфеля u, которая оптимизирует его совокупный результат по соотношению доходность–риск.

Начнем изложение с более простого случая известных посценарных распределений доходностей компонент портфеля, которые описываются матрицей H (строки — сценарии, столбцы — компоненты) и вектором сценарных вероятностей $p_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0)$. В качестве вознаграждения рассмотрим среднюю доходность, в качестве меры риска — некоторую ПКМР.

2.1. Оптимальные портфели: случай известных распределений. Сформулируем две взаимосвязанные задачи.

Минимизация ПКМР портфеля при гарантированной средней доходности. Обозначим μ_0, допустимое значение средней доходности портфеля $E_{P_0}[Hu]$, а $\rho(Hu)$ — выбранную ПКМР, заданную в виде (1)–(4). Минимизируем вторую величину при ограничениях на первую

$$\min_{\substack{\sum_1^k u_i = 1,\ u \ge 0 \\ E_{p_0}[Hu] \ge \mu_0}} \rho(Hu). \tag{35}$$

Максимизация средней доходности портфеля при ограничениях на ПКМР. Обозначим ρ_0 допустимое значение ПКМР портфеля $\rho(Hu)$. Максимизируем доходность $E_{P_0}[Hu]$ при ограничениях на меру риска $\rho(Hu)$, заданную в виде (1)–(4):

$$\max_{\substack{\sum_1^k u_i = 1,\ u \ge 0 \\ \rho(Hu) \le \rho_0}} E_{p_0}[Hu]. \tag{36}$$

Теорема 1 [13]. Если задачи (35), (1)–(4) и (36), (1)–(4) совместны, то их оптимальными портфелями являются соответственно компоненты u решений (v, u) следующих проблем ЛП:

$$\begin{array}{ll} \min_{(v,u)} \quad < c, v >, & \max_{(v,u)} \quad < H^{\mathrm{T}} p_0, u >, \\ -B^{\mathrm{T}} v - Hu \le 0 & -B^{\mathrm{T}} v - Hu \le 0 \\ -p_0^{\mathrm{T}} Hu \le -\mu_0 & < c, v > \le \rho_0 \\ \sum_1^k u_i = 1 & \sum_1^k u_i = 1 \\ v \ge 0,\ u \ge 0 & v \ge 0,\ u \ge 0 \end{array} \tag{37}$$

а значения в решениях по функциям этих задач соответственно совпадают.

Замечание 10. Для случая, когда ПКМР представляет собой $CVaR_\alpha$, т.е. ее содержательная часть имеет вид (5), утверждение теоремы 1 для задачи (35) совпадает с соответствующим результатом из [6]. Формальное отличие состоит в том, что в [6] оптимизировался параметр $\xi \in R$, который представлен в (37) в виде $\xi = v_1 - v_2$, где $v_1, v_2 \in R^+$.

Можно также сформулировать проблему вида (36), в которой заданы ограничения для нескольких ПКМР. Так, пусть имеются m ПКМР

$$\rho_i(X) = \max\{E_P[-X] : P \in Q_i\},\ Q_i = \{p : B_i p \le c_i,\ p \ge 0\},\ i = 1, \ldots, m. \tag{38}$$

Рассмотрим следующую постановку задачи:

$$\max_{\substack{\sum_1^k u_i = 1,\ u \ge 0 \\ \rho_i(Hu) \le \rho_i^0,\ i = 1, \ldots, m}} E_{p_0}[Hu]. \tag{39}$$

Теорема 2 [13]. Если задача (39) совместна, то ее оптимальным портфелем является компонента u решения $(v_1, \ldots, v_m, u)$ следующей проблемы ЛП:

$$\begin{array}{l} \max_{(v_1, \ldots, v_m, u)} \quad < H^{\mathrm{T}} p_0, u >, \\ -B_1^{\mathrm{T}} v_1 - Hu \le 0 \\ < c_1, v_1 > \le \rho_1^0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -B_m^{\mathrm{T}} v_m - Hu \le 0 \\ < c_m, v_m > \le \rho_m^0 \\ \sum_1^k u_i = 1,\ u \ge 0 \\ v_1 \ge 0, \ldots, v_m \ge 0 \end{array} \tag{40}$$

а значения в решениях по функциям этих задач совпадают.

2.2. Оптимальные робастные портфели: случай неточных сценарных вероятностей. Если для сценарных вероятностей доступны лишь некоторые оценки, то нетрудно предложить для такого случая аналоги представленных выше задач. Это можно сделать, используя описанный ранее математический аппарат.

Так, в соответствии с примером 11 робастным аналогом средней доходности является функция вознаграждения $r(.)$ из (26), (27), (30), (32), (33), а робастной мерой риска — функция риска $\rho_{\rho,P_U}(.)$ из (22), которая строится по исходной ПКМР (28), (29), (31), (32) и множеству P_U из (23). Сформулируем теперь соответствующие задачи оптимизации портфеля.

Робастная версия минимизации ПКМР портфеля при гарантированной средней доходности r_0 имеет вид

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\substack{\sum_1^k u_i = 1,\, u \ge 0 \\ r(Hu) \ge r_0}} & \rho_{\rho,P_U}(Hu). \end{array} \tag{41}$$

Робастная версия максимизация средней доходности портфеля при ограничениях на ПКМР уровнем ρ_0 представляется как

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\substack{\sum_1^k u_i = 1,\, u \ge 0 \\ \rho_{\rho,P_U}(Hu) \le \rho_0}} & r(Hu). \end{array} \tag{42}$$

Нетрудно также сформулировать и робастную версию проблемы (39), где риск учитывается в виде ограничений для нескольких ПКМР

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\substack{\sum_1^k u_i = 1,\, u \ge 0 \\ \rho_{\rho,P_U}(Hu) \le \rho_i^0,\, i=1,\ldots,m}} & r(Hu). \end{array} \tag{43}$$

Покажем, как поиск оптимальных решений этих задач можно свести к решению соответствующих проблем ЛП.

Теорема 3. Если решения задач (41) и (42) с описанными функциями вознаграждения $r(.)$ в виде (26), (27), (30), (32), (33) и риска $\rho_{\rho,P_U}(.)$ в виде (22), (28), (29), (31), (32), (23) совместны, то их оптимальными портфелями являются соответственно компоненты решений (v, u, w) следующих проблем ЛП:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{(v,u,w)} & < c_\rho, v >, \\ -B_r^{\mathrm{T}} w - Hu \le 0 & \\ < c_r, w > \le -r_0 & \\ -B_\rho^{\mathrm{T}} v - Hu \le 0 & \\ \sum_1^k u_i = 1,\, u \ge 0 & \\ v \ge 0,\, w \ge 0 & \end{array} \tag{44}$$

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{(v,u,w)} & < -c_r, w >, \\ -B_r^{\mathrm{T}} w - Hu \le 0 & \\ -B_\rho^{\mathrm{T}} v - Hu \le 0 & \\ < c_\rho, v > \le \rho_0 & \\ \sum_1^k u_i = 1,\, u \ge 0 & \\ v \ge 0,\, w \ge 0 & \end{array} \tag{45}$$

а значения в решениях по функциям этих задач соответственно совпадают.

Доказательство. Рассмотрим задачи (41) и (42) с описанными в формулировке теоремы функциями вознаграждения $r(.)$ и риска $\rho_{\rho, P_U}(.)$. Они имеют соответственно следующий вид:

$$\min_{\substack{\sum_1^k u_i = 1,\ u \ge 0 \\ \min\limits_{B_r p_1 \le c_r,\, p_1 \ge 0} < Hu,\, p_1 > \ge r_0}} \ \max_{B_\rho p_2 \le c_\rho,\ p_2 \ge 0} < -Hu,\, p_2 >, \tag{46}$$

$$\max_{\substack{\sum_1^k u_i = 1,\ u \ge 0 \\ \max\limits_{B_\rho p_2 \le c_\rho,\, p_2 \ge 0} < -Hu,\, p_2 > \le \rho_0}} \ \min_{B_r p_1 \le c_r,\ p_1 \ge 0} < Hu,\, p_1 >. \tag{47}$$

Поскольку задачи совместны, также совместны и внутренние подзадачи

$$\max_{B_\rho p_2 \le c_\rho,\ p_2 \ge 0} < -Hu,\, p_2 >, \tag{48}$$

$$\min_{B_r p_1 \le c_r,\ p_1 \ge 0} < Hu,\, p_1 >. \tag{49}$$

К тому же в силу специфических ограничений данные задачи имеют конечные решения. Следовательно, они эквивалентны своим двойственным проблемам (см., например, [27]). Двойственные задачи для (48) и (49) имеют соответственно вид

$$\min_{-B_\rho^{\mathrm{T}} v - Hu \le 0,\ v \ge 0} < c_\rho,\, v >, \tag{50}$$

$$\max_{-B_r^{\mathrm{T}} w - Hu \le 0,\ w \ge 0} < -c_r,\, w >. \tag{51}$$

Сделав замену задач (48), (49) на (50), (51) соответственно в проблемах (46) и (47), имеем

$$\min_{\substack{\sum_1^k u_i = 1,\ u \ge 0 \\ \max\limits_{-B_r^{\mathrm{T}} w - Hu \le 0,\, w \ge 0} < -c_r,\, w > \ge r_0}} \ \min_{-B_\rho^{\mathrm{T}} v - Hu \le 0,\ v \ge 0} < c_\rho,\, v >, \tag{52}$$

$$\max_{\substack{\sum_1^k u_i = 1,\ u \ge 0 \\ \min\limits_{-B_\rho^{\mathrm{T}} v - Hu \le 0,\, v \ge 0} < c_\rho,\, v > \le \rho_0}} \ \max_{-B_r^{\mathrm{T}} w - Hu \le 0,\ w \ge 0} < -c_r,\, w >. \tag{53}$$

Нетрудно видеть также эквивалентность следующих условий:

$$\max_{-B_r^{\mathrm{T}} w - Hu \le 0,\ w \ge 0} < -c_r,\, w > \ge r_0 \iff \begin{matrix} \exists\, w : < -c_r,\, w > \ge r_0 \\ -B_r^{\mathrm{T}} w - Hu \le 0,\ w \ge 0 \end{matrix}, \tag{54}$$

$$\min_{-B_\rho^{\mathrm{T}} v - Hu \le 0,\ v \ge 0} < c_\rho,\, v > \le \rho_0 \iff \begin{matrix} \exists\, v : < c_\rho,\, v > \le \rho_0 \\ -B_\rho^{\mathrm{T}} v - Hu \le 0,\ v \ge 0 \end{matrix}. \tag{55}$$

Сделав замену левых условий соотношений (54), (55) на эквивалентные им правые условия в задачах (52), (53) соответственно, получим

$$\min_{\substack{\sum_1^k u_i = 1,\, u \geq 0 \\ < -c_r, w > \geq r_0 \\ -B_r^{\mathrm{T}} w - Hu \leq 0,\, w \geq 0}} \quad \min_{-B_\rho^{\mathrm{T}} v - Hu \leq 0,\, v \geq 0} \quad < c_\rho, v >, \tag{56}$$

$$\max_{\substack{\sum_1^k u_i = 1,\, u \geq 0 \\ < c_\rho, v > \leq \rho_0 \\ -B_\rho^{\mathrm{T}} v - Hu \leq 0,\, v \geq 0}} \quad \max_{-B_r^{\mathrm{T}} w - Hu \leq 0,\, w \geq 0} \quad < -c_r, w >. \tag{57}$$

Нетрудно видеть, что задачи (56) и (57) есть не что иное, как задачи (44) и (45) соответственно.

Теорема доказана.

Для формулировки преобразования задачи (43) к виду проблемы ЛП уточним обозначения. Пусть $Q_{r=}\{p : B_r\, p \leq c_r,\, p \geq 0\}$, $Q_{\rho_i} = \{p : B_{\rho_i}\, p \leq c_{\rho_i},\, p \geq 0\}$, $i = 1, \ldots, m$, обозначают многогранные множества, по которым определяются функции вознаграждения $r(.)$ и риска $\rho_i(.)$, $i = 1, \ldots, m$, в виде (26) и (28) соответственно. Сформулируем аналог теоремы 2.

Теорема 4. Если задача (43) совместна, то ее оптимальным портфелем является компонента u решения $(v_1, \ldots, v_m, u, w)$ следующей проблемы ЛП:

$$\begin{gathered}
\max_{(v_1, \ldots, v_m, u, w)} \quad < -c_r, w >, \\
-B_r^{\mathrm{T}} w - Hu \leq 0 \\
-B_{\rho_1}^{\mathrm{T}} v_1 - Hu \leq 0 \\
< c_{\rho_1}, v_1 > \leq \rho_1^0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-B_{\rho_m}^{\mathrm{T}} v_m - Hu \leq 0 \\
< c_{\rho_m}, v_m > \leq \rho_m^0 \\
\sum_1^k u_i = 1,\, u \geq 0 \\
v_1 \geq 0, \ldots, v_m \geq 0,\, w \geq 0
\end{gathered}$$

а значения в решениях по функциям этих задач совпадают.

Доказательство нетрудно провести с помощью рассуждений, аналогичных используемым при доказательстве теоремы 3. Единственное отличие состоит в том, что их надо применять не к одному, а к m ограничениям на меры риска $\rho_i(.)$, $i = 1, \ldots, m$.

Следствие 3. Если в задачах (41), (42) в качестве исходных ПКМР использовалась $CVaR_\alpha$, то функция риска $\rho_{CVaR_\alpha, P_U}(.)$ представляется в виде соотношений (28), (29), (31)–(33), в которых описывается конкретный вид матриц B_ρ и c_ρ из формулировок теорем 3 и 4.

Замечание 11. Теоремы 1 и 2 нетрудно получить как следствия из теорем 3 и 4 соответственно.

Замечание 12. Проблемы ЛП из теорем 3 и 4 для робастных постановок задач при неточных вероятностях отличаются от их аналогов в условиях известных распределений из теорем 1 и 2 наличием дополнительных размерностей. Во-первых, добавляется переменная w размерности $2n$ (n — количество сценариев), во-вторых, может возникнуть дополнительная размерность при построении $\rho_{\rho, P_U}(.)$ в виде описанной ранее конструкции (см. пример 1, соотношения (1)–(4), (24)). Это, собственно, является ценой за робастность постановок задач.

Замечание 13. Нетрудно сформулировать в виде следствий соответствующие результаты в тех случаях, когда в задачах (41), (42) в качестве исходных ПКМР используются спектральная мера риска (6) и представление Кусуоки (19).

3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ПО ОТНОШЕНИЮ ВОЗНАГРАЖДЕНИЕ–РИСК

В теории портфеля введено значительное число так называемых мер эффективности, которые являются критериями при выборе портфеля. Один из первых классических таких критериев — отношение Шарпа, введенное в [28] как $\lambda(X) = E(X)/\sigma(X)$, т.е. как отношение средней доходности к стандартному отклонению.

Это не что иное, как описанное соответствующими функциями отношение вознаграждения к риску, т.е. величина вознаграждения на единицу риска. Используя эту терминологию (см. также [29]), рассмотрим проблемы оптимизации портфеля с учетом предложенных ранее конструкций функций вознаграждения и риска.

В качестве такой меры эффективности рассмотрим введенное в [30] отношение $RR(X) = E(X)/\rho(X)$, где риск описывается некоторой ПКМР $\rho(.)$. Отметим, что частный случай «Stable tail-adjusted return ratio» такой меры, а именно $RR(X) = E(X)/CVaR_\alpha(X)$, изучался в [29, 31].

3.1. Случай известных распределений. В этом случае функция вознаграждения описывалась средней доходностью $E_p[.]$, а функция риска — некоторой ПКМР $\rho(.)$. Поэтому соответствующая задача оптимизации портфеля по отношению вознаграждение–риск имеет вид

$$\max_{\sum_1^k u_i = 1,\ u \ge 0} \frac{E_{p_0}[Hu]}{\rho(Hu)}, \tag{58}$$

где ПКМР $\rho(.)$ задана как (1), (2).

Примем достаточно рациональные предположения о том, что обе части дроби положительны. Перепишем задачу (58) в более привычном для оптимизации виде

$$\min_{\sum_1^k u_i = 1,\ u \ge 0} \frac{\rho(Hu)}{E_{p_0}[Hu]}. \tag{59}$$

Теорема 5. Если задача (59) совместна, то ее решение по функции совпадает с решением следующей проблемы ЛП:

$$\begin{aligned} &\min_{(\tilde u, \tilde v, t)} \quad < c, \tilde v >, \\ &\textstyle\sum_1^k \tilde u_i = t \\ &-B^{\mathrm T} \tilde v - H\tilde u \le 0 \\ &p_0^{\mathrm T} H\tilde u = 1 \\ &\tilde v \ge 0, \tilde u \ge 0, t \ge 0 \end{aligned} \tag{60}$$

а структура оптимального портфеля в (59) есть $u = \tilde u / t$ в решении (60).

Утверждение теоремы несложно доказать с помощью стандартного приема введения новых переменных

$$t = \frac{1}{< p_0, Hu >},\ \tilde u = ut,$$

и перехода к двойственной проблеме в задаче вычисления меры $\rho(.)$ в виде (1), (2).

Следствие 4. Если в качестве ПКМР $\rho(.)$ используется $CVaR_\alpha(.)$, то матрица B и вектор c описываются в виде (3)–(5).

Покажем далее, как искать робастные оптимальные портфели в условиях неточных вероятностей.

3.2. Случай неточных сценарных вероятностей. Как отмечено ранее, в этом случае робастные представления средней доходности и меры риска описываются конструкциями функций вознаграждения $r(.)$ и риска $\rho_{\rho,P_U}(.)$ в виде (26), (27), (30), (32), (33) и (22), (28), (29), (31), (33) соответственно.

Итак, пусть $r(.)$ описывается в виде (26), (27), а мера риска $\rho(.)$ — в виде (28), (29). Соответствующая робастная задача оптимизации портфеля по отношению вознаграждение–риск имеет вид

$$\max_{\sum_1^k u_i = 1,\, u \ge 0} \frac{r(Hu)}{\rho(Hu)}. \tag{61}$$

Как и ранее, полагаем, что обе части дроби положительные. Перепишем задачу (61) в более привычном виде

$$\min_{\sum_1^k u_i = 1,\, u \ge 0} \frac{\rho(Hu)}{r(Hu)}. \tag{62}$$

Теорема 6. Если задача (62) совместна, то ее решение по функции совпадает с решением следующей проблемы ЛП:

$$\begin{gathered} \min_{(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},t)} \quad < c_\rho, \tilde{w} >, \\ \sum_1^k \tilde{u}_i = t \\ -B_r^{\mathrm{T}} \tilde{v} - H\tilde{u} \le 0 \\ -B_\rho^{\mathrm{T}} \tilde{w} - H\tilde{u} \le 0 \\ < -c_r, \tilde{v} > = 1 \\ \tilde{v} \ge 0, \tilde{u} \ge 0, t \ge 0 \end{gathered} \tag{63}$$

а структура оптимального портфеля в (62) есть $u = \tilde{u} / t$ в решении (63).

Доказательство. Распишем задачу (62) с учетом конструкций функций вознаграждения $r(.)$ и риска $\rho(.)$:

$$\min_{\sum_1^k u_i = 1,\, u \ge 0} \frac{\max\limits_{B_\rho p_2 \le c_\rho,\, p_2 \ge 0} < -Hu, p_2 >}{\min\limits_{B_r p_1 \le c_r,\, p_1 \ge 0} < Hu, p_1 >}. \tag{64}$$

Введем обозначение

$$\min_{B_r p_1 \le c_r,\, p_1 \ge 0} < Hu, p_1 > = \frac{1}{t}. \tag{65}$$

Поскольку задача в левой части (65) совместна, ее можно заменить двойственной проблемой, т.е.

$$\max_{-B_r^{\mathrm{T}} v - Hu \le 0,\, v \ge 0} < -c_r, v > = \frac{1}{t}.$$

Это, в свою очередь, подразумевает равенство

$$\begin{gathered} < -c_r, v > = \frac{1}{t}, \\ -B_r^{\mathrm{T}} v - Hu \le 0,\ v \ge 0 \end{gathered}$$

которое при введении переменных $\tilde{u} = ut$ и $\tilde{v} = vt$ эквивалентно

$$\begin{gathered} < -c_r, \tilde{v} > = 1 . \\ -B_r^{\mathrm{T}} \tilde{v} - H\tilde{u} \le 0,\ \tilde{v} \ge 0 \end{gathered} \tag{66}$$

Используя аналогичные рассуждения, заменим внутреннюю проблему из числителя задачи (64) ее двойственной

$$\max_{B_\rho p_2 \le c_\rho,\ p_2 \ge 0} \langle -Hu, p_2 \rangle \Leftrightarrow \min_{-B_\rho^{\mathrm{T}} w - Hu \le 0,\ w \ge 0} \langle c_\rho, w \rangle.$$

В переменных $\tilde{u} = ut$ и $\tilde{w} = wt$ такая задача имеет вид

$$\min_{-B_\rho^{\mathrm{T}} \tilde{w} - H\tilde{u} \le 0,\ \tilde{w} \ge 0} \langle c_\rho, \tilde{w} \rangle.$$

Таким образом, в переменных $\tilde{u} = ut$, $\tilde{v} = vt$ и $\tilde{w} = wt$ с учетом (65), (66) задача (64) сводится к следующей задаче:

$$\min_{\substack{\sum_1^k \tilde{u}_i = t \\ \tilde{u} \ge 0,\ t \ge 0}} \ \min_{\substack{-B_\rho^{\mathrm{T}} \tilde{w} - H\tilde{u} \le 0,\ \tilde{w} \ge 0 \\ -B_r^{\mathrm{T}} \tilde{v} - H\tilde{u} \le 0,\ \tilde{v} \ge 0 \\ \langle -c_r, \tilde{v} \rangle = 1}} \langle c_\rho, \tilde{w} \rangle.$$

Это есть не что иное, как задача (63).

Теорема доказана.

Следствие 5. Если в качестве исходной ПКМР $\rho(.)$ используется $CVaR_\alpha(.)$, то матрица B_ρ и вектор c_ρ описываются в виде (3), (4), (25), а матрица B_r и вектор c_r — в виде (3), (4), (24).

Замечание 14. Нетрудно сформулировать соответствующие следствия для тех случаев, когда в качестве исходной ПКМР вместо $CVaR(.)$ используется спектральная мера риска (6) или представление Кусуоки (19).

Замечание 15. Сравнивая задачу (63) с (60), несложно видеть ее относительно большую размерность, а также более низкое отношение вознаграждения к риску. Это обусловлено робастностью конструкций соответствующих функций.

Замечание 16. В теоремах об оптимизации портфеля в качестве условия выполнения предполагается совместность исходной задачи, связанная с корректными формулировками соответствующих ограничений в постановках. Это мотивировано тем, что в процессе доказательств осуществляется переход к двойственным задачам, поскольку в случае некорректных исходных постановок такой переход не приводит к эквивалентным задачам. Индикатором некорректности постановок может являться неограниченность в решении или несовместность задач ЛП, на которые предлагается заменить исходные задачи.

Замечание 17. Зачастую в различных портфельных постановках появляются некоторые технические ограничения, накладываемые на потенциальные возможности выбора портфельных компонент u_i. Они формулируются в виде линейных неравенств, поэтому их добавление в постановки проблем осуществляется естественно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описан некоторый систематический подход к поиску оптимальных портфельных решений по соотношению вознаграждение–риск в условиях риска и частичной неопределенности. Изложение ограничено случаем конечных дискретно распределенных с.в., которые являются естественной дискретизацией с.в. в разнообразных приложениях.

Для финансовых приложений оптимальные (эффективные) решения формулируются с помощью функций вознаграждения и риска. Проблемы поиска оптимальных портфелей по соотношению функций вознаграждения и риска, а также по отношению этих функций сведены к проблемам ЛП как для случая известных распределений с.в., так и при неточных сценарных вероятностях.

В качестве адекватного математического аппарата, применяемого для сведения задач поиска оптимальных портфельных решений для рассмотренного класса задач к соответствующим проблемам ЛП, использован аппарат ПКМР. Приведены примеры его применения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zackova J. On minimax solutions of stochastic linear programming problems // Cas. Pest. Mat. — 1966. — **91**. — P. 423–430.
2. Голодников А.Н., Стойкова Л.С. Численный метод оценки некоторых функционалов, характеризующих надежность // Кибернетика. — 1978. — № 2. — С. 73–77.
3. Ermoliev Yu., Gaivoronski A., Nedeva C. Stochastic optimization problems with incomplete information on distribution functions // SIAM J. Control and Optimiz. — 1985. — **23**(5). — P. 697–708.
4. Dupacova J. The minimax approach to stochastic programming and an illustrative application // Stochastic. — 1987. — **20**. — P. 73–88.
5. Coherent measures of risk / P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath // Math. Finance. — 1999. — **9**. — P. 203–228.
6. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk // J. Risk. — 2000. — **2**. — P. 21–41.
7. Rockafellar R.T., Uryasev S. Conditional value-at-risk for general loss distribution // J. Banking & Finance. — 2002. — **26**. — P. 1443–1471.
8. Acerbi C., Tasche D. On the coherence of expected shortfall // J. Banking & Finance. — 2002. — **26**(7). — P. 1487–1503.
9. Tasche D. Expected shortfall and beyond // J. Banking & Finance. — 2002. — **26**(7). — P. 1519–1533.
10. Cherny A.S. Weighted V@R and its properties // Finance and Stochastics. — 2006. — **10**. — P. 367–393.
11. Follmer H., Schied A. Stochastic finance: An introduction in discrete time. — Berlin: Walter de Gruyter, 2004. — 459 p.
12. Кирилюк В.С. О когерентных мерах риска и задачах оптимизации портфеля // Теорія оптимальних рішень. — К: Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2003. — Вип. 2. — С. 111–119.
13. Кирилюк В.С. О классе полиэдральных когерентных мер риска // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 4. — С. 155–167.
14. Eichhorn A., Romish W., Wegner I. Polyhedral risk measures in electricity portfolio optimization // PAMM Proc. Appl. Math. Mech. — 2004. — **4**. — P. 7–10.
15. Eichhorn A., Romish W. Polyhedral risk measures in stochastic programming // SIAM J. on Optimiz. — 2005. — **16**(1). — P. 69–95.
16. Eichhorn A., Romish W. Stability of multistage stochastic programs incorporating polyhedral risk measures // Optimiz. — 2008. — **57**. — P. 295–318.
17. Guigues V., Romish W. Sampling-based decomposition methods for multistage stochastic programs based on extended polyhedral risk measures // SIAM J. on Optimiz. — 2012. — **22**(2). — P. 286–312.
18. Acerbi C. Spectral measuers of risk: a coherent representation of subjective risk aversion // J. Banking & Finance. — 2002. — **26**(7). — P. 1505–1518.
19. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. — М.: Наука, 1973. — 472 с.
20. Kusuoka S. On law invariant coherent risk measures / Kusuoka S., Maruyama T. (eds.). Advances in Mathematical Economics. — Tokyo: Springer, 2001. — **3**. — P. 83–95.
21. Bertsimas D., Brown D.B. Constructing uncertainty sets for robust linear optimization // Operations Research. — 2009. — **57**(6). — P. 1483–1495.
22. Kirilyuk V. Polyhedral coherent risk measures, portfolio optimization and investment allocation problems: (Interim Rep.) / IIASA. — N IR-07-030. — Laxenburg, 2007. — 21 p.
23. Kirilyuk V., Norkin V. Polyhedral coherent risk measures and their application to investment decision support under catastrophic flood risks // Intelligent Data Proc. in Global Monitoring for Environment and Security. — Sofia; Kiev: ITHEA, 2011. — P. 277–299.
24. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимизация инвестиционного портфеля // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 2. — С. 120–133.
25. Markowitz H.M. Portfolio selection // J. Finance. — 1952. — **7**(1). — P. 77–91.
26. Markowitz H.M. Portfolio selection: Efficient diversification of investments. — New York: Wiley, 1959. — 344 p.
27. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). — М.: Наука, 1969. — 424 с.
28. Sharpe W.F. Mutual funds performance // J. Business January. — 1966. — **39**(S1) . — P. 119–138.
29. Rachev S.T., Stoyanov S.V., Fabozzi F.J. Advanced stochastic models, risk assessment, and portfolio optimization. The ideal risk, uncertainty, and performance measures. — New York: Wiley, 2008. — 382 p.
30. Кирилюк В.С. Оптимальні рішення в умовах ризику на основі апарата багатозначних відображень. Дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 24.06.2006/ІК НАНУ. — Київ, 2006. — 307 с.
31. Stable etl optimal portfolios and extreme risk management, in Risk Assessment. Decisions in Banking and Finance / S.T. Rachev, D. Martin, B. Racheva-Iotova, and S.T. Stoyanov — Heidelberg: Physica-Verlag, 2009. — P. 235–262.

Поступила 21.05.2013