УДК 519.8

Т.Т. ЛЕБЕДЕВА, Н.В. СЕМЕНОВА, Т.И. СЕРГИЕНКО

СВОЙСТВА ВОЗМУЩЕННЫХ КОНУСОВ, УПОРЯДОЧИВАЮЩИХ МНОЖЕСТВО ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ[1]

Аннотация. Исследовано влияние возмущений в исходных данных на решения векторной задачи оптимизации со многими линейными критериями. Проведен анализ свойств возмущенных конусов, частично упорядочивающих множество допустимых решений задачи векторной оптимизации относительно линейных целевых функций. Изучена структура всей совокупности специальным образом возмущенных упорядочивающих конусов, соответствующих различным значениям параметра возмущений исходных данных задачи.

Ключевые слова: задачи векторной оптимизации, возмущения исходных данных, возмущенные упорядочивающие конусы.

В настоящей статье исследуется влияние неопределенности в исходных данных на решения задач векторной оптимизации со многими линейными критериями. Существуют разные источники неопределенности: изменение данных во времени, неточные исходные данные, субъективные данные, неполные данные, ошибки измерения. В задачах оптимизации, особенно тех, в которых присутствуют переменные, принимающие дискретные значения, малые возмущения в исходных данных могут привести к решениям, сильно отличающимся от истинных. Результаты решения таких задач даже при незначительных изменениях в исходных данных часто непредсказуемы. В связи с этим актуальной является разработка инструментария для прогнозирования влияния возмущений в исходных данных на получаемые результаты. Проведенные исследования направлены на расширение возможностей использования выпуклых конусов, которые упорядочивают множества допустимых решений задач векторной оптимизации относительно частных критериев, для анализа влияния возмущений в исходных данных на решения таких задач.

Рассмотрим задачу векторной оптимизации

$$Z(M(C, X)) : \max \{Cx \mid x \in X\}, \qquad (1)$$

которая состоит в поиске элементов некоторого множества оптимальных решений $M(C, X) \in \mathfrak{M}(C, X)$, где $\mathfrak{M} = \{Sl(C, X), P(C, X), Sm(C, X)\}$, $P(C, X)$ — множество парето-оптимальных (эффективных) решений задачи, $Sl(C, X)$ — множество оптимальных по Слейтеру (слабо эффективных) решений, $Sm(C, X)$ — множество оптимальных по Смейлу (строго эффективных) решений [1, 2], $M(C, X) = \{x \in X \mid \omega(x, M(C, X)) = \varnothing\}$, $\omega(x, P(C, X)) = \{z \in X \mid Cz \geq Cx, Cz \neq Cx\}$, $\omega(x, Sl(C, X)) = \{z \in X \mid Cz > Cx\}$, $\omega(x, Sm(C, X)) = \{z \in X \mid z \neq x, Cz \geq Cx\}$, $C = [c_{ij}] \in R^{\ell \times n}$ — матрица, в которой строки $c_i = (c_{i1}, \ldots, c_{in})$ представляют собой наборы коэффициентов линейных целевых функций $\langle c_i, x \rangle$, $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, составляющих векторный критерий задачи (1), $X \subset R^n$ — допустимое множество произвольной структуры.

Основное различие между скалярной и векторной оптимизацией состоит в упорядочении множества допустимых решений задачи. В оптимизации с одной

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект Ф54.1/039).

целевой функцией возможно полное упорядочение допустимой области задачи относительно целевой функции. В векторной оптимизации с двумя или более целевыми функциями допустимое множество может быть лишь частично упорядочено. Частичный порядок допустимой области относительно целей оптимизации можно описать с использованием понятия конуса. Согласно [3] подмножество K из R^n является конусом, если $\lambda x \in K$ для всех $x \in K$ и $\lambda \in R^1$, $\lambda > 0$. С математической точки зрения вектор $x \in R^n$ лучше, чем вектор $y \in R^n$, тогда и только тогда, когда $x - y \in K$, где K — так называемый упорядочивающий конус. Упорядочим допустимую область задачи (1) с помощью многогранного конуса

$$K = \{x \in R^n \mid Cx \geq 0\},$$

который может быть представлен как объединение множеств

$$K = K_0 \bigcup K_1 \bigcup K_2,$$

где $K_0 = \{x \in R^n \mid Cx = 0\}$, $K_1 = \{x \in R^n \mid Cx > 0\}$, $K_2 = K \setminus (K_0 \bigcup K_1)$. Тогда $\forall x \in X$ $x \in P(C, X) \Leftrightarrow (x + K_1 \bigcup K_2) \bigcap X = \varnothing$, $x \in Sl(C, X) \Leftrightarrow (x + K_1) \bigcap X = \varnothing$, $x \in Sm(C, X) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x + K) \bigcap X \setminus \{x\} = \varnothing$.

Очевидно, что для любых двух точек: $x \in X$ и $x' = x + s$, где $s \in K$, выполняется неравенство $Cx' \geq Cx$. Поэтому любой элемент $s \in K$ назовем перспективным направлением в пространстве решений задачи (1). Если $s \in K_0$, то $Cx' = Cx$, и в этом случае s назовем направлением равновесия.

Согласно [4] определим конус K^*, двойственный к упорядочивающему многогранному конусу K, с помощью формулы

$$K^* = \left\{ x \in R^n \mid x = \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k c_k,\ \lambda_k \geq 0,\ k = 1, \ldots, \ell \right\},$$

которая эквивалентна более привычной формуле

$$K^* = \{ y \in R^n \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \ \ \forall x \in K \}. \tag{2}$$

Рассмотрим семейство специальным образом возмущенных задач $\{Z(M(C^\tau, X)) \mid \tau \in R^1\}$, где $M(C^\tau, X) \in \mathfrak{M}(C^\tau, X)$, которые базируются на задаче (1) и в которых каждая строка c_i^τ, $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, возмущенной матрицы C^τ имеет вид

$$c_i^\tau = c_i - \tau u, \tag{3}$$

где $\tau \in R^1$ — параметр возмущений, $u \in ri\, K^*$ — вектор возмущений, $u \neq 0$,

$$u = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i c_i,\ \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i = 1,\ \mu_i > 0,\ i = 1, \ldots, \ell. \tag{4}$$

Возмущенной задаче $Z(M(C^\tau, X))$, где $M(C^\tau, X) \in \mathfrak{M}(C^\tau, X)$, $\tau \in R^1$, поставим в соответствие возмущенный упорядочивающий конус $K^\tau = \{x \in R^n \mid C^\tau x \geq 0\}$, который может быть представлен как объединение множеств

$$K^\tau = K_0^\tau \bigcup K_1^\tau \bigcup K_2^\tau,$$

где $K_0^\tau = \{x \in R^n \mid C^\tau x = 0\}$, $K_1^\tau = \{x \in R^n \mid C^\tau x > 0\}$, $K_2^\tau = K^\tau \setminus (K_0^\tau \bigcup K_1^\tau)$. Очевидно, что $K^0 = K$, $K_0^0 = K_0$, $K_1^0 = K_1$, $K_2^0 = K_2$.

В данной работе продолжены описанные в [5–10] исследования свойств упорядочивающих конусов, возмущенных специальным образом в соответствии с формулами (3), (4). Опираясь на некоторые из этих свойств, разработан подход [6, 8] к регуляризации возможно неустойчивой к возмущениям исходных данных задачи вида (1) с целочисленными переменными. При использовании этого подхода определенным образом изменяется частичный порядок в пространстве решений задачи за счет введения специальных возмущений в исходные данные. В результате оптимальные по Слейтеру решения соответственно измененной задачи с немного расширенным (по сравнению с исходным) упорядочивающим конусом оказываются парето-оптимальными решениями исходной задачи даже при наличии достаточно малых ошибок в исходных данных.

Сформулируем ряд теорем, характеризующих закономерности изменения свойств возмущенных упорядочивающих конусов и их подмножеств при изменении значений параметра возмущений $\tau \in R^1$. Полученные результаты могут использоваться при разработке теории корректности оптимизационных многокритериальных задач вида (1), в том числе задач полностью и частично целочисленной оптимизации.

Прежде всего отметим, что значение параметра возмущений $\tau = 1$ можно рассматривать как некий порог, при котором вектор возмущений $u \in K^*$, определенный по формуле (4), существенно изменяет свойства возмущенных упорядочивающих конусов K^τ, меняя в связи с этим также особенности соответствующих возмущенных задач $Z(M(C^\tau, X))$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 [10]. Если $\tau < 1$, то $K^\tau \subset \{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle \geq 0\}$. Если $\tau > 1$, то $K^\tau \subset \{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle \leq 0\}$.

Данная теорема является следствием важного свойства, которым обладает вектор возмущений $u \in ri\, K^*$, удовлетворяющий формулам (4): при любом значении параметра возмущений $\tau \in R^1$ вектор $(1-\tau)u$, лежащий на одной прямой с вектором возмущений u, всегда находится в относительной внутренности конуса, двойственного к возмущенному конусу $K^\tau = \{x \in R^n \mid \langle c_i^\tau, x \rangle \geq 0,\ i = 1, \ldots, \ell\}$, где векторы c_i^τ, $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, определяются согласно формуле (3). Таким образом,

$$\forall \tau \in R^1 : (1-\tau)u = \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k c_k^\tau \in (K^\tau)^*. \tag{5}$$

Знак числа $(1-\tau)$, меняющийся на противоположный при переходе через пороговое значение $\tau = 1$, определяет направление вектора $(1-\tau)u$, которое либо совпадает с направлением вектора u (при $\tau < 1$), либо противоположно ему (при $\tau > 1$). Выбрав любую точку $x \in K^\tau$, где $\tau \in R^1$, и воспользовавшись формулой (2) для двойственного конуса, приходим к неравенству $(1-\tau)\langle u, x \rangle \geq 0$. Анализ этого неравенства при разных значениях τ приводит к теореме 1.

При доказательстве описанных ниже результатов исследований свойств множеств $\{K^\tau \mid \tau \in R^1\}$, $\{K_0^\tau \mid \tau \in R^1\}$, $\{K_1^\tau \mid \tau \in R^1\}$, $\{K_2^\tau \mid \tau \in R^1\}$ мы опирались на лемму о том, что множество K_0 всех направлений равновесия исходной задачи $Z(M(C, X))$ принадлежит гиперплоскости $\{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle = 0\}$, разделяющей (в соответствии с теоремой 1) две совокупности возмущенных конусов: $\{K^\tau \mid \tau < 1\}$ и $\{K^\tau \mid \tau > 1\}$.

Лемма. $K \cap \{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle = 0\} = K_0$.

Доказательство. Очевидно, что для любого направления $y \in K \cap \{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle = 0\}$ справедливы соотношения $\langle c_k, y \rangle \geq 0$, $k = 1, \ldots, \ell$, и $\langle u, y \rangle =$

$= \left\langle \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k c_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k \langle c_k, y \rangle = 0$, откуда с учетом неравенств $\mu_k > 0$ $(k = 1, \ldots \ell)$ приходим к выводу, что $Cy = 0$ и, следовательно, $y \in K_0$. Выбрав произвольно точку $z \in K_0$, приходим к равенствам $\langle u, z \rangle = \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k \langle c_k, z \rangle = 0$.

Лемма доказана.

Учитывая, что $u \in K^*$ и, следовательно, в соответствии с формулой (2) имеет место неравенство $\langle u, x \rangle \geq 0$ для всех $x \in K$, становится очевидным такое следствие данной леммы.

Следствие. $K \bigcap \{x \in R^n | \langle u, x \rangle > 0\} = K_1 \bigcup K_2$.

Теорема 2 [8]. $\forall \tau \in R^1 : K_0 \subset K_0^\tau$.

Доказательство. С учетом леммы для любой точки $x \in K_0$ при произвольном значении $\tau \in R^1$ справедливы соотношения $\langle c_i^\tau, x \rangle = \langle c_i, x \rangle - \tau \langle u, x \rangle = 0$ $(i = 1, \ldots, \ell)$, откуда следует, что $x \in K_0^\tau$.

Теорема 3. $\forall \tau \in R^1 : K^\tau \bigcap \{x \in R^n | \langle u, x \rangle = 0\} = K_0$.

Доказательство. Выберем произвольную точку $y \in K^\tau \bigcap$ $\bigcap \{x \in R^n | \langle u, x \rangle = 0\}$, где $\tau \in R^1$. Очевидно, для точки y при любом $k \in \{1, \ldots, \ell\}$ справедливы соотношения $0 \leq \langle c_k^\tau, y \rangle = \langle c_k - \tau u, y \rangle = \langle c_k, y \rangle$, откуда следует принадлежность $y \in K$. С учетом леммы уточняем, что $y \in K_0$. Принимая во внимание теорему 2 и лемму, приходим также к включениям $K_0 \subset K_0^\tau \bigcap$ $\bigcap \{x \in R^n | \langle u, x \rangle = 0\} \subset K^\tau \bigcap \{x \in R^n | \langle u, x \rangle = 0\}$, справедливым для любого значения $\tau \in R^1$.

Доказательство завершено.

Для случая, когда значение параметра возмущений τ отличается от единицы, результат, приведенный в теореме 2, был уточнен.

Теорема 4 [9]. $\forall \tau \in R^1 \setminus \{1\} : K_0 = K_0^\tau$.

Действительно, с учетом соотношений (5) выполняется следующая цепочка выводов для любой точки $x \in K_0^\tau$ при $\tau \neq 1$:

$$\langle c_i^\tau, x \rangle = 0 \;\; (i = 1, \ldots, \ell) \Rightarrow (1 - \tau) \langle u, x \rangle = \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k \langle c_k^\tau, x \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, x \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\forall i = 1, \ldots, \ell : \langle c_i, x \rangle = \langle c_i, x \rangle - \langle c_i^\tau, x \rangle = \langle c_i, x \rangle - \langle c_i - \tau u, x \rangle = \tau \langle u, x \rangle = 0 \Rightarrow x \in K_0.$$

Очевидным является такое следствие теорем 3 и 4.

Следствие. $\forall \tau \in R^1 \setminus \{1\} : K^\tau \bigcap \{x \in R^n | \langle u, x \rangle = 0\} = K_0^\tau$.

Таким образом, множество направлений равновесия исходной задачи не изменяется при возмущении ее исходных данных, если значения параметра возмущений отличны от единицы. Данный вывод с учетом теоремы 1 приводит нас к следующему ниже утверждению, которое обобщает следствие 1 теоремы 1 и указывает на то, что за исключением направлений равновесия все остальные перспективные направления задачи $Z(M(C^\tau, X))$ при $\tau \neq 1$ лежат в одном из открытых полупространств: $\{x \in R^n | \langle u, x \rangle > 0\}$ при $\tau < 1$ и $\{x \in R^n | \langle u, x \rangle < 0\}$ при $\tau > 1$.

Теорема 5. $\forall \tau < 1 : K_1^\tau \cup K_2^\tau = K^\tau \bigcap \{x \in R^n | \langle u, x \rangle > 0\}$; $\forall \tau > 1 : K_1^\tau \bigcup K_2^\tau =$ $= K^\tau \bigcap \{x \in R^n | \langle u, x \rangle < 0\}$.

Опираясь на теорему 5, докажем следующие утверждения, характеризующие монотонность, присущую изменениям отдельных подмножеств возмущенных упорядочивающих конусов задачи (1) при изменениях значений параметра возмущений τ в случае, когда $\tau \neq 1$.

Теорема 6. $\forall \tau', \tau''$ $(1 < \tau' < \tau'') : K_1^{\tau'} \cup K_2^{\tau'} \subset K_1^{\tau''}$.

Доказательство. Выберем значения τ' и τ'' параметра возмущений τ, которые связаны строгими неравенствами $1 < \tau' < \tau''$. Очевидно, для любого направления $x \in K_1^{\tau'} \cup K_2^{\tau'}$ выполняются условия $\langle c_k^{\tau'}, x \rangle \geq 0$, $k = 1, \ldots, \ell$, а в соответствии с теоремой 5 и неравенство $\langle u, x \rangle < 0$. Учитывая эти неравенства и используя соотношения

$$\langle c_k^{\tau''}, x \rangle = \langle c_k - \tau'' u, x \rangle = \langle c_k, x \rangle - \tau'' \langle u, x \rangle + \tau' \langle u, x \rangle - \tau' \langle u, x \rangle =$$

$$= \langle c_k, x \rangle - \tau' \langle u, x \rangle + (\tau' - \tau'') \langle u, x \rangle = \langle c_k^{\tau'}, x \rangle + (\tau' - \tau'') \langle u, x \rangle, \ k = 1, \ldots, \ell,$$

для оценки величины $\langle c_k^{\tau''}, x \rangle$, приходим к выводу о справедливости строгого неравенства $\langle c_k^{\tau''}, x \rangle > 0$ для любого $k = 1, \ldots, \ell$, что и означает принадлежность $x \in K_1^{\tau''}$.

Аналогичным образом можно доказать следующую теорему.

Теорема 7. $\forall \tau', \tau''$ $(\tau' < \tau'' < 1)$: $K_1^{\tau''} \cup K_2^{\tau''} \subset K_1^{\tau'}$.

Очевидным следствием теорем 4, 6 и 7 является следующая обобщающая теорема, описывающая свойство монотонности, которым обладают рассматриваемые здесь специальным образом возмущенные упорядочивающие конусы при $\tau \neq 1$ и которое состоит в постепенном расширении этих конусов в двух случаях: 1) при возрастании значений параметра τ от 1 до $+\infty$; 2) при уменьшении значений параметра τ от 1 до $-\infty$.

Теорема 8. $\forall \tau', \tau''$ $(1 < \tau' < \tau'')$: $K^{\tau'} \subset K_0^{\tau''} \cup K_1^{\tau''}$; $\forall \tau', \tau''$ $(\tau' < \tau'' < 1)$: $K^{\tau''} \subset K_0^{\tau'} \cup K_1^{\tau'}$.

Следствие [10]. $\forall \tau', \tau''$ $(1 < \tau' < \tau'') : K^{\tau'} \subset K^{\tau''}$; $\forall \tau', \tau''$ $(\tau' < \tau'' < 1)$: $K^{\tau''} \subset K^{\tau'}$.

Рассмотрим возмущенный упорядочивающий конус K^{τ} задачи (1) в случае, когда значение параметра возмущений $\tau = 1$.

Прежде всего отметим, что имеет место следующая теорема.

Теорема 9 [9]. $K_0^1 = K^1$.

Для доказательства этой теоремы достаточно убедиться в том, что $K^1 \subset K_0^1$. Для этого произвольно выберем точку x из K^1. С учетом соотношений (5) для нее справедливы равенства $\left\langle \sum_{k=1}^{\ell} \mu_k c_k^1, x \right\rangle = (1 - \tau) \langle u, x \rangle = 0$, откуда, принимая во внимание, что $\forall k \in \{1, \ldots, \ell\} : \langle c_k^1, x \rangle \geq 0$, $\mu_k > 0$, заключаем, что $\forall k \in \{1, \ldots, \ell\} : \langle c_k^1, x \rangle = 0$ и, следовательно, $x \in K_0^1$.

В дальнейшем понадобится такое очевидное следствие теоремы 9.

Следствие. $\forall z \in K^1 : (-z) \in K^1$.

Напомним, что согласно теореме 2 $K_0 \subset K_0^1$. Однако равенство $K_0 = K_0^{\tau}$, о котором идет речь в теореме 4 для случая $\tau \neq 1$, не обязательно выполняется при $\tau = 1$, так как возможно, что $K_0^1 \setminus K_0 \neq \varnothing$. Учитывая теорему 3, последнее неравенство означает, что не все точки множества $K^1 = K_0^1$ (см. теорему 9) принадлежат гиперплоскости $\{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle = 0\} : K^1 \setminus K_0 \subset \{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle > 0\} \cup \{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle < 0\}$.

В дополнение к теоремам 4, 6–8, характеризующим свойство монотонности, присущее возмущенным упорядочивающим конусам задачи (1) при значениях параметра возмущений $\tau \neq 1$, предлагаем еще две теоремы, в которых в рассмотрение вводится также значение параметра возмущений $\tau = 1$, дополняя тем самым описание взаимосвязей между элементами множества $\{K^{\tau} \mid \tau \in R^1\}$.

Теорема 10. $\forall \tau \ (-\infty < \tau < 1): K^1 \bigcap \{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle > 0\} \subset K_1^{\tau}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $y \in K^1 \bigcap \{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle > 0\}$. Для нее с учетом теоремы 9 имеют место соотношения $\forall k = 1, \ldots, \ell$: $0 = \langle c_k^1, y \rangle = \langle c_k - u, y \rangle$ и, следовательно, $\langle c_k, y \rangle = \langle u, y \rangle > 0$. Выберем значение параметра возмущений τ в интервале $(-\infty, 1)$ и для любого $k \in \{1, \ldots, \ell\}$ оценим величину $\langle c_k^{\tau}, y \rangle : \langle c_k^{\tau}, y \rangle = \langle c_k - \tau u, y \rangle = \langle c_k, y \rangle - \tau \langle u, y \rangle = \langle u, y \rangle - \tau \langle u, y \rangle =$ $= (1 - \tau) \langle u, y \rangle > 0$. Таким образом, $\forall \tau \in (-\infty, 1): y \in K_1^{\tau}$.

Аналогично можно доказать и следующую теорему.

Теорема 11. $\forall \tau \ (1 < \tau < +\infty): K^1 \bigcap \{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle < 0\} \subset K_1^{\tau}$.

Анализируя приведенные выше результаты, описывающие структуру всей совокупности возмущенных упорядочивающих конусов задачи (1) при всевозможных значениях параметра возмущений $\tau \in R^1$, приходим также к следующим выводам, дополняющим это описание.

Из теорем 1 и 3 вытекает утверждение.

Утверждение 1. $\forall \tau', \tau'' \ (\tau' < 1 < \tau''): K^{\tau'} \bigcap K^{\tau''} = K_0$.

Сформулируем достаточные условия совпадения множества направлений равновесия исходной задачи с аналогичным множеством возмущенной задачи при $\tau = 1$.

Утверждение 2. Если $\exists \tau \neq 1: K^{\tau} = K_0$, то $K^1 = K_0$.

Доказательство. Предположим от противного, что при выполнении условия $\exists \tau \neq 1: K^{\tau} = K_0$ имеет место неравенство $K^1 \neq K_0$. С учетом включения $K_0 \subset K^1$, вытекающего из теоремы 2, последнее неравенство означает, что $K^1 \setminus K_0 \neq \varnothing$. С учетом теоремы 3 приходим к выводу, что $K^1 \setminus K_0 \subset$ $\subset \{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle > 0\} \bigcup \{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle < 0\}$. Выберем точку $y \in K^1 \setminus K_0$, удовлетворяющую следующему условию: если $\tau < 1$, то $y \in \{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle > 0\}$, если же $\tau > 1$, то $y \in \{x \in R^n \mid \langle u, x \rangle < 0\}$. С учетом следствия 4 такой выбор всегда возможен. Однако в соответствии с теоремами 10 и 11 точка y принадлежит множеству K_1^{τ}, что противоречит условию утверждения 2. Действительно, с учетом теоремы 4 согласно этому условию имеем $K^{\tau} = K_0^{\tau}$, отсюда следует, что $K_1^{\tau} = \varnothing$.

Сформулируем достаточные условия совпадения множества направлений равновесия исходной задачи с возмущенными упорядочивающими конусами.

Утверждение 3. Если $\exists \tau' < 1: K^{\tau'} = K_0$, то $\forall \tau \in [\tau', 1]: K^{\tau} = K_0$.

Доказательство. Пусть $\exists \tau' < 1: K^{\tau'} = K_0$. Выберем значение параметра возмущений τ, удовлетворяющее неравенствам $\tau' < \tau < 1$. В этом случае, привлекая следствие 3, становятся очевидными включения $K^{\tau} \subset K^{\tau'} = K_0$. Иначе с учетом теоремы 4 заключаем, что $K_0 = K_0^{\tau} \subset K^{\tau}$. Следовательно, $\forall \tau \in [\tau', 1): K_0 = K^{\tau}$. Кроме того, согласно утверждению 2 $K^1 = K_0$.

Доказательство завершено.

Аналогично можно доказать такое утверждение.

Утверждение 4. Если $\exists \tau' > 1: K^{\tau'} = K_0$, то $\forall \tau \in [1, \tau']: K^{\tau} = K_0$.

Утверждение 5. $\bigcap\limits_{-\infty<\tau\le 1} K^{\tau} = K^1 \cap \{x \in R^n \mid \langle u, x\rangle \ge 0\}$.

Доказательство. С одной стороны, в соответствии с теоремой 1 имеем $\bigcap\limits_{-\infty<\tau<1} K^{\tau} \subset \{x \in R^n \mid \langle u, x\rangle \ge 0\}$, откуда следует, что $\bigcap\limits_{-\infty<\tau\le 1} K^{\tau} \subset K^1 \cap \{x \in R^n \mid \langle u, x\rangle \ge 0\}$. С другой стороны, учитывая теоремы 3 и 10, имеют место включения $K^1 \cap \{x \in R^n \mid \langle u, x\rangle \ge 0\} \subset K_0 \cup K_1^{\tau} \subset K^{\tau}$ для всех значений параметра τ из интервала $(-\infty, 1)$. Следовательно, $K^1 \cap \{x \in R^n \mid \langle u, x\rangle \ge 0\} \subset \bigcap\limits_{-\infty<\tau\le 1} K^{\tau}$, что и завершает доказательство.

Аналогичным образом, учитывая теоремы 3 и 11, можно доказать такое утверждение.

Утверждение 6. $\bigcap\limits_{1\le\tau<+\infty} K^{\tau} = K^1 \cap \{x \in R^n \mid \langle u, x\rangle \le 0\}$.

Анализируя утверждения 5 и 6 и принимая во внимание теорему 3, приходим к такому выводу.

Утверждение 7 [10]. $\bigcap\limits_{\tau\in R^1} K^{\tau} = K_0$.

Исследовано влияние возмущений в исходных данных на решение векторной задачи оптимизации с линейными критериями. Проведен анализ свойств возмущенных конусов, частично упорядочивающих множество допустимых решений задачи относительно векторного критерия. Изучена структура всей совокупности специальным образом возмущенных упорядочивающих конусов, соответствующих различным значениям параметра возмущений исходных данных задачи. Изложенные результаты проведенных исследований позволяют существенно расширить представление о свойствах и структуре множества специальным образом возмущенных конусов, упорядочивающих множества допустимых решений векторных оптимизационных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
2. Smale S. Global analysis and economics, V. Pareto theory with constraints // J. Math. Econ. — 1974. — N 1. — P. 213–221.
3. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ . — М.: Мир, 1973. — 470 с.
4. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. — М.: Наука, 1975. — 320 с.
5. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Задача частично целочисленной векторной оптимизации: вопросы устойчивости // Кибернетика. — 1991. — № 1. — С. 58–61.
6. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. О регуляризации задач целочисленной векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — № 3. — С. 172–176.
7. Козерацкая Л.Н. Задачи векторной оптимизации: устойчивость, в пространстве решений и в пространстве альтернатив // Там же. — 1994. — № 6. — С. 122–133.
8. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — Киев: Наук. думка, 1995. — 170 с.
9. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Кононова А.А. Устойчивость и неограниченность задач векторной оптимизации // Кибернетика и системный. анализ. — 1997. — № 1. — С. 3–10.
10. Kozeratska L., Forbes J.F., Goebel R.J., Kresta J.V. Perturbed cones for analysis of uncertain multi-criteria optimization problems // Linear Algebra and its Appl. — 2004. — **378**. — P. 203–229.

Поступила 24.02.2014