УДК 519.8

Ф.А. ШАРИФОВ, Л.Ф. ГУЛЯНИЦКИЙ

МОДЕЛИ И СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И РЕКОНСТРУКЦИИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ И ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ

Аннотация. Рассмотрены проблемы синтеза сетей, возникающие при проектировании и эксплуатации телекоммуникационных и транспортных сетей. Предложена формализация задач синтеза сетей на графах, в которых заданы ограничения на пропускные способности разрезов и учитываются возможности выхода из строя некоторых компонентов сети. Описаны подходы к решению и анализу трудоемкости рассмотренных задач.

Ключевые слова: проектирование и надежность сети, минимальный разрез, субмодулярная функция, разрезная функция, оптимальная топология.

ВВЕДЕНИЕ

В большинстве задач синтеза сетей основное требование состоит в том, что проектируемые сети, кроме магистральных путей, должны содержать дополнительные резервные пути, соединяющие произвольную пару терминальных узлов, которые используются для нормального функционирования сетей в аварийном режиме. При этом подразумевается, что в случае отказа некоторых компонентов магистральных путей по дополнительным будет передаваться произвольное количество информации. Такая ситуация имеет место, как правило, в телекоммуникационных сетях связи, где пропускные способности волокно-оптических линий позволяют передавать практически неограниченное количество информации. В математической модели задачи синтеза сетей условия существования дополнительных путей между терминальными узлами формулируются различными способами [1–12]. В общей постановке проблемы синтеза сетей приводят к труднорешаемым оптимизационным задачам с применением приближенных алгоритмов [13]. В то же время актуальна формализация и исследование таких классов задач синтеза сетей, учет специфики которых позволяет разрабатывать эффективные алгоритмы решения.

1. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И РЕКОНСТРУКЦИИ СЕТЕЙ

В работах [3, 7] приведены общие способы формализации, с помощью которых неполадки различных компонентов сетей учитываются как результат возможных глобальных аварий в них. Несмотря на то, что во многих задачах синтеза надежных телекоммуникационных сетей требуется минимизировать суммарные затраты на их проектирование, определенная в результате их решения топология оптимальных сетей избыточна в том смысле, что некоторые дополнительные пути не используются в течение длительного периода. Обычно избыточность путей является следствием того, что при определении объемов передаваемых информационных потоков, а также при прогнозировании возникновения возможных аварий, используются данные со стохастической природой. В проектируемых сетях можно сократить число дополнительных путей, заранее задав минимальное возможное значение соответствующих входных параметров в модели задачи. После определения оптимальной топологии сети надежность ее функционирования можно улучшить, найдя оптимальные значения пропускных способностей ее ребер, которые вычисляются в решения другой оптимизационной задачи.

В отличие от информационных потоков в масштабах рассматриваемого региона прогнозируемые объемы увеличения продуктовых потоков можно определять более точно, особенно если речь идет о нефти и газовых продуктах. Так как в транспортных сетях пропускные способности ребер ограничены сверху, для нормального их функционирования в аварийном режиме требуется определить число дополнительных путей и значение пропускной способности всех ребер (линий) таким образом, чтобы по ним можно было пропустить необходимое количество потоков. Подобные условия функционирования транспортных сетей эквивалентны тому, что мощности или пропускные способности всех разрезов на сети ограничены снизу. Для формулировки этих ограничений предпожим, что на подмножествах вершин сети определена некоторая функция f и на произвольном подмножестве ее значения являются оценкой снизу для мощности разрезов, определенных соответствующими подмножествами.

На произвольной сети $G=(V,E)$ множество ребер с одним концом в S и другим в $\bar{S}=V\setminus S$ называется разрезом, определенным подмножеством S; обозначим его $\delta(S)$. Множества ребер, у которых оба или хотя бы один конец принадлежит $S\subseteq V$, обозначим $\kappa(S)$ и $\gamma(S)$ соответственно. Всюду ниже для произвольных подмножеств $F\subseteq V$ или $F\subseteq E$ и векторов $z\in R^V$ или $z\in R^E$ будем обозначать $z(F)=\sum(z_j : j\in F)$. Известно, что на произвольной сети мощность разрезов как функция от подмножеств множества вершин является субмодулярной и поэтому в дальнейшем предполагаем, что функция f тоже субмодулярная. На неориентированной сети подмножества S и $\bar{S}$ определяют один и тот же разрез, так что $f(S)=f(\bar{S})$. Функция f, определенная на подмножествах S множества V, называется разрезной, если $f(S)=p(\gamma(S))-p(\kappa(S))$, где p — некоторый вектор из R^E. Из определения $\delta(S)$, $\kappa(S)$ и $\gamma(S)$ следует, что $f(S)=p(\delta(S))$ и $f(V)=0$, поэтому f — симметричная функция. Фиксированные пропускные способности $\bar{x}_e$ ребер $e\in E$ будем считать нормальными, если

$$\Delta(f,\bar{x})\equiv\min\{\bar{x}(\delta(S))-f(S): S\subseteq V\}=0.$$

Для различных видов телекоммуникационных и транспортных сетей нормальные пропускные способности их ребер характеризуют рациональность требований надежности их функционирования. Действительно, из $\Delta(f,\bar{x})>0$ следует, что для произвольного разреза $\delta(S)$ текущая мощность $\bar{x}(\delta(S))$ больше его прогнозируемой мощности $f(S)$, и поэтому некоторые пути в сети не используются. Если $\Delta(f,\bar{x})<0$, имеем $\bar{x}(\delta(S))<f(S)$ для некоторых $S\subseteq V$, а это означает, что пропускные способности соответствующих разрезов $\delta(S)$ недостаточны для нормального функционирования сети. В этом случае необходимо увеличить пропускные способности ребер этих разрезов. Таким образом, можно считать, что требование надежности рационально, если $\Delta(f,\bar{x})=0$ для фиксированных пропускных способностей $\bar{x}_e$ ребер e сети G.

Для разрезной функции $f(S)$, если $p_e<\bar{x}_e$, нахождение $\Delta(f,\bar{x})$ эквивалентно известной *NP*-трудной задаче нахождения разреза максимальной мощности на сети G с весами $\bar{x}_e-p_e\ge 0$ ребер $e\in E$. Для этой функции, если имеет место $p_e\ge\bar{x}_e$, то определение $\Delta(f,\bar{x})$ сводится к задаче нахождения минимального разреза на сети G с весами $p_e-\bar{x}_e\ge 0$ ребер e из E. Тогда $\Delta(f,\bar{x}_e)$ можно определять с помощью алгоритма [14] нахождения минимального разреза, имеющего трудоемкость $O(|V||E|)$.

Отметим, что если $f(S)$ — супермодулярная функция, то $\bar{x}(\delta(S))-f(S)$ — субмодулярная. Поэтому в этом случае $\Delta(f,\bar{x})$ можно определить с помощью одного из полиномиальных алгоритмов [15–17], предназначенных для минимизации субмодулярной функции.

При проектировании и реконструкции телекоммуникационных и транспортных сетей возникает задача их синтеза с заданными мощностями разрезов, которую обозначим (ЗС)МР (здесь (ЗС) означает цикл З $\to$ С, С $\to$ З). Для ее формулировки предполагается, что заранее вычислены средние значения l_e потоков на всех ребрах $e\in E$. Отметим, что значение l_e вычисляется по фиксированным значениям потоков на ребре $e\in E$ (см. разд. 2). Кроме этих данных, предполагается, что для каждого $S \subseteq V$ также известно прогнозируемое суммарное количество потоков на ребрах с одним концом в $S \subseteq V$, а другим — в $V \setminus S$, как значение функции $f(S)$ на подмножестве S. Обычно прогнозируемая мощность $f(S)$ произвольного разреза $\delta(S)$ не меньше текущей его мощности $l(\delta(S))$, т.е. значения l_e на ребрах $e \in E$ такие, что $f(S) \geq l(\delta(S))$ для всех $S \subseteq V$.

2. ЗАДАЧА СИНТЕЗА СЕТЕЙ С ЗАДАННЫМИ МОЩНОСТЯМИ РАЗРЕЗОВ

При формулировке (ЗС)МР исходную топологию сети, состоящую из заданных узлов и всевозможных коммуникаций между ними, будем представлять как неориентированный граф $G = (V, E)$ с множествами вершин V и ребер (коммуникаций) E. Пусть для каждого ребра $e \in E$ известны его длина c_e и среднее значение l_e потока, проходящего по нему. При этом предполагается, что затраты на создание произвольного ребра $e = (u, v)$ между вершинами u и v выражаются как линейная функция $c_e x_e$ от его неизвестной пропускной способности x_e. Кроме этого, считается также заданной симметричная субмодулярная функция $f(S)$, определенная на подмножествах $S \subseteq V$. Предполагая, что $x_e \geq l_e$ для всех $e \in E$, а мощность $x(\delta(S))$ разреза $\delta(S)$, определенного подмножеством $S \subseteq V$, не меньше, чем $f(S)$ для $S \subseteq V$, в (ЗС)МР требуется так определить неизвестные значения x_e, чтобы минимизировать суммарные затраты на создание ребер с пропускными способностями x_e. Модель задачи имеет следующий вид: найти

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e \tag{1}$$

при ограничениях

$$x(\delta(S)) \geq f(S), \; S \subset V, \tag{2}$$

$$x_e \geq l_e \geq 0, \; e \in E. \tag{3}$$

Эта задача возникает также при реконструкции сети существующих дорог, когда надо расширить каждую дорогу, соответствующую ребру e из E, так, чтобы ее пропускная способность была не меньше среднего количества l_e потоков, приходящихся на эту дорогу, а сумма пропускных способностей дорог, соединяющих пункты S и $\bar{S}$, была не меньше величины прогнозируемого трафика между пунктами из этих подмножеств. При этих условиях требуется минимизировать суммарные затраты на перестройку дорог.

В некоторых случаях после определения оптимальной топологии транспортной сети, например в результате решения задач, рассмотренных в [1–12], для обеспечения ее нормального функционирования в аварийном режиме требуется найти оптимальные пропускные способности x_e ребер e, т.е. такое оптимальное решение $x = (x_e : e \in E)$, для которого $\Delta(f, x) = 0$. Далее покажем, что требуемые оптимальные пропускные способности x_e ребер сети можно определить, решив задачу (1)–(3).

Для наглядности рассмотрим задачу синтеза сетей с заданной реберной связностью (suvaviable networks), исследованную многими авторами [5, 6, 10, 12]. В этих работах представлены разнообразные модели задачи, которые являются частными случаями приведенной в [9].

Пусть заданы неориентированный граф $G = (V, E)$, множество терминальных вершин (узлов) $N \subseteq V$, неотрицательные веса d_e для всех ребер $e \in E$ и некоторые положительные целые числа r_v для каждой вершины $v \in N$. Задача проектирования сети с заданной реберной связностью состоит в нахождении подграфа G_* графа G с минимальным весом при условии, что число непересекающихся по ребрам путей между произвольными парами узлов $v, w \in N$ в G_* должно быть не меньше k_{vw}. Вес подграфа G_* определяется как сумма весов его ребер. В этой задаче синтеза сетей рациональность надежности сети зависит от значения параметра k_{vw}. Обычно предполагают, что либо $k_{vw} = \max\{r_v, r_w\}$, либо $k_{vw} = \min\{r_v, r_w\}$ [9].

Из постановки задачи видно, что в результате ее решения определяется только оптимальная топология $G_* = (V_*, E_*)$ сети, а не значения пропускных способностей ее ребер. В случае $k_{vw} = \max\{r_v, r_w\}$, если числа r_v и r_w сильно отличаются один от другого, проектируемая сеть содержит большое количество дополнительных путей. На практике нормальное функционирование таких сетей в аварийном режиме обеспечивается при $x_e = l_e$ для всех $e \in E_*$. Далее показано, что вычисление значения l_e сводится к оцениванию элементов матрицы маршрутов трафиков (ММТ) (origin-destination, OD-matrix) [18] между пунктами назначений и отправлений. В случае $k_{vw} = \min\{r_v, r_w\}$ число дополнительных путей сокращается. Поэтому для обеспечения нормального функционирования сети $G_* = (V_*, E_*)$ в аварийном режиме необходимо определить оптимальные значения пропускных способностей ее ребер $e \in E_*$, решив задачу (1)–(3) следующим образом.

Вначале, если имеет место $V_* = V$ и $E_* \subset E$, надо переопределить только значение l_e для ребер $e \in E_*$. Потом путем решения задачи (1)–(3) с функцией $f(S)$, определенной на подмножествах $S \subseteq V$ множества V, определяются оптимальные пропускные способности x_e^* ребер e такие, что $\Delta(f, x^*) = 0$, где $x^* = (x_e^* : e \in E_*)$. Вероятность возникновения случая $V_* = V$ мала. Обычно имеет место $V_* \subset V$ и $E_* \subset E$. Так как при определении оптимальной топологии сети G_* значения пропускных способностей ребер не определяются, для уменьшения числа неиспользованных дорог между терминальными узлами в G_* следует заменить функцию f на f', после чего пропускные способности ребер можно найти, решив (ЗС)МР на сети $G_* = (V_*, E_*)$, где $f'(S) = \min\{f(A) : S \subseteq A, A \setminus S \subseteq \subseteq V \setminus V_*\}$ для всех $S \subseteq V_*$. Кроме этого переопределения, также следует вычислить значения параметра l_e для всех ребер $e \in E_*$. Значение l_v для ребра $v \in E_*$ определяется как сумма элементов строки e ММТ (см. разд. 3). Функцию $f'(S)$ будем называть сужением функции $f(S)$ на множество V_*. Относительно функции $f'(S)$ доказывается, что действительно $\Delta(f', x^*) = 0$ для оптимального решения $x^* = (x_e^* : e \in E_*)$ задачи (1)–(3) на сети G_*.

Утверждение 1. Функция f' является субмодулярной на подмножествах S множества V_*.

Доказательство. Из определения функции f' следует, что $f'(S) = f'(\bar{S})$ для всех $S \subseteq V_*$. Пусть $A_S, A_T \in V$ такие, что $f'(S) = f(A_S)$, $f'(T) = f(A_T)$. Так как $f(S)$ субмодулярная функция, то $f'(S) + f'(T) = f(A_S) + f(A_T) \geq f(A_S \cup A_T) + f(A_S \cap A_T) \geq f'(S \cup T) + f'(S \cap T)$, т.е. $f'(S)$ тоже субмодулярная функция, определенная на подмножествах S множества V_*.

Следовательно, на сети G_* специфика задачи (1)–(3) не меняется. Из теории задач линейного программирования ясно, что существует подмножество $S \subseteq V$, для которого $x^*(\delta(S)) = f'(S)$ в оптимальном решении (1)–(3). Отсюда следует, что $\Delta(f', x^*) = 0$, чем и завершается доказательство.

В [7] отмечается важность задачи определения оптимальных пропускных способностей ребер проектируемой сети, и для этого предлагается после определения топологии сети решить отдельную оптимизационную задачу. Таким образом, решения задач синтеза сетей состоит из двух этапов: на первом определяется оптимальная топология проектируемой сети, а на втором — оптимальные значения пропускных способностей ее ребер. Подобные задачи называются двухэтапными задачами синтеза сетей. Если учитывать, что на практике задачи синтеза сетей даже в простой постановке принадлежат классу *NP*-трудных задач, то применение двухэтапного подхода намного упрощает процесс нахождения их решения. Наряду с этим приемлемость такого подхода можно объяснить тем, что ввиду экономического обоснования создания сети с заданными требованиями ее проектирование целесообразно начинать с определения оптимальной топологии, а потом уже можно определять оптимальные значения пропускных способностей ребер.

3. ОЦЕНИВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ММТ

Многие авиа- и железнодорожные компании применяют иерархический процесс планирования. Начиная с определения структуры (определение пропускных способностей ребер), далее осуществляют необходимые улучшения инфраструктуры сетей. Модели определения пропускных способностей ребер сети включают данные о пассажиропотоках или о количестве трафиков. Для удобства и экономного представления этих данных используются ММТ. Задача нахождения (оценивание) точных значений элементов ММТ является важной проблемой при планировании транспортных систем на практике. Для оценивания элементов ММТ предложены несколько методов [18]. Изложим способы вычисления значения параметра l_e для всех ребер $e \in E_*$, а также отметим некоторые особенности применения методов [18–20] для оценивания элементов ММТ.

Столбцы ММТ соответствуют маршрутам, соединяющим пункты отправления и назначения, строки — дорогам этих маршрутов [18]. В оптимальной сети $G_* = (V_*, E_*)$ множество терминальных узлов рассматривается как пункты отправления или назначения, а ребра из E_* представляют дороги, из которых состоят маршруты между этими пунктами. После определения оптимальной топологии сети $G_* = (V_*, E_*)$ для вычисления значения l_e можно применить один из алгоритмов [18–20], с помощью которого оцениваются элементы ММТ, представляющие объем трафика (пассажиропотоков) между терминальными узлами в единицу времени. Для этого вначале путем q наблюдений определяется количество трафика t_e^q на каждом ребре e. Далее вектор $t^q = (t_e^q : e \in E)$ используется для статического оценивания элементов матрицы ММТ. Например, в [19] для этого применяется гриди алгоритм, определяющий кратчайшие пути в сети G_*, по которым предлагается пропустить максимальное количество потоков от одного терминального узла к другому таким образом, чтобы суммарное количество потоков на ребре e не превышало t_e^q.

Для оценивания элементов ММТ в [20] формулируется соответствующая задача линейного программирования при условии, что если поток отправляется не по кратчайшему пути, то взимается некоторый штраф. Кроме описанных подходов, для оценивания элементов матрицы ММТ применяются методы минимизации некоторой нелинейной функции следующим образом. На сети G_* фиксируются маршруты, соединяющие некоторые пары терминальных узлов, которые можно представить характеристическим вектором размерности $|E_*|$. Пусть столбцы матрицы Q являются характеристическими векторами заданных маршрутов на сети $G_* = (V_*, E_*)$, а строки соответствуют ребрам из E_*. Ясно, что имеем $Q\chi = t^q$, где χ — вектор, компонентами которого являются неизвестные величины трафика на дорогах каждого маршрута. Так как число столбцов матрицы Q намного больше, чем число ее строк, то система $Q\chi = t^q$ имеет много решений. Поэтому в зависимости от характера искомых потоков рассматриваются различные целевые функции, например квадратичная функция от $(Q\chi - t^q)$ [18], и путем их минимизации определяется соответствующее решение χ, т.е. вектор этой системы. В случае линейности целевой функции вектор χ можно определить полиномиальным алгоритмом [21]. Таким образом, по g наблюдениям оценивается приближенное значение потока на каждом ребре $e \in E_*$ (элементы матрицы ММТ), идущего от одного терминального узла к другому. Для нахождения значения l_e требуется суммировать элементы строки e матрицы ММТ.

4. ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ СЕТИ

В задачах синтеза надежных сетей предполагается, что элементы системы могут время от времени выходить из строя, нарушая тем самым нормальное функционирование всей системы или ее части. Основным требованием к создаваемой системе коммуникации является ее нормальное функционирование в аварийном режиме. Как было отмечено во введении, для гарантии нормального функционирования в аварийном режиме создаются дополнительные пути между терминальными узлами проектируемых сетей. В моделях задачи имеются условия существования дополнительных путей в оптимальных сетях, которые формулируются различными способами. В результате возникают различные задачи синтеза надежных сетей. Постановки этих задач можно найти в [9]. Многие задачи синтеза надежных сетей, которые решаются на начальном этапе, являются частными случаями общей задачи синтеза сетей [3], поэтому рассмотрим ее детальнее.

Пусть заданы множества вершин V и ребер E неориентированного графа $G=(V,E)$, а также множество узлов (терминальных вершин) N и неотрицательные веса c_e для всех ребер e из E. Отказ некоторых компонентов сети можно рассматривать как удаление ребер произвольного подграфа, который изоморфный некоторому заранее заданному графу $H=(V(H),E(H))$. Напомним, что два графа называются изоморфными, если они идентичны с точностью до перенумерации их вершин. Удаление произвольного подмножества ребер A из G означает получение подграфа $(V,E\setminus A)$. Последовательность $s=v_0,(v_0,v_1),v_1,\ldots,(v_{l-1},v_l),\ \ v_l=r$, вершин и ребер такая, что каждая вершина и каждое ребро в ней появляется один раз, называется путем, соединяющим вершины s и r. Путь называется простым циклом или циклом, если s и r является одной и той же вершиной. Вес произвольного подграфа графа G определяется как сумма весов его ребер. Выделим следующие два случая для задания множеств вершин и ребер неориентированного графа H:

• заданы множества $V(H)$ и $E(H)$ или в явном виде они не заданы, но указано количество ребер и вершин графа H с выделенной структурой;

• множества $V(H)$ и $E(H)$ в явном виде не заданы, а также не указано количество ребер и вершин графа H, но известно, что граф H может быть произвольным графом с выделенной структурой.

Общая задача синтеза сетей (ОЗЗС) состоит в нахождении подграфа $G_*=(V_*,E_*)$ $(E_*\subseteq E)$ с минимальным весом при условии, что подграф $(V_*,E_*\setminus E(\Gamma))$, определенный множеством ребер $E_*\setminus E(\Gamma)$, содержит хотя бы один путь между произвольными парами узлов из N, где Γ — произвольный подграф графа G, который изоморфен заданному графу H.

В двухэтапных задачах синтеза надежных сетей также задается неотрицательная симметричная субмодулярная функция $f(S)$, определенная на подмножествах $S\subseteq V$. После того как на первом этапе в результате решения ОЗЗС найдена оптимальная сеть $G_*=(V_*,E_*)$, определяется значение параметра $l_e\geq 0$ для каждого $e\in E_*$, а данная функция $f(S)$ заменяется функцией $f'(S)$, и на втором этапе с помощью решения задачи синтеза сетей с заданными мощностями определяются оптимальные пропускные способности ребер $e\in E_*$.

Из способов задания графа следует, что надо рассматривать такие графы H, для которых $|V(H)|\leq|V|$ и $E(H)|\leq|E|$.

В случаях, если H — тривиальный граф $(E(H)=\varnothing)$ или в графе G не существует ни одного подграфа, изоморфного H, то ОЗЗС эквивалентна задаче Штейнера на графе G, которая состоит в нахождении дерева, связывающего все узлы из N и имеющего минимальный суммарный вес среди подобных деревьев [22]. В задаче Штейнера узлы из N называются основными, а вершины из $V\setminus N$ — вершинами Штейнера. Так как задача Штейнера на графе G является NP-трудной, то ОЗЗС тоже NP-трудная задача. Известно, что при $V=N$ задача Штейнера на графе G является задачей нахождения минимального остовного дерева графа G. В случае, когда H — произвольный граф, состоящий из k ребер, ОЗЗС эквивалентна задаче синтеза прочных сетей [7]. Если H — произвольный граф типа звезды, у которого число висячих вершин не меньше трех, то ОЗЗС эквивалентна задаче нахождения гамильтонова пути минимальной длины. Когда множество ребер $E(H)$ состоит из двух неинцидентных ребер, другими словами, граф H — двухреберное паросочетание, то ОЗЗС является близкой к задаче нахождения минимальных хордальных (построение трииангулуации) графов. Интересные частные случаи ОЗ2С рассмотрены в [3].

В зависимости от задания графа H условия существования решения ОЗ2С можно сформулировать следующим образом.

Утверждение 2. Задача ОЗ2С имеет решения тогда и только тогда, когда после удаления множества ребер произвольного подграфа графа G , изоморфного графу H, множество терминальных узлов N содержится в одной из полученных компонент связности G .

Доказательство утверждения легко следует из следующего известного факта: если в графе существуют пути, связывающие одну вершину с остальными, то этот граф связный. Обратное утверждение также верно.

Утверждение 2 остается справедливым и для второго способа задания графа H при условии, что множество ребер $E(G_0)$ произвольного подграфа G_0 графа G, изоморфного произвольному графу типа H (т.е. с произвольным числом вершин и ребер), не содержит ребер разреза, отделяющего хотя бы один узел из N от остальных узлов в графе G.

При проектировании транспортных сетей для обеспечения нормального движения трафика на дорогах при заторах на перекрестах представляет интерес случай ОЗ2С, когда $N = V$ и граф H — произвольный граф типа звезды, число вершин которого не больше, чем k, т.е. граф H содержит вершину v_0 такую, что она является конечной вершиной всех ребер из $E(H)$ и называется центром звезды (иными словами звезда — это дерево с одинаковым числом висячих вершин и ребер). Этот случай ОЗ2С также интересен тем, что в реальных ситуациях во время передачи информационного потока от одного пункта к другому при отказе $k-1$ исходящего канала пунктов отправления или назначения в сети должен существовать хотя бы один свободный канал, соединяющий их.

Теорема 1. Если H — произвольный граф типа звезды с максимальным числом вершин k, то ОЗ2С NP-полная.

Доказательство. Покажем, что в этом случае ОЗ2С эквивалентна известной NP-полной задаче синтеза сетей с реберной связностью k [7]. Итак, пусть реберная связность подграфа G_0 графа G равна k. Допустим, что при удалении некоторой звезды с k вершинами из подграфа G_0 он распадается на несколько компонент связности. Тогда центр звезды содержится в одной из этих компонент связности, а висячие вершины — в другой. Это означает, что реберная связность подграфа G_0 меньше, чем k, так как граф — звезда с k вершинами и имеет $k-1$ ребро. По определению граф H является произвольной звездой с максимальным числом вершин k, поэтому число удаленных ребер не больше, чем $k-1$, что доказывает справедливость теоремы.

Согласно теореме для решения ОЗ2С можно применить полиэдральный подход, с помощью которого решен ряд важнейших практических задач синтеза сетей с реберной связностью k ($k = 2, 3, 4$) [7, 9]. При применении полиэдрального подхода к задачам синтеза сети основным этапом является генерирование так называемых правильных ограничений, множество решений которых включает все допустимые решения соответствующих задач. Приведенная в [3] модель ОЗ2С содержит ограничения, обеспечивающие существование хотя бы одного пути между различными вершинами из V после удаления из графа G ребра произвольного его подграфа, изоморфного графу H. В случае, когда H является графом типа звезды с числом k ($k = 2, 3, 4$) вершин, из приведенной теоремы следует, что ограничения ОЗ2С правильные для задачи синтеза сетей с реберной связностью k [3].

5. ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ (ЗС)МР

После определения графа $G_* = (V_*, E_*)$ с оптимальной топологией путем решения ОЗ2С требуется определить такие пропускные способности x_e ребер $e \in E_*$, при которых $\Delta(f', x) = 0$, и обеспечить надежность функционирования сети. Как уже было показано выше, удовлетворяющие этим требованиям пропускные способности x_e ребер $e \in E_*$ можно определить в результате решения (ЗС)МР. Поэтому надо определить значение $f'(S)$ по значениям функции $f(S)$ для произвольного $\varnothing \neq S \subset V_*$. Другими словами, необходимо иметь алгоритм (оракул), который эффективно вычисляет $f'(S)$ для произвольного $S \subseteq V_*$. Для нахождения нормальных пропускных способностей ребер проектируемой сети значение $f'(S)$ можно определить следующим образом:

$$f'(S) = \min\{f(T): S \subseteq T \subset V\}. \tag{4}$$

Значит, для вычисления значений $f'(S)$ можно использовать строго полиномиальные алгоритмы, которые находят минимум субмодулярной функции, например алгоритмы, приведенные в [16–17]. Временная сложность этих алгоритмов оценивается как полином высокой степени от n, а именно $O(n^7|E|)$. Покажем, что в некоторых случаях $f'(S)$ может вычисляться более эффективно. Для этого вначале докажем следующий важный результат.

Лемма 1. Пусть $A = Q \cup L$ и в графе G не существует ребер (v, w) таких, что $v \in Q$, $w \in L$. Тогда ограничение (2) при $S = A$ является избыточным.

Доказательство. Так как $f(S)$ — симметричная и субмодулярная функция, то из условия леммы следует, что

$$x(\delta(A)) = x(\delta(Q)) + x(\delta(L)) \geq f(Q) + f(L) \geq f(A).$$

Таким образом получаем, что если ограничение выполняется для $S = Q$ и $S = L$, то $x(\delta(A)) \geq f(A)$.

Следовательно, ограничение (2) для $S = A$ является избыточным. Кроме того, так как $f(A) = f(V \setminus A)$, то ограничение (2) для $S = V \setminus A$ также избыточное. Поэтому в ограничениях (2) следует рассматривать только те разрезы $\delta(S)$, которые отделяют вершины подмножеств S и $V \setminus S$.

Пусть $g(T)$ — субмодулярная функция, определенная на подмножестве T множества V, и положим $g_*(S) = g(V) - g(V \setminus S)$. Функция $g_*(S)$ называется двойственной для $g(S)$. В работе [23] доказана следующая теорема.

Теорема 2. Задача минимизации субмодулярной функции $g(T)$ является задачей нахождения минимального разреза в сети тогда и только тогда, когда

$$g_*(S) = \sum (g_*(v, w): v, w \in S, v \neq w) \tag{5}$$

для всех $S \subseteq V$.

Теперь рассмотрим вопрос вычисления $f'(S)$ для $\varnothing \neq S \subset V$ в случае, когда функция $f(S)$ задана с помощью некоторого оракула, т. е. существует подпрограмма, которая вычисляет значение функции $f(S)$ для требуемого подмножества S множества вершин V сети $G_0 = (V, E_0)$ с неизвестным множеством ребер E_0. При этом известно, что $f(S)$ — разрезная функция. Поэтому $f(S) = p(\delta(S)) = p(\gamma(S)) - p(\kappa(S))$ для некоторых неизвестных весов $p(v, w)$ ребер $(v, w) \in E_0$. Положим $g(S) = p(\gamma(S))$ для всех $S \subseteq V$. Покажем, что условие (5) теоремы 2 выполняется для функции $g(S) = p(\gamma(S))$. Легко проверить, что

$$g_*(V) = g(V);\; g(S) = g_*(V) - g_*(V \setminus S);\; g(S) + g_*(S) = d(S),$$

где $d_v = f(v)$ для всех $v \in V$ и $d(S) = \sum (d_v: v \in S)$. Из определения функции g_* следует, что

$$g_*(\{v, w\}) = g(V) - g(V \setminus \{v, w\}) = p(\gamma(V)) - p(\gamma(V \setminus \{v, w\})) = p(v, w).$$

С учетом определения $\kappa(S)$ имеем

$$g_*(S) = p(\kappa(S)) = \sum \{(p(v, w): v, w \in S \wedge (v, w) \in E_0\}.$$

Согласно теореме 2 неизвестные веса $p(v, w)$ ребер $(v, w) \in E_0$ можно определить следующим образом [23]:

$$p(v, w) = \frac{1}{2}(d_v + d_w - f(v, w)) = \frac{1}{2}(f(v) + f(w) - f(v, w)).$$

Из субмодулярности функции $f(S)$ следует, что $p(v, w) \geq 0$. Положив $E_0 = \{(v, w): p(v, w) > 0\}$, определим множества ребер E_0, и тем самым построим сеть G_0, после чего вычисление значения $f'(S)$ для произвольного $\varnothing \neq S \subset V_* \subseteq V$ сводится к задаче нахождения минимального разреза следующим образом. Ввиду того, что $\varnothing \neq S \subset V$, существует вершина $t \notin S$. Поэтому для вычисления $f'(S)$ на сети G_0 подмножество вершин S стягивается к некоторой вершине $s \in S$, после чего полученные параллельные ребра заменяются одним ребром, пропускной способностью которого есть сумма пропускных способностей параллельных ребер. На полученной сети находится минимальный разрез, отделяющий вершины s и t. Поэтому для вычисления $f'(S)$ подмножество вершин S стягивается к некоторой вершине s на сети G_0. Таким образом, если $f(S)$ — разрезная функция, то значение $f'(S)$ можно вычислить эффективно одним из известных алгоритмов определения минимального разреза.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена задача проектирования или реконструкции телекоммуникационных и транспортных сетей, в которой требуется определить пропускные способности ребер при условии, что мощности разрезов ограничены снизу значениями заданной субмодулярной функции, определенной на подмножествах множества вершин сети. Показано, каким образом следует переопределить значения параметров этой задачи после того как определена оптимальная топология сети с учетом надежности ее функционирования. Предложен эффективный алгоритм для вычисления значений функции, использующий ее сужение на некоторое множество. Важнейшим направлением дальнейших исследований является разработка алгоритмов решения рассмотренных задач с учетом специфических видов их ограничений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Трубин В.А. Два класса задач размещения на древовидных сетях // Кибернетика. — 1983. — № 4. — С. 84–87.

2. Шарифов Ф.А. Задача синтеза надежных сетей // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 4. — С. 145–157.

3. Шор Н.З., Шарифов Ф.А. Общая задача синтеза надежных сетей // Проблемы информатики и кибернетики. — 2006. — № 2, 3. — С. 126–131.

4. Barahona F. Network design using cut inequalities // SIAM J. Optim. — 1996. — **6**, N 3. — P. 823–837.

5. Cheriyan J., Vempala S., Vet ta A. An approximation algorithm for minimum cost *k*-vertex connected subgraph // SIAM J. Comput. — 2003. — **32**, N 4. — P. 1050–1055.

6. Goemans M.X., Bertsimas D.J. Survivable networks, linear programming relaxations and the parsimonious property // Math. Program. — 1993. — **60**. — P. 145–166.

7. Grötschel M., Monma C.L. Integer polyhedra arising from certain network design problems with connectivity constraints // SIAM J. Disc. Math. — 1990. — N 4. — P. 502–522.

8. Fortz B., Labbe M. Two-connected networks with rings of bounded cardinality // Comput. Optim. and Appl. — 2004. — **27**. — P. 123–148.

9. Kerivin H., Mahjoub A.R. Separation of partition inequalities for $(1,2)$ survivable network design problem // Oper. Res. Lett. — **30**, N 4. — P. 265–268.

10. Monma C.L., Shallcross D.F. Methods for designing communications networks with certain two-connected survivability constraints // Oper. Res. — 1989. — **37**, N 4. — P. 531–541.

11. Sharifov F.A. Network design problem when edges of isomorphic subgraph are deleted // Proc. Evry, Paris, 27–29 Oct., 2003. — Paris, 2003. — P. 521–525.

12. Stoer M. Design of survivable network // Lect. Notes Math. Springer. — 1992. — 205 p.

13. Сергиенко И.В., Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 5. — С. 71–83.

14. Шарифов Ф.А. Нахождение минимального разреза с использованием баз расширенного полиматроида // Там же. — 1996. — № 6. — С. 138–152.

15. Iwata S., Fleischer L., Fujishige S. A combinatorial strongly polynomial algorithm for minimizing submodular functions // J. ACM. — 2001. — N 48. — P. 761–777.

16. Fujishige S. Submodular functions minimization and related topics // Optimiz. Methods and Software. — 2003. — **18**, N 2. — P. 167–180.

17. Schrijver A. A combinatorial algorithm minimizing submodular functions in strongly polynomial time // J. Combinatorial Theory. Ser. B. — 2000. — **80**. — P. 346–355.

18. Bussieck M.R., Winter T., Zimmermann U.T. Discrete optimization in public rail transport // Math. Prog. — 1997. — **79**. — P. 415–444.

19. Barbour B., Fricker J.D. Estimating an origin — destination table using method based on shortest augmenting path // Transport. research. Part B. — 1994. — **28**, iss. 2. — P. 77–89.

20. Sherali H.D., Sivanandan R., Hobeika A.G. A linear programming approach for synthesizing origin — destination trip tables from link traffic volumes // Ibid. — **28**, iss. 3. — P. 213–233.

21. Tardos E. A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programs // Oper. Res. — 1986. — **34**. — P. 250–256.

22. Handbook of optimization in telecommunication / M.G.C. Resende, P.M. Pardalos (Eds). — New York: Springer Science+Business Media, 2006. — 1134 p.

23. Шарифов Ф.А. Субмодулярные функции в задачах синтеза сетей // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 4. — С. 166–175.

Поступила 17.07.2013