 И.Д. Пукальский

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЯМИ

При помощи принципа максимума и априорных оценок изучаются первая краевая задача, задача с косой производной и односторонняя краевая задача с интегральным нелокальным условием по временной переменной для параболических уравнений со степенными особенностями в коэффициентах по временной и пространственным переменным. В гельдеровых пространствах со степенным весом установлено существование и единственность решений поставленных задач.

Ключевые слова: принцип максимума, краевая задача, априорная оценка, функция Грина, нелокальное условие
MSC (2000): 35K35

Постановка задачи и основной результат. Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей ∂D. В области $Q = (0,T] \times D$ рассмотрим задачу нахождения функции u, удовлетворяющей в $Q^{(0)} = Q \setminus \{\big((t^{(0)},x) \in Q \,\big|\, x \in D\big) \bigcup \big((t,x^{(0)}) \in Q \,\big|\, t \in (0,T]\big)\}$ уравнению

$$Lu \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} - A_0(t,x)\right] u(t,x) = f(t,x) \tag{1}$$

и нелокальному условию

$$u(0,x) + \int_0^T h(\tau,x)u(\tau,x)d\tau = \varphi(x), \tag{2}$$

а на боковой поверхности $\Gamma = (0,T] \times \partial D$ одному из граничных условий

$$u|_{\Gamma} = 0; \tag{3}$$

$$(Bu)(t,x)|_{\Gamma} \equiv \left.\left[\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x)\partial_{x_k} u + b_0(t,x)u\right]\right|_{\Gamma} = g(t,x); \tag{4}$$

$$u|_{\Gamma} \geq 0, \quad (Bu - g)|_{\Gamma} \geq 0, \quad u(Bu-g)|_{\Gamma} = 0. \tag{5}$$

Характер особенности коэффициентов дифференциального выражения L будут характеризовать функции:$s_1(q_1,t) = |t - t^{(0)}|^{q_1}$ при $|t - t^{(0)}| \leq 1$, $s_1(q_1,t) = 1$, если $|t-t^{(0)}| \geq 1$; $s_2(q_2,x) = |x - x^{(0)}|^{q_2}$ при $|x - x^{(0)}| \leq 1$, $s_2(q_2,x) = 1$, если $|x - x^{(0)}| \geq 1$; $s(q;P) = s_1(q_1,t)s_2(q_2,x)$; $|x - x^{(0)}| = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})^2\right]^{1/2}$.

Обозначим через q_ν, $\beta_k^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_i^{(\nu)}$, α – вещественные числа, $\nu \in \{1,2\}$, $q_\nu \geq 0$, $\beta_k^{(\nu)} \in (-\infty,\infty)$, $\mu_i^{(\nu)} \geq 0$, $i \in \{0,\ldots,n\}$, $\gamma^{(\nu)} \geq 0$, $\alpha \in (0,1)$, r – некоторое нецелое число, $[r]$ – целая часть r. Определим функциональные пространства, в которых исследуются задачи.

$C^r(\gamma,\beta;q;Q)$ – пространство функций u, $(t,x)\in\overline{Q}$, имеющих частные производные в $Q^{(0)}$ вида $\partial_t^j\partial_x^k u$, $2j+|k|\le[r]$ и конечное значение нормы

$$\|u;\gamma,\beta;q;Q\|_r=\|u;\gamma,\beta;q;Q\|_{[r]}+[|u;\gamma,\beta;q;Q|]_r,$$

где, например,

$$\|u;\gamma,\beta;q;Q\|_2=\sup_{P\in\overline{Q}}[s(q;P)|u(P)|]+\sum_{i=1}^n\sup_{P\in\overline{Q}}[s(q+\gamma-\beta_i;P)||\partial_{x_i}u(P)|+$$

$$+\sum_{ij=1}^n\sup_{P\in\overline{Q}}[s(q+2\gamma-\beta_i-\beta_j;P)|\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(P)]+\sup_{P\in\overline{Q}}[s(q+2\gamma;P)|\partial_t u(P)|].$$

$C^r(\mu_i;Q)$ - множество функций u_i, $(t,x)\in\overline{Q}$, имеющих частные производные в $Q^{(0)}$ вида $\partial_x^k u_i$, $|k|\le[r]$, для которых конечна норма

$$\|u_i;\mu_i;Q\|_r=\|u_i;\mu_i;Q\|_r+[\![u_i;\mu_i;Q]\!]_{[r]},$$

где, например,

$$\|u_i;\mu_i;Q\|_{[r]}=\sum_{|k|\le[r]}\sup_{P\in\overline{Q}}[s(\mu_i+|k|;P)|\partial_x^k u_i(P)|].$$

Относительно задач (1) – (5) предполагаем выполнение условий:

а) коэффициенты $A_i\in C^\alpha(\mu_i,Q)$, $i\in\{0,\dots,n\}$, $A_0\le K<\infty$, K – const , $A_{kj}\in C^\alpha(\beta_j+\beta_k,Q)$ и для произвольного вектора $\delta=(\delta_1,\dots,\delta_n)$ выполняется неравенство

$$\pi_1|\delta|^2\le\sum_{kj=1}^n s(\beta_j+\beta_k;P)A_{kj}(P)\delta_k\delta_j\le\pi_2|\delta|^2,$$

π_1, π_2 – положительные константы;

б) функции $f\in C^\alpha(\gamma,\beta;\mu_0;Q)$, $\varphi\in C^{2+\alpha}(\tilde\gamma,\tilde\beta;0;D)$, $\tilde\gamma=(0,\gamma^{(2)})$, $\tilde\beta=(0,\beta^{(2)})$, $\gamma^{(\nu)}=\max\left(\max\limits_j\bigl(1+\beta_j^{(\nu)}\bigr);\ \max\limits_j(\mu_j^{(\nu)}-\beta_j^{(\nu)});\ \dfrac{\mu_0^{(\nu)}}{2}\right)$, $\nu\in\{1,2\}$, $j\in\{1,\dots,n\}$, $\partial D\in C^{2+\alpha}$, $h\in C^{2+\alpha}(Q)$, $\sup\limits_{\overline{Q}}\int\limits_0^T|h(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}d\tau\le\lambda_0<1$, где $\lambda\le\inf\limits_{\overline{Q}}(-A_0(t,x))$;

в) коэффициенты $b_k\in C^{1+\alpha}(\beta_k;Q)$, $b_0\in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $b_0<0$, вектор $\{s(\beta_1;P)b_1,\dots,s(\beta_n;P)b_n\}$ образует с направлением внутренней нормали $\vec n$ к Γ в точке $P\in\Gamma$ угол, менше $\frac{\pi}{2}$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть для задачи (1) – (3) выполнены условия а), б), $(L\varphi-f)(0,x)|_{\partial D}=0$, $\varphi(x)|_{\partial D}=0$. Тогда существует единственное решение задачи (1) – (3) в пространстве $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ и для него справедлива оценка*

$$\|u;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le C\Bigl(\|f;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_\alpha+\|\varphi;\tilde\gamma,\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha}\Bigr).\qquad(6)$$

Теорема 2. *Если для задачи (1), (2), (4) выполнены условия а) – в), $g \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $B\varphi|_{\partial D} = [g(0,x) + \int\limits_0^T h(\tau,x)g(\tau,x)d\tau]$, $[\sum\limits_{k=1}^n b_k(0,x)\partial_{x_k}h(\tau,x)]_{\partial D} = 0$, то существует единственное решение задачи (1), (2), (4) в пространстве $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ и для него справедлива оценка*

$$\|u;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le C\Big(\|f;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \|\varphi;\tilde\gamma,\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha} + \|g\|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)}\Big). \tag{7}$$

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 2 существует единственное решение задачи (1), (2), (5) в пространстве $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;);Q$ и для него справедлива оценка (7).*

Для доказательства теорем 1 – 3 построим последовательности решений краевых задач с гладкими коэффициентами, предельные значения которых будут решениями задач (1) – (5).

Оценка решений краевых задач с гладкими коэффициентами. Пусть $Q_m = Q \setminus \{(t,x) \in Q \,|\, s_1(1,t) \ge m_1^{-1},\ s_2(1,x) \ge m_2^{-1}\}$ – последовательность областей, которая при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ сходится к Q.

Рассмотрим в области Q задачу нахождения решения уравнения

$$L_1 u_m \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^n a_i(t,x)\partial_{x_i} - a_0(t,x)\right]u_m = f_m(t,x), \tag{8}$$

удовлетворяющего нелокальному условию

$$u_m(0,x) + \int\limits_0^T h(\tau,x)u_m(\tau,x)d\tau = \varphi_m(x), \tag{9}$$

а на боковой поверхности Γ одному из краевых условий (3) – (5). Здесь коэффициенты a_{ij}, a_i, a_0, функции f_m, φ_m есть непрерывное продолжение коэффициентов A_{ij}, A_i, A_0, функций f, φ из области Q_m в область $\overline{Q} \setminus Q_m$ [5].

В задачах (3) – (5), (8), (9) сделаем замену $u_m = v_m e^{-\lambda t}$, где λ удовлетворяет условию б). Получим

$$(L_2 v_m)(t,x) \equiv ((L_1 - \lambda)v_m)(t,x) = f_m e^{\lambda t}, \tag{10}$$

$$v_m(0,x) + \int\limits_0^T h(\tau,x)e^{-\lambda\tau}v_m(\tau,x)d\tau = \varphi_m(x), \tag{11}$$

$$v_m|_\Gamma = 0, \tag{12}$$

$$(Bv_m)(t,x)|_\Gamma = g(r,x)e^{\lambda t}, \tag{13}$$

$$v_m|_\Gamma \ge 0, \quad (Bv_m)(t,x)|_\Gamma \ge g(t,x)e^{\lambda t}, \quad v_m(Bv_m - ge^{\lambda t})(t,x)|_\Gamma = 0. \tag{14}$$

Теорема 4. *Пусть v_m – классическое решение задачи (10) – (12) в области Q, причем выполнены условия а), б). Тогда для v_m справедлива оценка*

$$|v_m| \le \max(\max_Q |f_m e^{\lambda t}(-a_0 - \lambda)^{-1}|, \max_D |\varphi_m(1 - \int\limits_0^T |h(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}d\tau)^{-1}|). \tag{15}$$

Теорема 5. *Если v_m – классическое решение задачи (10), (11), (13) в области Q и выполнены условия а) – в), $g \in C(\Gamma)$, то для v_m справедлива оценка*

$$|v_m| \leq \max(\max_Q |f_m e^{\lambda t}(-a_0-\lambda)^{-1}|, \max_D |\varphi_m(1-\int_0^T |h(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}d\tau)^{-1}|,$$

$$\max_\Gamma |b_0^{-1} g e^{\lambda t}|). \tag{16}$$

Доказательство теорем 4, 5 проводится за схемой доказательства теорем 3, 4 из [2]. Отличие только в случае, когда $0 < \max_{\overline{Q}} v_m = \max_D v_m(0,x) = v_m(0,x^{(1)})$. Тогда, используя нелокальное условие (11), находим

$$v_m(0,x^{(3)}) \leq \max_D(\varphi_m(x)[1-\int_0^T |h(\tau,x^{(3)})|e^{-\lambda\tau}d\tau]^{-1}).$$

Аналогично получаем оценку в случае

$$0 > \min_{\overline{Q}} v_m(t,x) = \min_{\overline{D}} v_m(0,x)$$

Теорема 6. *При выполнении условий а) – в), $g \in C(\Gamma)$ для решения задачи (10), (11), (14) справедлива оценка (16).*

Доказательство проводится по методике доказательства теоремы 2 из [3].

Существование решений задач (10) – (14) устанавливается следующими теоремами.

Теорема 7. *Если выполнены условия теоремы 1, то существует решение задачи (10) – (12) и для него справедлива оценка (15).*

Доказательство. Решение задачи (10) – (12) ищем в виде

$$v_m(t,x) = \int_D E_m(t,x,0,\xi)v_m(0,\xi)d\xi + v_m^{(1)}(t,x), \tag{17}$$

где $v_m^{(1)}(t,x)$ – решение задачи (10), (12) с начальным условием

$$v_m(0,x) = \varphi(x), \tag{18}$$

$E_m(t,x,0,\xi)$ – функция Грина задачи (10), (12), (18) из [6, с. 469].

Согласно теоремы 4, для $v_m^{(1)}(t,x)$ справедлива оценка

$$|v_m^{(1)}| \leq \max(\|\varphi_m\|_{C(D)}, \|f_m(-a_0-\lambda)^{-1}e^{\lambda t}\|_{C(Q)})$$

и $E_m(t,x,\tau,\xi) \geq 0$, $0 \leq \int_D E_m(t,x,0,\xi)d\xi \leq 1$.

Удовлетворяя нелокальное условие (11), имеем

$$v_m(0,x)+\int\limits_0^T h(\tau,x)e^{-\lambda\tau}d\tau\int\limits_D E_m(\tau,x,0,\xi)v_m(0,\xi)d\xi=$$

$$=-\int\limits_0^T h(\tau,x)e^{-\lambda\tau}dv_m^{(1)}(\tau,x)d\tau\equiv F(x). \tag{19}$$

Решение интегрального уравнения (19) находится методом последовательных приближений. Поскольку

$$|\int\limits_0^T h(\tau,x)e^{-\lambda\tau}d\tau\int\limits_D E_m(\tau,x,0,\xi)d\xi|\le\int\limits_0^T|h(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}d\tau\le\lambda_0<1,$$

то для решения уравнения (19) справедлива оценка

$$|v_m(0,x)|\le\frac{\lambda_)}{1-\lambda_0}\|F\|_{C(D)}.$$

Подставляя значение $v_m(0,x)$ в (17), получаем решение задачи (10) – (12).

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существует решение задачи (10), (11), (13) и для него справедлива оценка (16).*

Теорема устанавливается по схеме доказательства теоремы 7, при этом используется функция Грина однородной задачи (10), (13), (18) ($g=0$) из [1, с. 96].

Рассмотрим краевые задачи

$$(L_0v)(t,x)\equiv\left[\partial_t-\sum_{ij=1}^n s(\beta_i+\beta_j;P_1)A_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right]v(t,x)=f_0(t,x), \tag{20}$$

$$v(0,x)+\int\limits_0^T h(\tau,x)e^{-\lambda\tau}v(\tau,x)d\tau=\varphi_0(x), \tag{21}$$

$$v|_\Gamma=0, \tag{22}$$

$$(B_0v)(t,x)|_\Gamma=\left[\sum_{k=1}^n b_k(P_1)s(\beta_k;P_1)\partial_{x_k}v\right]\Bigg|_\Gamma=g_0(t,x). \tag{23}$$

Используя методику доказательства теоремы 7, устанавливаем следующие теоремы.

Теорема 9. *Пусть $f_0\in C^\alpha(Q)$, $\varphi_0\in C^{2+\alpha}(D)$ и выполнены условия теоремы 1. Тогда существует единственное решение задачи (20) – (22) в пространстве $C^{2+\alpha}(Q)$ и для него справедлива оценка*

$$\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q)}\le c(\|f_0\|_{C^\alpha(Q)}+\|\varphi_0\|_{C^{2+\alpha}(D)}). \tag{24}$$

Теорема 10. *Если $f_0 \in C^{\alpha}(Q)$, $\varphi_0 \in C^{2+\alpha}(D)$, $g_0 \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$ и выполнены условия теоремы 2, то существует единственное решение задачи (20), (21), (23) в пространстве $C^{2+\alpha}(Q)$ и для него справедлива оценка*

$$\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q)} \le c(\|f_0\|_{C^{\alpha}(Q)} + \|\varphi_0\|_{C^{2+\alpha}(D)} + \|g_0\|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)}). \tag{25}$$

Введем в пространстве $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\|u_m;\gamma,\beta;q;Q\|_{2+\alpha}$, эквивалентную при каждом фиксированном m_1, m_2 гельдеровой норме, которая определяется так же, как норма $\|u;\gamma,\beta;q;Q\|_{2+\alpha}$, только вместо функций $s_1(q_1,t)$, $s_2(q_2,x)$ берем соответственно $d_1(q_1,t) = s_1(q_1,t)$, если $|t-t^{(0)}| \ge m_1^{-1}$, $d_1(q_1,t) = m_1^{-q_1}$, если $|t-t^{(0)}| \le m_1^{-1}$ и $d_2(q_2,x) = s_2(q_2,x)$, если $|x-x^{(0)}| \ge m_2^{-1}$, $d_2(q_2,x) = m_2^{-q_2}$, если $|x-x^{(0)}| \le m_2^{-1}$, $d(q;P) = d_1(q_1,t)d_2(q_2,x)$.

При накладываемых условиях на гладкость коэффициентов дифференциальных выражений L_1 и B существуют единственные решения задач (10) – (14), которые принадлежат $C^{2+\alpha}(Q)$ и имеют при каждом m_1, m_2 конечную норму $\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}$. Установим оценку этой нормы.

Теорема 11. *Если выполнены условия теоремы 1, то для решения задачи (10) – (12) справедлива оценка*

$$\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c(\|f;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_{\alpha} + \|\varphi;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha}). \tag{26}$$

Неравенство (26) получается по методике работы [2]. Из определения норм следует существование в $\overline{Q}$ точек $P_1(t_1,x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $P_j^{(1)}(t_1,x_1^{(1)},\dots,x_{j-1}^{(1)},x_j^{(2)},x_{j+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $P_2(t_2,x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, для которых выполнено одно из неравенств

$$\frac{1}{2}\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le E_k, \quad k \in \{1,2,3,4\}, \tag{27}$$

$$E_1 = \sum_{ijr=1}^{n} d(2\gamma-\beta_i-\beta_j+\alpha(\gamma-\beta_r);\tilde{P}_1)|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}|^{-\alpha}|\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P_1)-\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P_r^{(2)})|;$$

$$E_2 = \sum_{ij=1}^{n} d(2\gamma-\beta_i-\beta_j+\alpha\gamma;\tilde{P}_2)|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}}|\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P_1)-\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P_2)|;$$

$$E_3 = \sum_{r=1}^{n} d(2\gamma+\alpha(\gamma-\beta_r);\tilde{P}_1)|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}|^{-\alpha}|\partial_t v_m(P_r^{(2)})-\partial_t v_m(P_1)|;$$

$$E_4 = d((2+\alpha)\gamma;\tilde{P}_2)|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}}|\partial_t v_m(P_1)-\partial_t v_m(P_2)|,$$

$d(q,\widetilde{P}_\nu) = \min(d(q;P_\nu),d(q,P_\nu^{(1)}))$, $\nu \in \{1,2\}$.

Рассмотрим случай $|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}| \le \rho n^{-1}d(\gamma-\beta_r,\tilde{P}_1) \equiv T_1$ или $|t_1-t_2| \le \rho^2 d(2\gamma;\widetilde{P}_2) \equiv T_2$. Пусть $V_l = \{(t,x)\in Q \bigm| |t-t_1| \le l^2T_2, |x_r-x_r^{(1)}| \le lT_1, r \in \{1,\dots,n\}\}$. В задаче (10) –

(12) сделаем замену $v_m(t,x)=\omega_m(t,y)$, $y_r=d(\beta_r;P_1)x_r$, $r\in\{1,\dots,n\}$. Тогда функция $W_m(t,y)=\omega_m(t,y)\mu(t,y)$ удовлетворяет задачи

$$\left[\partial_t-\sum_{ij=1}^{n}d(\beta_i+\beta_j;P_1)a_{ij}(P_1)\partial_{y_i}\partial_{y_j}\right]W_m=\left[\sum_{ij=1}^{n}(a_{ij}(t,Y)-a_{ij}(P_1))\times\right.$$

$$\left.\times d(\beta_i+\beta_j;P_1)\partial_{y_i}\partial_{y_j}\omega_m-\sum_{i=1}^{n}a_i(t,Y)d(\beta_i;P_1)\partial_{y_i}\omega_m-a_0(t,Y)\omega_m\right]\mu+$$

$$+\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(P_1)d(\beta_i+\beta_j;P_1)[\partial_{y_i}\omega_m\partial_{y_j}\mu+\partial_{y_j}\omega_m\partial_{y_i}\mu]+$$

$$+\omega_m\left[\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(P_1)d(\beta_i+\beta_j;P_1)(\partial_{y_i}\partial_{y_j}\mu-\partial_t\mu)\right]+f_m(t,Y)\mu\equiv F_1(t,y), \qquad (28)$$

$$W_m(0,y)+\int_0^T h(\tau,Y)e^{-\lambda\tau}W_m(\tau,y)d\tau=$$

$$=\int_0^T h(\tau,Y)e^{-\lambda\tau}\omega_m(\tau,y)(\mu(\tau,y)-\mu(0,y))d\tau+\varphi_m(Y)\mu\equiv\Psi(y), \qquad (29)$$

$$W_m|_\Gamma=0, \qquad (30)$$

где

$$\mu(t,y)=\begin{cases}1, & (t,y)\in H_{1/2},\quad |\partial_t^j\partial_y^k\mu|\le c_{kj}d^{-1}((2j+|k|)\gamma;P_1);\\ 0, & (t,y)\notin H_{3/4},\quad 0\le\mu(t,y)\le 1,\end{cases}$$

$H_l=\{(t,y)\in Q\,\big|\,|t-t^{(1)}|\le l^2T_2, |y_r-y_r^{(1)}|\le ld(\gamma;P_1)\rho n^{-1}, y_r^{(1)}=d(\beta_r;P_1)x_r^{(1)}\}$, $Y=(d^{-1}(\beta_1;P_1)x_1,\dots,d^{-1}(\beta_n;P_1)x_n)$.

Используя теорему 9 для произвольных точек $\{M_1,M_2\}\subset H_{1/4}$, имеем

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)|\partial_t^j\partial_y^k\omega_m(M_1)-\partial_t^j\partial_y^k\omega_m(M_2)|\le c(\|F_1\|_{C^\alpha(H_{3/4})}+\|\Psi\|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4}\bigcap\{t=0\})}),$$

$d(M_1,M_2)$ – параболическое расстояние между точками M_1 и M_2, $2j+|k|=2$.

Учитывая свойства функции $\mu(t,y)$, определение пространства $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ и возвращаясь к переменным (t,x) находим

$$E_k\le c(n^2\rho^\alpha+\varepsilon^\alpha(n+2))[|v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|]_{2+\alpha}+c_1(\|f;\gamma,\beta;2\gamma;Q\|_\alpha+$$

$$+\|\varphi;\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha}+\sup_Q|v_m|),$$

ε – произвольное число, $\varepsilon\in(0,1)$.

В случае $|x_r^{1)}-x_r^{(2)}|\ge T_1$, или $|t_1-t_2|\ge T_2$ используя интерполяционные неравенства из [4, с. 176], имеем

$$E_k\le\varepsilon^\alpha[|v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|]_{2+\alpha}+c\sup_Q|v_m|.$$

Выбирая ρ и ε достаточно малыми и учитывая теорему 4, получаем оценку (26).

Теорема 12. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда решения задачи (10), (11), (13) справедлива оценка*

$$\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c(\|f;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \|\varphi;\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} + \|g\|_{C^{1+\alpha}(\Gamma)}). \tag{31}$$

Доказательство оценки (31) проводится по схеме доказательства теоремы 6 из [2], используя при этом теорему 5.

Пусть $|x_k^{(1)} - \xi_k| \le 2T_1$, $\xi \in \partial D$. Рассмотрим шар $K(R,P)$, содержащий точки P_1, P_2, $P_r^{(2)}$, радиуса $R \ge 4T_1$ с центром в некоторой точке $P \in \Gamma$. С помощью взаимно однозначного преобразования $x = \psi(y)$ из [7, с. 155] можно распрямить $\partial D \bigcap K(R,P)$, в результате чего область $Q \bigcap K(R,P)$ переходит в область Π_1, для точек которой $y_n \ge 0$, $t \ge 0$. Если положить $v_m(t,x) = \omega_m(t,y)$, $P_\nu = M_\nu$, $\nu \in \{1,2\}$, $P_r^{(2)} = M_r^{(2)}$, $T_\nu = T_\nu^{(1)}$, $d(\gamma;P_1) = \sigma(\gamma;M_1)$ и коэффициенты операторов задачи (10), (11), (13) при этом преобразовании обозначить через $h_{ij}(t,y)$, $h_i(t,y)$, $h_0(t,y)$, $l_i(t,y)$, $l_0(t,y)$, то $W_m^{(1)}(t,x) = \mu_1(t,z)\omega_m^{(1)}(t,z)$, где $\omega_m^{(1)}(t,z) \equiv \omega_m(t,y)$, $z_r = \sigma(\beta_r;M_1)y_r$, $r \in \{1,\dots,n\}$, будет решением задачи

$$\left[\partial_t - \sum_{ij=1}^n \sigma(\beta_i+\beta_j;M_1)h_{ij}(M_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\right] W_m^{(1)} = [\sum_{ij=1}^n (h_{ij}(t,Z) - h_{ij}(M_1))\times$$

$$\times\sigma(\beta_i+\beta_j;M_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\omega_m^{(1)} - \sum_{i=1}^n h_i(t,Z)\sigma(\beta_i;M_1)\partial_{z_i}\omega_m^{(1)} - h_0(t,Z)\omega_m^{(1)}]\mu_1+$$

$$+\sum_{ij=1}^n h_{ij}(M_1)\sigma(\beta_i+\beta_j;M_1)[\partial_{z_i}\omega_m^{(1)}\partial_{z_j}\mu_1 + \partial_{z_j}\omega_m^{(1)}\partial_{z_i}\mu_1] + \omega_m^{(1)}[\sum_{ij=1}^n \sigma(\beta_i+\beta_j;M_1)\times$$

$$\times h_{ij}(M_1)\partial_{z_i}\partial_{z_j}\mu_1 - \partial_t\mu_1] + f_m(t,\psi(Z))\mu_1 \equiv F_2(t,z), \tag{32}$$

$$W_m^{(1)}(0,z) + \int_0^T h(\tau,\psi(Z))e^{-\lambda\tau}W_m^{(1)}(\tau,z)d\tau = \int_0^T h(\tau,\psi(Z))e^{-\lambda\tau}\omega_m^{(1)}(\tau,z)\times$$

$$\times(\mu_1(\tau,z) - \mu_1(0,z))d\tau + \mu_1\varphi_m(\psi(Z)) = \Psi_1(z), \tag{33}$$

$$\sum_{i=1}^n l_i(M_1)\sigma(\beta_i;M_1)\partial_{z_i}W_m^{(1)}|_{z_n=0} = \{\mu_1[\sum_{i=1}^n (l_i(M_1) - l_i(t,Z))\sigma(\beta_i;M_1)\partial_{z_i}\omega_m^{(1)}+$$

$$+l_0(r,Z)\omega_m^{(1)}] + \omega_m^{(1)}\sum_{i=1}^n l_i(M_1)\sigma(\beta_i;M_1)\partial_{z_i}\mu_1 + \mu_1 g(t,\psi(Z))\}|_{z_n=0} = G_1, \tag{34}$$

$$\mu_1(t,z) = \begin{cases} 1, & (t,z) \in H_{1/2}^{(1)}, \quad |\partial_z^j\partial_z^k\mu_1| \le c_{kj}\sigma^{-1}((2j+|k|)\gamma;M_1); \\ 0, & (t,z) \notin H_{3/4}^{(1)}, \quad 0 \le \mu_1(t,z) \le 1, \end{cases}$$

$H_\eta = \{(t,z) \in \Pi_1 \,\big|\, |t - t_1| \le \eta T_2^{(1)}, |z_i - z_i^{(1)}| \le \eta\sigma(\gamma;M_1)n^{-1}\rho, z_i^{(1)} = \sigma(\beta_i;M_1)y_i^{(1)}, i \in \{1,\dots,n\}\}$, $Z = (\sigma^{-1}(\beta_1;M_1)y_1,\dots,\sigma^{-1}(\beta_n;M_1)y_n)$.

Используя теорему 10 для произвольных точек $\{N_1, N_2\} \subset H^{(1)}_{1/4}$, имеем

$$d^{-\alpha}(N_1, N_2)|\partial_t^j \partial_z^k \omega_m^{(1)}(N_1) - \partial_t^j \partial_z^k \omega_m^{(1)}(N_2)| \le c(\|F_2\|_{C^\alpha(H^{(1)}_{3/4})} + \|\Psi_1\|_{C^{2+\alpha}(H^{(1)}_{3/4}\bigcap\{t=0\})} +$$

$$+\|G_1\|_{C^{1+\alpha}(H^{(1)}_{3/4}\bigcap\{z_n=0\})}).$$

Учитывая свойства функции $\mu_1(t, z)$, определение пространства $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$, неравенство (27) и теорему 2, получаем оценку (31).

В случае $|x_k^{(1)} - \xi_k| \ge 2T_2$, используя схему доказательства теоремы 11, находим

$$\|v_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{C^{2+\alpha}} \le c(\|f; \gamma, \beta; \mu_0; Q\|_\alpha + \|\varphi; \widetilde{\gamma}, \widetilde{\beta}; 0; D\|_{2+\alpha} + \|g\|_{C(\Gamma)}).$$

Теорема 13. *Если выполнены условия теоремы 3, то для решения задачи (10), (11), (14) справедлива оценка (31).*

Вывод оценки (31) для решения задачи (10), (11), (14) почти дословно совпадает с доказательством теорем 3, 4 из [3], если при этом использовать теорему 8.

Доказательство теоремы 1. Правая часть неравенства (32) не зависит от m_1, m_2 и последовательности $\{V_m^{(0)}\} = \{|v_m(P)|\}$, $\{V_m^{(1)}\} = \{d(\gamma - \beta_i; P)|\partial_{x_i} v_m(P)|\}$, $\{V_m^{(2)}\} = \{d(2\gamma - \beta_i - \beta_j; P)|\partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m(P)|\}$, $\{V_m^{(3)}\} = \{d(2\gamma; P)|\partial_t v_m(P)|\}$, $P \in Q$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. По теореме Арчела существуют подпоследовательности $\{V_{m(j)}^{(k)}\}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, равномерно сходящиеся в Q. Переходя к пределу при $j \to \infty$ в задаче (10) – (12) получим, что $u = ve^{-\lambda t}$ – единственное решение задачи (1) – (3), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ и справедлива неравенство (5).

Доказательство теорем 2 и 3 проводится аналогично.

1. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
2. *Пукальський И.Д.* Нелокальные краевые задачи для неравномерно параболических уравнений // Дифф. ур. – 2003. – Т. 39, N 6. – С. 777 – 787.
3. *Пукальський И.Д.* Одностороння нелокальна крайова задача для сингулярних параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, N 12. – С. 1521 – 1531.
4. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М: Наука, 1964. – 445 с.
5. *Пукальський И.Д.* Краевая задача для линейных параболических уравнений с вырождениями // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, N 3. – С. 377 – 387.
6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М: Мир, 1968. – 428 с.

Кафедра дифференциальных уравнений,
Черновецкий национальный университет им. Ю.Федьковича,
ул.Коцюбинского 2,
58012, г. Черновцы, Украина

Получено 21.09.2005