Нелинейные граничные задачи **16**, 202-212 (2006)

 Б.Й.Пташник, М.М.Симотюк

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗБУРЕННЯМ

Досліджено коректність багатоточкової задачі для збурених рівнянь із частинними похідними. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

Ключові слова: багатоточкова задача, збурені рівняння з частинними похідними, малі знаменники, міра Лебега
MSC (2000): 35E20; 35G05; 35B65

Дослідження задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для рівнянь із частинними похідними розпочалося порівняно недавно. Інтерес до їх вивчення зумовлений як потребою побудови загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними, так і тим, що багатоточкові задачі виникають при математичному моделюванні багатьох фізичних процесів. Класи єдиності та класи коректної розв'язності багатоточкових задач для еволюційних систем рівнянь та навантажених еволюційних рівнянь у безмежному шарі встановлено у [4, 12]. До цих робіт примикають праці [13, 14], в яких за допомогою операційного методу, індукованого узагальненою схемою відокремлення змінних, досліджено задачі з багатоточковими умовами у безмежному шарі для лінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними. Для деяких класів диференціально-операторних рівнянь умови розв'язності багатоточкових задач встановлено в роботах [1, 2, 6, 7, 21, 26]. Дослідження багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях пов'язане з проблемою малих знаменників; у працях [10, 17, 18, 19, 20] на основі метричного підходу, використаного для оцінок знизу малих знаменників, встановлено розв'язність таких задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів рівняння та значень вузлів інтерполяції.

Дана робота продовжує і розвиває дослідження, розпочаті у [3, 19]. Її основною метою є встановлення результату про існування для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0,T]^n$ розв'язку багатоточкової задачі для рівнянь з частинними похідними зі збуренням, де $t_1, \ldots, t_n$ — вузли інтерполяції.

1. Будемо використовувати позначення: $Q_p^T = \{(t,x) : 0 < t < T, x \in \Omega_p\}$, Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$, $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$, $D = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_p)$, $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}_n[\xi_1, \ldots, \xi_p]$ — множина всіх многочленів змінних $\xi_1, \ldots, \xi_p$ з комплексними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує n; $W_{\alpha,\beta}^\gamma$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$) — простір тригонометричних рядів $\varphi(x) = \sum\limits_{|k|\geq 0} \varphi_k \exp(ik,x)$, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi; W_{\alpha,\beta}^\gamma\| = \sqrt{\sum_{|k|\geq 0} |\varphi_k|^2 (1+|k|)^{2\alpha} \exp(2\beta|k|^\gamma)};$$

$W_{\alpha,\beta}^{n,\gamma}$ — простір функцій $u(t,x)$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ похідні $\partial^j u(t,x)/\partial t^j$, $0 \leq j \leq n$, належать до простору $W_{\alpha,\beta}^\gamma$ і є неперервними в цьому просторі за $t \in [0,T]$;

Робота частково підтримана ДФФД (проект № 10.01/053)

норму в просторі $W^{n,\gamma}_{\alpha,\beta}$ задамо формулою

$$\|u; W^{n,\gamma}_{\alpha,\beta}\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\|\partial^j u(t,\,\cdot\,)/\partial t^j; W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\right\|;$$

$\mathcal{L}_{a,b}(H_1; H_2)$, $a, b > 0$, — множина всіх операторів $\mathcal{B} : H_1 \to H_2$ таких, що

$$\forall\, u \in H_1 \quad \|\mathcal{B}u; H_2\| \le a\|u; H_1\|,$$

$$\forall\, u_1, u_2 \in H_1 \quad \|\mathcal{B}u_1 - \mathcal{B}u_2; H_2\| \le b\|u_1 - u_2; H_1\|,$$

де H_1, H_2 — банахові простори з нормами $\|\cdot; H_1\|$, $\|\cdot; H_2\|$ відповідно.

2. Розглядаємо таку багатоточкову задачу:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) u(t,x) \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(D)\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = F(t,x) + \mathcal{B}u(t,x), \quad (t,x) \in Q^T_p, \tag{1}$$

$$u(t_j, x) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad 0 \le t_1 < \ldots < t_n \le T, \quad x \in \Omega_p, \tag{2}$$

де $A_j(\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbb{C}_{N_j}[\xi_1, \ldots, \xi_p]$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $F \in W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{a,b}\left(S(u^0, r); W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}\right)$, $\gamma_0 = \max\limits_{0\le j\le n-1}\{N_j/(n-j)\}$, α_0, β_0 — деякі фіксовані дійсні числа, $u^0 = u^0(t,x)$ — розв'язок задачі (1), (2) з простору $W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}$ при $\mathcal{B} = 0$, $S(u^0, r)$, $r > 0$, — куля в просторі $W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}$ радіуса r з центром в точці u^0. Нижче буде встановлено, за яких умов на числа a, b, α, β, r, $t_1, \ldots, t_n$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), що належить кулі $S(u^0, r)$.

3. Спочатку розглянемо незбурену задачу, коли $\mathcal{B} = 0$. Розв'язок незбуреної задачі з простору $W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}$ шукаємо у вигляді ряду

$$u^0(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u^0_k(t)\exp(ik, x). \tag{3}$$

Для визначення кожного з коефіцієнтів $u^0_k(t)$ ряду (3) отримуємо таку задачу:

$$L\,(d/dt, k)\, u^0_k(t) = F_k(t), \quad u^0_k(t_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{4}$$

де $F_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функції $F(t,x)$. Нехай $f_1(t,k), \ldots, f_n(t,k)$ — така фундаментальна система розв'язків рівняння

$$L\,(d/dt, k)\, y(t) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{5}$$

що $f^{(j-1)}_q(0,k) = \delta_{jq}$, $j, q = 1, \ldots, n$, де δ_{jq} — символ Кронекера. Позначимо:

$$\Delta(k, \vec{t}) = \det\|f_q(t_j, k)\|^n_{j,q=1}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad \vec{t} = (t_1, \ldots, t_n), \quad \theta(\vec{t}) = t_1 + \ldots + t_n.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку незбуреної задачі* (1), (2) *в просторі* $W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \qquad \Delta(k, \vec{t}) \ne 0. \tag{6}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5.3 [17, с. 82].

4. Якщо виконується умова (6), то для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ задача (4) має єдиний розв'язок, який зображується формулою [19]

$$u_k^0(t) = \int_0^t f_n(t-\tau,k)F_k(\tau)d\tau - \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})} f_q(t,k) \int_0^{t_j} f_n(t_j-\tau,k)F_k(\tau)d\tau, \qquad (7)$$

де $\Delta_{jq}(k,\vec{t})$, $j,q = 1,\ldots,n$, — алгебричне доповнення елемента $f_q(t_j,k)$ у визначнику $\Delta(k,\vec{t})$. Із (3), (7) випливає, що формальний розв'язок незбуреної задачі (1), (2) зображується формулою

$$\begin{gathered} u^0(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} \exp(ik,x) \Bigg(\int_0^t f_n(t-\tau,k)F_k(\tau)d\tau - \\ - \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})} f_q(t,k) \int_0^{t_j} f_n(t_j-\tau,k)F_k(\tau)d\tau \Bigg). \end{gathered} \qquad (8)$$

Збіжність ряду (8) у просторах $W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}$, взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників, на що вказує такий приклад.

Приклад 1. Формальний розв'язок задачі

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \frac{t}{T}\psi(x), \quad (t,x) \in Q_1^T, \quad \int_{\Omega_1} \psi(x)dx = 0, \qquad (9)$$

$$u(0,x) = 0, \quad u(T,x) = 0, \quad x \in \Omega_1, \quad T/\pi \notin \mathbb{Q}, \qquad (10)$$

зображається формулою

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{t}{T} - \frac{\sin(kt)}{\sin(kT)} \right) \frac{\psi_k}{k^2} \exp(ikx). \qquad (11)$$

За теоремою Хінчина [25, с. 48] існує таке число $\theta > 0$, $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$, що нерівність

$$|k\theta - m\pi| < \exp(-|k|^{|k|})$$

має нескінченну множину розв'язків у цілих числах k, m ($k \neq 0$). Оскільки для фіксованого k нерівність $|k\theta - m\pi| < \exp(-|k|^{|k|})$ може виконуватися лише для скінченної кількості цілих чисел m, то з того, що $|\sin(k\theta)| = |\sin(k\theta - m\pi)| \leq |k\theta - m\pi|$, де m — ціле число, випливає, що нерівність $|\sin(k\theta)| < \exp(-|k|^{|k|})$ виконується для нескінченної множини K цілих чисел k. Якщо в задачі (9), (10) покласти: $T = \theta$,

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \psi_k \exp(ikx), \;\; \psi_k \equiv (1+|k|)^{-\alpha_0 - 1/2 - \varepsilon} \exp(-\beta_0 |k|^{\gamma_0}), \;\; \varepsilon > 0,$$

то для розв'язку (11) цієї задачі, дістанемо, що

$$\|u; W^{2,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\| \geq \left\| \partial_t u|_{t=0}; W^{\gamma_0}_{\alpha,\beta} \right\| \geq \sqrt{\sum_{k\in K} \frac{(k\theta - \sin(k\theta))^2}{k^4\theta^2 \sin^2(k\theta)} \psi_k^2 (1+|k|)^{2\alpha} \exp(2\beta|k|^{\gamma_0})} = +\infty,$$

якими б не були числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Отже, існують число $T > 0$ і функція $t\psi/T \in W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}$ такі, що розв'язок задачі (9), (10) не належить до шкали просторів $W^{2,\gamma_0}_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

5. Встановимо умови збіжності ряду (8) у шкалі просторів $W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Позначимо через $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ корені рівняння

$$L(\lambda, k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{12}$$

Відомо [23, розд. 5, §7], що скінченними є числа

$$M_1 = \sup_{k\in\mathbb{Z}^p} \max_{1\le j\le n} \{\operatorname{Re}\lambda_j(k)/(1+|k|^{\gamma_0})\}, \quad M_2 = -\inf_{k\in\mathbb{Z}^p} \min_{1\le j\le n} \{\operatorname{Re}\lambda_j(k)/(1+|k|^{\gamma_0})\}.$$

Теорема 2. *Нехай виконується умова (6) та існують сталі $\omega, \delta \in \mathbb{R}$ такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність*

$$|\Delta(k,\vec{t})| \ge (1+|k|)^{-\omega} \exp(-\delta|k|^{\gamma_0}). \tag{13}$$

Якщо $F \in W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}$, то незбурена задача (1), (2) ($\mathcal{B} = 0$) має в просторі $W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}$ єдиний розв'язок, який зображується рядом (8) і неперервно залежить від F, де

$$\alpha = \alpha_0 - \omega - \gamma_0 n(n+1)/2, \ \beta = \beta_0 - \delta - M_1(\theta(\vec{t}) - t_n) - \widetilde{M_1}(T + t_n), \ \widetilde{M_1} = \max\{0; M_1\}. \tag{14}$$

Доведення. Використовуючи схему доведення леми 12.7.7 [24, с. 162], можна встановити оцінки

$$\left|f_q^{(j-1)}(t,k)\right| \le C_1(1+|k|)^{\gamma_0(n+j-q)} \exp(M_1 t|k|^{\gamma_0}), \ j \ge 1, \ q = 1,\ldots,n, \ t \in [0,T], \tag{15}$$

$$\left|\frac{\partial^{j-1} f_n(t-\tau,k)}{\partial t^{j-1}}\right| \le C_2(1+|k|)^{\gamma_0 j} \exp(M_1(t-\tau)|k|^{\gamma_0}), \quad j \ge 1, \quad 0 \le \tau \le t \le T. \tag{16}$$

Враховуючи оцінки (15), (16), дістанемо, що

$$|\Delta(k,\vec{t})| \le C_3(1+|k|)^{\gamma_0 n(n+1)/2} \exp(M_1\theta(\vec{t})|k|^{\gamma_0}), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{17}$$

$$\begin{gathered} \left|\Delta_{jq}(k,\vec{t})\right| \cdot |f_q^{(r)}(t,k)| \le C_4(1+|k|)^{\gamma_0(n(n-1)/2+r)} \exp(M_1(\theta(\vec{t}) + t - t_j)|k|^{\gamma_0}), \\ j,q = 1,\ldots,n, \ r = 0,1,\ldots,n, \ t \in [0,T], \quad k \in \mathbb{Z}^p, \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} \left|\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} \int_0^t f_n(t-\tau,k) F_k(\tau) d\tau\right| \le C_5(\overline{F}_k(1+|k|)^{\gamma_0 j} \exp(\widetilde{M_1} t|k|^{\gamma_0}) + \delta_{jn}|F_k(t)|), \\ j = 0,1,\ldots,n, \quad t \in [0,T], \quad k \in \mathbb{Z}^p, \end{gathered} \tag{19}$$

де $\overline{F}_k = \sqrt{\int_0^T |F_k(t)|^2 dt}$, $k \in \mathbb{Z}^p$. З оцінок (13), (18), (19) та формули (7) отримуємо, що

$$\left|\frac{d^q u_k^0(t)}{dt^q}\right| \le C_6(\overline{F}_k \sigma_k + |F_k(t)|), \quad q = 0,1,\ldots,n, \quad t \in [0,T], \tag{20}$$

де $\sigma_k = (1+|k|)^{\omega+\gamma_0 n(n+1)/2}\exp((\delta+M_1(\theta(\vec{t})-t_n)+\widetilde{M}_1(T+t_n))|k|^{\gamma_0})$, $k\in\mathbb{Z}^p$. З оцінок (13), (17) випливає, що $\sigma_k\ge 1/C_3$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$. Тоді для функції, зображеної рядом (8), з оцінки (20) дістаємо

$$\|u^0;W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\|\le C_7\left(\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}\overline{F}^2_k\sigma^2_k\eta^2_k}+\max_{t\in[0,T]}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}|F_k(t)|^2\eta^2_k}\right)\le C_8\|F;W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}\|<\infty, \quad (21)$$

де $\eta_k=(1+|k|)^{\alpha}\exp(\beta|k|^{\gamma_0})$, $k\in\mathbb{Z}^p$. Теорему доведено.

Зауваження 1. Нехай виконуються умови теореми 2 і нехай показники гладкості α_0,β_0 функції F є такими, що або $\beta_0>\delta+M_1(\theta(\vec{t})-t_n)+\widetilde{M}_1(T+t_n)$, або $\beta_0=\delta+M_1(\theta(\vec{t})-t_n)+\widetilde{M}_1(T+t_n)$ і $\alpha_0>p+N+\omega+\gamma_0 n(n+1)/2$, де $N=\max\limits_{0\le j\le n-1}\{N_j\}$. Тоді з теореми 2 та вкладення просторів

$$W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\subset C^{n,N}(\overline{Q^T_p}),\ \alpha\in\mathbb{R},\ \beta>0,\quad W^{n,\gamma_0}_{\alpha,0}\subset C^{n,N}(\overline{Q^T_p}),\ \alpha>p+N,$$

випливає, що незбурена задача (1), (2) має єдиний класичний розв'язок. Зауважимо, що теорема 2 уточнює теорему 2 із [19].

5. Розглянемо тепер випадок збуреної задачі (1), (2), припускаючи, що виконуються умови теореми 2. Позначимо через $\mathcal{M}^{0,\gamma_0}_{\alpha-N,\beta}$ такий підпростір простору $W^{0,\gamma_0}_{\alpha-N,\beta}$, що для кожної функції $v\in\mathcal{M}^{0,\gamma_0}_{\alpha-N,\beta}$ існує єдина функція $u\in W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}$ така, що

$$L(\partial/\partial t,D)u=v,\quad u(t_j,x)=0,\quad j=1,\dots,n;$$

на просторі $\mathcal{M}^{0,\gamma_0}_{\alpha-N,\beta}$ визначимо лінійний оператор $R:\mathcal{M}^{0,\gamma_0}_{\alpha-N,\beta}\to W^{0,\gamma_0}_{\alpha,\beta}$, покладаючи $Rv=u$. З доведення теореми 2 випливає, що $W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}\subset\mathcal{M}^{0,\gamma_0}_{\alpha-N,\beta}$, де α,β — числа з формули (14). Оператор R неперервно відображає простір $W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}$ у простір $W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}$, при цьому для всіх $F\in W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}$ виконується нерівність $\|RF;W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\|\le C_8\|F;W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}\|$, де C_8 — стала з формули (21).

Теорема 3. *Нехай виконується умова* (6) *та існують сталі* $\omega,\delta\in\mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність* (13). *Якщо* $F\in W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}$, $\mathcal{B}\in\mathcal{L}_{b_1,b_2}\left(S(RF,r);W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}\right)$, *виконуються співвідношення* (14) *та нерівності*

$$b_1C_8(r+C_8\|F;W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}\|)\le r,\quad b_2C_8<1, \quad (22)$$

то збурена задача (1), (2) *має єдиний розв'язок в кулі* $S(RF,r)$.

Доведення. Розглянемо оператор $\mathcal{A}:S(RF,r)\to W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}$ такий, що

$$\mathcal{A}u:=RF+R\mathcal{B}u. \quad (23)$$

За умов теореми задача (1), (2) еквівалентна операторному рівнянню

$$u=\mathcal{A}u. \quad (24)$$

Оскільки $\mathcal{B}\in\mathcal{L}_{b_1,b_2}\left(S(RF,r);W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}\right)$, то правильними є наступні співвідношення:

$$\begin{aligned}\forall u\in S(RF,r)\quad &\|\mathcal{A}u-RF;W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\|=\|R\mathcal{B}u;W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\|\le b_1C_8\|u;W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\|\le\\ &\le b_1C_8(\|u-RF;W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\|+\|RF;W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\|)\le b_1C_8(r+C_8\|F;W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}\|)\le r,\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}&\forall u_1, u_2 \in S(RF, r) \quad \|\mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2; W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\| = \|R\mathcal{B}u_1 - R\mathcal{B}u_2; W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\| = \\ &= \|R(\mathcal{B}u_1 - \mathcal{B}u_2); W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\| \le C_8\|\mathcal{B}u_1 - \mathcal{B}u_2; W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\| \le b_2 C_8 \|u_1 - u_2; W^{n,\gamma_0}_{\alpha,\beta}\|.\end{aligned} \tag{26}$$

З нерівностей (22), (25), (26) випливає, що оператор $\mathcal{A}$ є стискуючим відображенням кулі $S(RF, r)$ в себе. Згідно з принципом нерухомої точки [15, с. 609–612] рівняння (24), а отже, й задача (1), (2), має в кулі $S(RF, r)$ єдиний розв'язок.

6. Для з'ясування питання про можливість виконання нерівності (13) нам знадобляться деякі допоміжні твердження.

Лема 1. [22] *Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — така дійснозначна функція, що $f \in C^n[a, b]$ і для всіх $t \in [a, b]$ виконується нерівність $|f^{(n)}(t)| > \delta$, $\delta > 0$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$*

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}\{t \in [a, b] : |f(t)| \le \varepsilon\} \le 2n(n!\varepsilon/\delta)^{1/n}.$$

Наступні леми 2, 3 будуть стосуватися квазімногочленів $Q(t)$ вигляду

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{m} p_j(t) \exp(\mu_j t), \tag{27}$$

де $\mu_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$, $\mu_j \ne \mu_r$, $j \ne r$, а $p_j \in \mathbb{C}_{n_j-1}[t]$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, m$. Для квазімногочлена (27) будемо позначати: $l_Q = n_1 + \ldots + n_m$, $B_Q = 1 + \max\limits_{1\le j\le m}\{|\mu_j|\}$.

Лема 2. *Кількість нулів квазімногочлена (27), які потрапляють на відрізок $[a, b]$, не перевищує $C_9(b - a)B_Q$, де стала $C_9 > 0$ залежить тільки від l_Q. Якщо $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, то кількість дійсних нулів квазімногочлена (27) не перевищує $(l_Q - 1)$.*

Доведення першого твердження леми випливає з теореми Валле Пуссена [17, с. 29]; друге ж твердження — добре відомий факт (див. задачу 75 у [16, с. 58]).

Лема 3. *Нехай для деяких комплексних чисел a_j, $j = 1, \ldots, n$, виконується умова*

$$\forall\, t \in [a, b] \qquad |Q^{(n)}(t) + a_1 Q^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n Q(t)| \ge \delta > 0.$$

Тоді для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$, $\varepsilon_3 = \frac{\delta}{2(n+1)A^n}$, $A \equiv 1 + \max\limits_{1\le j\le n} |a_j|^{1/j}$, виконується нерівність

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}\{t \in [a, b] : |Q(t)| \le \varepsilon\} \le C_{10}\, B_Q(\varepsilon/\delta)^{1/n}, \quad C_{10} = C_{10}(n, l_Q, b - a) > 0,$$

а якщо $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, то для довільного $\varepsilon \in (0, 2\varepsilon_3)$ виконується нерівність

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}\{t \in [a, b] : |Q(t)| \le \varepsilon\} \le C_{11}\, (\varepsilon/\delta)^{1/n}, \quad C_{11} = C_{11}(n, l_Q) > 0.$$

Доведення. Розглянемо функції

$$y_j(t) = A^{n-j}\mathrm{Re}\; Q^{(j)}(t),\ j = 0, 1, \ldots, n, \quad y_{n+1+j}(t) = A^{n-j}\mathrm{Im}\; Q^{(j)}(t), \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

та функції $z^+_{jq}(t) = y_j(t) + y_q(t)$, $z^-_{jq}(t) = y_j(t) - y_q(t)$, $0 \le j < q \le 2n + 1$. Зрозуміло, що функції $z^+_{jq}(t)$, $z^-_{jq}(t)$, $0 \le j < q \le 2n + 1$, є квазімногочленами, модулі показників експонент яких не перевищують B_Q. Згідно з лемою 2, кількість нулів кожної з функцій $z_{jq}^{+}(t)$, $z_{jq}^{-}(t)$ (якщо вона відмінна від тотожного нуля) на відрізку $[0,T]$ не перевищує $C_{12}B_Q$, $C_{12} = C_{12}(n,T)$. Нехай $J = \{\, J_r : r = 1,\dots,M \,\}$ — розбиття відрізка $[0,T]$ на відрізки $J_r = [\xi_{r-1}, \xi_r]$, утворене точками 0, T та всіма нулями всіх нетривіальних функцій $z_{jq}^{+}(t)$, $z_{jq}^{-}(t)$ $(0 \le j < q \le 2n+1)$. Очевидно, що для кількості M відрізків розбиття J виконується нерівність $M \le C_{13}B_Q$, де $C_{13} = C_{13}(n,T)$.

Згідно з побудовою розбиття J, кожна з функцій $z_{jq}^{+}(t)$, $z_{jq}^{-}(t)$, $0 \le j < q \le 2n+1$, на кожному з відрізків J_r цього розбиття не може набувати значень різних знаків. Тому на кожному з відрізків J_r для довільних j,q виконується нерівність $|y_j(t)| \ge |y_q(t)|$, $t \in J_r$, або ж нерівність $|y_q(t)| \ge |y_j(t)|$, $t \in J_r$. Звідси отримуємо, що для кожного r, $1 \le r \le M$, знайдеться таке $q(r)$, $0 \le q(r) \le 2n+1$, що в кожній точці $t \in J_r$ справджується рівність

$$|y_{q(r)}(t)| = \max_{0 \le j \le 2n+1} |y_j(t)|. \tag{28}$$

Оскільки, згідно з умовою леми, в кожній точці $t \in [a,b]$ виконується нерівність

$$\max_{0 \le j \le 2n+1} \{|y_j(t)|\} \ge \delta/(2(n+1)), \tag{29}$$

то з (28), (29) випливає, що в кожній точці $t \in J_r$ виконується нерівність

$$A^{n-q(r)}\,|\mathrm{Re}\; Q^{(q(r))}(t)| \ge \delta/(2(n+1)) \tag{30}$$

або нерівність

$$A^{n-q(r)}\,|\mathrm{Im}\; Q^{(q(r))}(t)| \ge \delta/(2(n+1)). \tag{31}$$

З нерівностей (30)–(31) випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_3$ відрізок J_r не містить точок множини $\{t \in [a,b] : |Q(t)| \le \varepsilon\}$, якщо $q(r) = 0$. Якщо ж $q(r) \ne 0$ і виконується нерівність (30), то за лемою 1

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\{t \in J_r : |\mathrm{Re}\; Q(t)| \le \varepsilon\} \le C_{14}\,\left(\varepsilon/(\delta A^{n-q(r)})\right)^{1/q(r)} \le C_{14}\,(\varepsilon/\delta)^{1/n}.$$

Аналогічно, якщо $q(r) \ne 0$ і виконується нерівність (31), то за лемою 1

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\{t \in J_r : |\mathrm{Im}\; Q(t)| \le \varepsilon\} \le C_{14}\,\left(\varepsilon/(\delta A^{n-q(r)})\right)^{1/q(r)} \le C_{14}\,(\varepsilon/\delta)^{1/n}.$$

Для завершення доведення леми залишається врахувати очевидні включення

$$\{t \in J_r : |Q(t)| \le \varepsilon\} \subset \{t \in J_r : |\mathrm{Re}\; Q(t)| \le \varepsilon\},$$

$$\{t \in J_r : |Q(t)| \le \varepsilon\} \subset \{t \in J_r : |\mathrm{Im}\; Q(t)| \le \varepsilon\},$$

і те, що кількість проміжків розбиття J не перевищує $C_{13}B_Q$.

Друге твердження леми доводиться аналогічно; при цьому слід врахувати, що згідно з другим твердженням леми 2, розбиття J можна вибрати таким, що кількість M відрізків цього розбиття не перевищує сталої, яка залежить тільки від n, l_Q.

7. Дослідимо питання про можливість виконання нерівності (13).

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$ нерівність* (13) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\omega > (p+\gamma_0)n(n-1)/2$, $\delta = M_2(t_1 + \ldots + t_n)$.*

Доведення. Щоб уникнути громіздких викладок, доведення проведемо для випадку, коли всі корені рівняння (12) є простими. Через $A(k)$ позначимо множину тих векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$, для яких нерівність

$$|\Delta(k,\vec{t})| < (1+|k|)^{-\omega} \exp(-M_2(t_1 + \ldots + t_n)|k|^{\gamma_0}) \tag{32}$$

виконується при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$. З огляду на лему Бореля–Кантеллі [17, с. 13], для доведення теореми досить встановити, що при $\omega > (p+\gamma_0)n(n-1)/2$ ряд

$$\sum_{|k|\geq 0} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} A(k) \tag{33}$$

є збіжним. Легко перевірити, що $\Delta(k,\vec{t}) = \Lambda^{-1}(k) \det \| \exp(\lambda_q(k)t_j)\|_{j,q=1}^n$, $k \in \mathbb{Z}^p$, де $\Lambda(k) = \prod\limits_{n\geq j>q\geq 1} (\lambda_j(k) - \lambda_q(k))$. Тому (33) збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{|k|\geq 0} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B(k), \tag{34}$$

де $B(k) = \{\vec{t} \in [0,T]^n : |\Gamma(k,\vec{t})| < (1+|k|)^{-\omega}|\Lambda(k)|\}$, $\Gamma(k,\vec{t}) = \det \| \exp((\lambda_q(k) + M_2|k|^{\gamma_0})t_j)\|_{j,q=1}^n$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Встановимо збіжність ряду (34). Для цього зауважимо, що

$$B(k) \subset \bigcup_{q=2}^{n} B_q(k), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{35}$$

де вжито такі позначення:

$$B_q(k) = \{\vec{t} \in [0,T]^n : |\Gamma_q(k,\vec{\tau}_q)| < \nu_q(k), |\Gamma_{q-1}(k,\vec{\tau}_{q-1})| \geq \nu_{q-1}(k)\}, \quad q = 2,\ldots,n,$$

$$\vec{\tau}_q = (t_1,\ldots,t_q), \quad \Gamma_q(k,\vec{\tau}_q) = \det \| \exp((\lambda_s(k) + M_2|k|^{\gamma_0})t_j)\|_{j,s=1}^q, \quad q = 1,\ldots,n,$$

$$\nu_q(k) = \frac{\prod_{j=1}^q |\Lambda_j(k)|}{(1+|k|)^{(p+\gamma_0)q(q-1)/2+\varepsilon(2q-1)/(2n-1)}}, \quad \varepsilon = \omega - (p+\gamma_0)C_n^2, \quad q = 1,\ldots,n,$$

$$\Lambda_q(k) = (\lambda_q(k) - \lambda_1(k)) \ldots (\lambda_q(k) - \lambda_{q-1}(k)), \quad q = 2,\ldots,n, \quad \Lambda_1(k) \equiv 1.$$

Із включення (35) випливає, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B(k) \leq \sum_{q=2}^{n} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B_q(k), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{36}$$

Згідно з теоремою Фубіні

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B_q(k) = \int_{[0,T]^{n-1}} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} B_q(k,\vec{t}_q) dt_1 \ldots dt_{q-1} dt_{q+1} \ldots dt_n, \quad q = 2,\ldots,n, \tag{37}$$

де $\vec{t}_q = (t_1,\ldots,t_{q-1},t_{q+1},\ldots,t_n)$, $B_q(k,\vec{t}_q) = \{t_q \in [0,T] : (t_1,\ldots,t_{q-1},t_q,t_{q+1},\ldots,t_n) \in B_q(k)\}$, $q = 2,\ldots,n$.

Для оцінки зверху мір множин $B_q(k,\vec{t}_q)$, $q = 2,\ldots,n$, $k \in \mathbb{Z}^p$, застосуємо лему 3. Для цього зауважимо, що функція $\Gamma_q(k,\vec{\tau}_q)$ як функція змінної t_q (при фіксованих

$t_1,\dots,t_{q-1})$ є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $C_{15}(1+|k|^{\gamma_0})$. Крім того, з розвинення визначника $\Gamma_q(k,\vec{\tau}_q)$, $q=2,\dots,n$, за елементами останнього рядка випливають такі рівності:

$$P_{q-1}\left(\partial/\partial t_q,k\right)\Gamma_q(k,\vec{\tau}_q)=\exp((\lambda_q(k)+M_2|k|^{\gamma_0})t_q)\Lambda_q(k)\Gamma_{q-1}(k,\vec{\tau}_{q-1}),\ q=2,\dots,n, \quad (38)$$

де $P_{q-1}(\mu,k)=(\mu-\lambda_1(k)-M_2|k|^{\gamma_0})\dots(\mu-\lambda_{q-1}(k)-M_2|k|^{\gamma_0})$, $q=2,\dots,n$. Якщо $\vec{t}\in B_q(k)$, $q=2,\dots,n$, то з формул (38) та означення множин $B_q(k)$, $q=2,\dots,n$, випливає, що

$$\forall t_q\in[0,T]\quad |P_{q-1}\left(\partial/\partial t_q,k\right)\Gamma_q(k,\vec{\tau}_q)|\geq C_{16}\nu_1(k)\nu_{q-1}(k)|\Lambda_q(k)|,\quad q=2,\dots,n, \quad (39)$$

де стала C_{16} не залежить від k. Оскільки $\deg_\mu P_{q-1}(\mu,k)=q-1$, а модуль коефіцієнта при похідній $(\partial/\partial t_q)^{q-1-j}$ у виразі $P_{q-1}(\partial/\partial t_q,k)$ не перевищує $C_{17}(1+|k|)^{\gamma_0 j}$, $j=0,1,\dots,q-1$, то з оцінок (39) та леми 3 отримуємо

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}B_q(k,\vec{t}_q)\leq C_{18}(1+|k|)^{\gamma_0}\left(\frac{\nu_q(k)}{\nu_1(k)\nu_{q-1}(k)|\Lambda_q(k)|}\right)^{1/(q-1)}\leq C_{19}(1+|k|)^{-p-\widetilde{\varepsilon}_q}, \quad (40)$$

де $q=2,\dots,n$, $\widetilde{\varepsilon}_q=\varepsilon/((2q-1)(2n-1))>0$, а стала $C_{19}>0$ не залежить від вибору значень $t_1,\dots,t_{q-1},t_{q+1},\dots,t_n\in[0,T]$. Тоді з формул (37), (40) дістаємо, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n}B_q(k)\leq C_{19}T^{n-1}(1+|k|)^{-p-\widetilde{\varepsilon}_q},\quad q=2,\dots,n,\quad k\in\mathbb{Z}^p. \quad (41)$$

З нерівностей (36), (41) випливає збіжність ряду (34).

У випадку, коли корені рівняння (12) є кратними, для доведення теореми слід використати процедуру граничного переходу [27, с. 223–226]. Теорему доведено.

Теорема 5. *Якщо корені рівняння* (12) *є дійсними, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t}\in[0,T]^n$ нерівність* (13) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при $\omega>pn(n-1)/2$, $\delta=M_2(t_1+\ldots+t_n)$.*

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4 з використанням другого твердження леми 3.

Зауваження 2. Результати теорем 4, 5 є точнішими, ніж результати роботи [19], де встановлено, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t}\in[0,T]^n$ нерівність (13) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при $\omega>(p+\gamma_0)n(n-1)/2$, $\delta=nM_3T$, $M_3=\max\{0,M_2\}$.

8. У деяких випадках можна встановити виконання нерівності (13) для всіх векторів $\vec{t}\in[0,T]^n$ таких, що $t_1<\ldots<t_n$.

Теорема 6. *Нехай у рівнянні* (1) $L\left(\partial/\partial t,D\right)=\prod_{j=1}^{n}\left(\partial/\partial t-\mu_jB(D)\right)$, *де $\mu_j\in\mathbb{R}$, $j=1,\dots,n$, $\mu_1<\ldots<\mu_n$, а диференціальний вираз $B(D)$ є таким, що*

$$\forall k\in\mathbb{Z}^p\quad b_1(1+|k|^{\gamma_0})\leq B(k)\leq b_2(1+|k|^{\gamma_0}),\quad b_1,b_2>0.$$

Тоді для довільного $\vec{t}\in[0,T]^n$, $t_1<\ldots<t_n$, нерівність (13) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) $k\in\mathbb{Z}^p$ при $\omega>\gamma_0C_n^2$, $\delta=-b_1\sum\limits_{j:\mu_j>0}\mu_jt_j-b_2\sum\limits_{j:\mu_j<0}\mu_jt_j$.*

Доведення. Використаємо таку властивість дійсних чисел, доведення якої можна знайти в [11]: якщо дійсні числа $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ є такими, що $x_1<\ldots<x_n$, $y_1<$

$\ldots < y_n$, то для довільної перестановки $(i_1, \ldots, i_n) \in S_n$, $(i_1, \ldots, i_n) \neq (1, \ldots, n)$ (тут S_n — симетрична група всіх перестановок елементів множини $\{1, \ldots, n\}$) виконується нерівність

$$x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n > x_{i_1} y_1 + \ldots + x_{i_n} y_n.$$

Згідно з наведеною властивістю та умовою теореми, для всіх перестановок $(i_1, \ldots, i_n) \in S_n$, $(i_1, \ldots, i_n) \neq (1, \ldots, n)$, нерівність

$$\exp((\mu_1 t_1 + \ldots + \mu_n t_n) B(k)) > 2(n! - 1) \exp((\mu_{i_1} t_1 + \ldots + \mu_{i_n} t_n) B(k)) \tag{42}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Нехай $\Delta_1(k) = \det \| \exp(\mu_q B(k) t_j) \|_{j,q=1}^n$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Оскільки

$$\Delta_1(k) = \sum_{\omega = (i_1, \ldots, i_n) \in S_n} (-1)^{\operatorname{inv} \omega} \exp((\mu_{i_1} t_1 + \ldots + \mu_{i_n} t_n) B(k)),$$

де $\operatorname{inv} \omega$ — кількість інверсій у перестановці ω, то з нерівності (42) дістанемо, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\Delta_1(k)| \geq \tfrac{1}{2} \exp\left(\sum_{j=1}^n \mu_j t_j B(k) \right) \geq C_{20} \exp\left(b_1 \sum_{j: \mu_j > 0} \mu_j t_j |k|^{\gamma_0} + b_2 \sum_{j: \mu_j < 0} \mu_j t_j |k|^{\gamma_0} \right), \tag{43}$$

де стала $C_{20} > 0$ не залежить від k. Враховуючи, що

$$\Delta(k) = \Delta_1(k) B^{-n(n-1)/2}(k) \prod_{n \geq j > q \geq 1} (\mu_j - \mu_q)^{-1},$$

з нерівності (43) дістаємо твердження теореми.

9. З теорем 3–5 отримуємо наступні результати стосовно розв'язності задачі (1), (2).

Теорема 7. *Нехай* $F \in W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_{b_1,b_2}\left(S(RF, r); W^{0,\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0}\right)$, *виконуються співвідношення*

$$\alpha = \alpha_0 - (p + \gamma_0) n(n-1)/2 - \gamma_0 n(n+1)/2 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\beta = \beta_0 - M_2 \theta(\vec{t}) - M_1(\theta(\vec{t}) - t_n) - \widetilde{M}_1(T + t_n),$$

та нерівності (22). *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t} \in [0, T]^n$ *задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок в кулі* $S(RF, r)$.

У випадку, коли корені рівняння (12) є дійсними, теорема 7 зберігає силу, якщо $\alpha = \alpha_0 - pn(n-1)/2 - \gamma_0 n(n+1)/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

1. *Абдо С.А., Юрчук Н.И.* Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. I. Априорные оценки // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 3. – С. 417–425.
2. *Абдо С.А., Юрчук Н.И.* Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. II. Разрешимость и свойства решений // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 5. – С. 806–815.
3. *Бернік В.І., Василишин П.Б., Пташник Б.Й.* Багатоточкова задача для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Вісник Нац. ун-ту „Львівська політехніка". – Серія Прикладна математика. – 2000, № 411.– С. 11–17.

4. *Борок В.М., Перельман М.А.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29–34.
5. *Валицкий Ю.Н.* Четырехточечная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Функцион. анализ, 1981. – **15**, вып. 4. – С. 69–70.
6. *Валицкий Ю.Н.* О корректности многоточечной задачи для дифференциального уравнения с операторными коэффициентами // ДАН СССР. – 1986. – **286**, № 5.– С. 1041–1043.
7. *Валицкий Ю.Н.* Корректность многоточечной задачи для уравнения с операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 1988. – **29**, № 4.– С. 44–53.
8. *Валицкий Ю.Н.* К вопросу об условной корректности многоточечной задачи // Сиб. мат. журн. – 1989. – **30**, № 4.– С. 251–258.
9. *Валицкий Ю.Н.* Корректность задачи при заданных значениях функции и ее производных в нескольких точках // Сиб. мат. журн. – 1996. – **37**, № 2.– С. 251–258.
10. *Василишин П.Б., Клюс І.С., Пташник Б.Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11.– С. 1468–1476.
11. *Вишенський В.А., Ганюшкін О.Г., Карташов М.В., Михайловський В.І., Призва Г.Й., Ядренко М.Й.* Українські математичні олімпіади. Довідник. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с.
12. *Гадецкая С.В.* Корректные многоточечные задачи в полосе для дифференциальных уравнений с нагрузками // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 3. – С. 79–82.
13. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наук. думка, 1993. – 232 с.
14. *Каленюк П.І., Нитребич З.М.* Побудова розв'язку задачі типу Валле Пуссена для полілінійного диференціального рівняння з частинними похідними // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1996.– № 42.– С. 44–45.
15. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
16. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.
17. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
18. *Пташник Б.Й., Силюга Л.П.* Багатоточкова задача для безтипних факторизованих диференціальних операторів // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 1. – С. 66–79.
19. *Пташник Б.Й., Симотюк М.М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241–254.
20. *Пташник Б.Й., Штабалюк П.І.* Багатоточкова задача у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – **35**. – С. 210–215.
21. *Сайдаматов Э.М.* О корректности неоднородных граничных задач для псевдодифференциальных уравнений // Узб. мат. журн. – 1995. – № 2. – С. 77–88.
22. *Симотюк М.М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999.– **42**, № 4.– С. 90–95.
23. *Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С.* Збірник задач з вищої алгебри. – К.: Вища школа, 1971. – 316 с.
24. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4-х т. – М.: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.
25. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.
26. *Цывис Н.В., Юрчук Н.И.* Трехточечная задача для дифференциально-операторных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 5. – С. 877–881.
27. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

Інститут прикл. проблем механіки
і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б
79000, м.Львів
`ptashnyk@lms.lviv.ua`

Отримано 21.02.2005