Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 4, 532 – 547

Теорія операторів та інволютивні зображення алгебр

М. В. Заводовський, Ю. С. Самойленко

(*Представлена І. В. Скрипніком*)

Анотація. Огляд результатів, отриманих у відділі функціонального аналізу Інституту математики НАНУ, з алгебр, породжених лінійно зв'язаними твірними із заданим спектром, їх $*$-зображень та застосувань.

2000 MSC. 47L80, 46H99.

Ключові слова та фрази. Алгебра, граф Динкіна, зображення, ортопроектор, спектральна теорема.

Вступ

1. Класична теорема лінійної алгебри про зведення комплексної ермітової матриці до діагонального вигляду з дійсними числами на діагоналі, її узагальнення на обмежені і необмежені самоспряжені оператори в комплексному гільбертовому просторі, теореми про розклад за узагальненими власними векторами (див., наприклад, [1] і бібл.), назавжди ввійшли до золотого фонду математики. Схема застосування спектральних теорем: від операторного формулювання задачі і дослідження спектральних властивостей оператора до самої задачі.

$*$-Зображення — інволютивні зображення асоціативних алгебр. Опис того чи іншого класу найпростіших (незвідних) $*$-зображень і відповідні спектральні теореми, які описують зображення як суми чи інтеграли найпростіших, також посідають важливе місце в арсеналі методів дослідження математичних і природничих задач. Схема застосування теорії зображень добре відпрацьована на симетрійних методах природознавства: пов'язати з операторним формулюванням задачі відповідну алгебру, дослідити її та її зображення і застосувати відповідні спектральні теореми (див., наприклад, [2] і бібл.). Ряд

Стаття надійшла в редакцію 17.05.2004

робіт, зокрема, українських математиків, присвячено вивченню різноманітних задач теорії операторів за допомогою дослідження структури відповідної алгебри та її інволютивних зображень.

2. Метою цієї роботи є огляд результатів з алгебр, породжених лінійно зв'язаними твірними із заданим спектром, їх $*$-зображень та застосувань.

Нехай $\{A_k\}_{k=1}^n$ сім'я операторів в сепарабельному гільбертовому просторі H ($\dim H \leq \infty$), така, що $\sum_{k=1}^n A_k = \alpha I_H$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, I_H-одиничний оператор в H) і спектр кожного оператора A_k є фіксована множина $M_k \subset \mathbb{R}$. Такі оператори відіграють важливу роль в математичному аналізі, алгебраїчній геометрії, теорії операторів та математичній фізиці (див., наприклад, [3]–[6]).

В §1 цієї статті ми, згідно з [7]–[9], вивчаємо базиси, ріст, поліноміальні тотожності тощо відповідних алгебр. Зокрема, такі алгебри скінченновимірні тоді і тільки тоді, коли відповідні графи є графи Динкіна, нескінченновимірні степеневого росту тоді і тільки тоді, коли вони є розширеними графами Динкіна, в усіх інших випадках алгебри мають експоненціальний зріст.

В §2, слідуючи [10]–[22] та ін., ми досліджуємо $*$-зображення деяких таких алгебр.

У цілому ряді робіт від [23] до [24] вивчалися суми деякої нефіксованої кількості ортопроекторів, їх спектр, спектральні кратності тощо.

В §3, спираючись на роботи [11], [25]–[28], за допомогою $*$-зображень, ми досліджуємо відому нерозв'язану задачу теорії операторів про можливий спектр і спектральні кратності сум ортопроекторів $P_1, \ldots, P_n$ ($n \geq 3$ фіксоване). Можна скористуватися тим, що ця проблема є частковим випадком відомої проблеми про характеризацію спектру і спектральних кратностей суми операторів A_k ($k = 1, \ldots, n$), які мають відомий спектр та спектральні кратності. Нещодавній розв'язок [4] проблеми Хорна (див. огляд [6]) дозволяє побудувати алгоритмічний розв'язок проблеми опису спектру і спектральних кратностей суми ортопроекторів. Але що ж можна сказати про точні теореми?

В п. 3.1 при $n = 2$ ми наводимо розв'язок цієї задачі. Він відноситься до математичного фольклору: відома спектральна теорема для двох ортопроекторів (див., наприклад, [29], [30], [10] та ін.) дозволяє навести умови на спектр оператора $A = A^*$ і його спектральні кратності, необхідні і достатні для того, щоб A був сумою двох ортопроекторів.

При $n \geq 3$ довести спектральну теорему для n ортопроекторів надзвичайно складно (див. [31], [10], де доведено, що ця задача є

$*$-дикою).

В п.3.2 ми, слідуючи [11], [26], описуємо $\alpha \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$, такі, що оператор αI_m ($\alpha \in \mathbb{R}$, I_H-одиничний оператор в H, $m = \dim H = 1, 2, \ldots, \infty$) є сумою n ортопроекторів. Опис $*$-зображень алгебри

$$\mathcal{P}_{n,\alpha} = \Big\langle p_1, \ldots, p_n | p_k^2 = p_k^* = p_k,\ k = 1, \ldots, n, \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = \alpha e \Big\rangle,$$
$$\alpha \in \mathbb{R},\ n \geq 5$$

також може бути $*$-дикою задачею (наприклад, $\mathcal{P}_{5,2}$ $*$-дика алгебра [10]). Проте точний опис множини $\Sigma_n = \{\alpha \in \mathbb{R} | *-\mathrm{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha} \neq \emptyset\}$ в [11] і одержані там результати про структуру $*$-зображень $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ ($\alpha \in \Sigma_n$) дозволяють, слідуючи [26], навести необхідні і достатні умови того, що оператор αI_m є сумою n ортопроекторів.

В п. 3.3, слідуючи [27], [28], досліджується випадок, коли оператор з двома точками спектру є сумою n ортопроекторів.

1. Алгебри, породжені лінійно зв'язаними твірними із заданим спектром

1.1. Алгебри $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$. Зріст алгебр

Слідуючи [7]–[9], ми вивчаємо алгебри

$$\mathcal{P}_{n,\alpha} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, \ldots, p_n |\ p_k^2 = p_k,\ k = 1, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = \alpha e \Big\rangle, \text{ де } \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\mathcal{P}_{n,\vec{\alpha}} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, \ldots, p_n |\ p_k^2 = p_k,\ k = 1, \ldots, n,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k = e \Big\rangle,$$

де $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$;

$$\mathcal{P}_{P_1,\ldots,P_n;\gamma} = \mathbb{C}\Big\langle x_1, \ldots, x_n |\ P_k(x_k) = 0,\ k = 1, \ldots, n,\ \sum_{k=1}^{n} x_k = \gamma e \Big\rangle,$$

де P_k ($k = 1, \ldots, n$) поліноми з дійсними простими коренями з множини M_k, $k = 1, \ldots, n$ (завжди будемо вважати, що $M_k \subset \mathbb{R}_+$ і $0 \in M_k$, $k = 1, \ldots, n$) і $\gamma \in \mathbb{R}_+$: базиси цих алгебр, їх зріст, поліноміальні тотожності тощо. Звісно, алгебри $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ і $\mathcal{P}_{n,\vec{\alpha}}$ є частковими випадками алгебр $\mathcal{P}_{P_1,\ldots,P_n;\gamma}$.

З будь-якою алгеброю $\mathcal{P}_{P_1,\ldots,P_n;\gamma}$ ми зв'язуємо граф $\Gamma = \Gamma(\mathcal{P}_{P_1,\ldots,P_n;\gamma})$, який містить кореневу вершину і n гілок, де i-а гілка містить послідовність з $degP_i$ вершин, починаючи з кореневої. В подальшому такі алгебри будемо позначати $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$, де $\chi = (M_1, \ldots, M_n)$ набір множин коренів поліномів $P_1, \dots, P_n$. З алгеброю $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$ далі пов'яжемо граф Γ, такий, що біля кореневої вершини написано число γ, а на k-й гілці ($k = 1, \dots, n$) розташовані додатні корені з M_k (для визначеності в порядку зростання до кореня).

Теорема 1.1 ([9]).

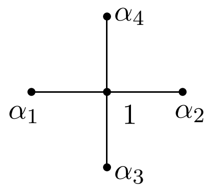
a) *Алгебра $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$ скінченновимірна тоді і тільки тоді, коли граф Γ є один із графів Динкіна A_n, D_n, E_6, E_7 чи E_8. Наведені (див. [9]) точні верхні оцінки на розмірність цих алгебр.*

b) *Алгебра $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$ нескінченновимірна і має поліноміальний зріст тоді і тільки тоді, коли граф Γ є розширеним графом Динкіна $\widetilde{D}_4$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$ чи $\widetilde{E}_8$.*

c) *Якщо граф не є ані графом Динкіна, ані розширеним графом Динкіна, тоді алгебра $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$ містить вільну підалгебру з двома твірними.*

1.2. Поліноміальні тотожності

З нескінченновимірних алгебр $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$ PI-алгебрами (алгебрами з поліноміальними тотожностями) можуть бути тільки алгебри, асоційовані з розширеними графами Динкіна, оскільки PI-алгебри мають поліноміальний зріст. В [7] доведено, що з алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ ($n \geq 4$) тільки алгебра $\mathcal{P}_{4,2}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) є PI-алгеброю (а саме F_4-алгеброю). В [8] доведено, що алгебра $\mathcal{P}_{4,\vec{\alpha}}$ ($\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$)



є PI-алгеброю (F_4-алгеброю) тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=2$.

В [9] наведено достатні умови на χ і γ того, щоб алгебри $\mathcal{P}_{\widetilde{E}_6,\chi,\gamma}$, $\mathcal{P}_{\widetilde{E}_7,\chi,\gamma}$ і $\mathcal{P}_{\widetilde{E}_8,\chi,\gamma}$ були PI-алгебрами. Ці умови є і необхідними (див. [5]).

Результати параграфа частково перетинаються з [5], оскільки алгебри $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$ є (неунітальними) підалгебрами деформованих препроективних алгебр, але методи доведення їх в [7]–[9] незалежні і базуються на явному підрахунку базисів в алгебрах $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$.

2. $*$-Зображення

Всі алгебри далі розглядаються як $*$-алгебри, твірні яких є самоспряженими.

2.1. Суми ортопроекторів

В статті [11] для $n \in \mathbb{N}$ наведено опис множини $\Sigma_n = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid$ існують ортопроектори $P_1, \ldots, P_n \in L(H)$, такі, що $\sum_{k=1}^n P_k = \alpha I_H\}$ (I_H-одиничний оператор в H).

Питання про структуру множини Σ_n можна сформулювати на мові теорії $*$-зображень алгебр. Розглянемо $*$-алгебру $\mathcal{P}_{n,\alpha}$. Тоді Σ_n є множиною тих $\alpha \in \mathbb{R}$, при яких у $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ існує хоч одне $*$-зображення в $L(H)$. Відмітимо, що з розв'язку подібного питання (при яких значеннях параметру $\tau \in \mathbb{R}$ існує хоч одне $*$-зображення алгебри $TL_{\infty,\tau} = \mathbb{C}\langle p_1, \ldots, p_n, \ldots \mid p_k^2 = p_k^* = p_k \ (k \in \mathbb{N}),\ p_k p_i = p_i p_k,\ |i-k| \geq 2,$ $p_k p_{k\pm 1} p_k = \tau p_k\rangle$, $0 < \tau < 1$) бере початок відомий цикл робіт В. Джонса (див. [32]). Задача опису набору проекторів $P_1, \ldots, P_n$, таких, що $\sum_{k=1}^n P_k = \alpha I$, $\alpha \in \Sigma_n$ є задачею опису $*$-зображень алгебри $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ при $\alpha \in \Sigma_n$.

При $n \leq 4$ множина Σ_n злічена (опис Σ_n при $n \leq 4$, відповідних $*$-зображень та бібліографічний коментар див. в [11]). Однак при $n \geq 5$ множина Σ_n містить вже відрізок.

Введемо при $n \geq 4$ дискретні множини

$$\Lambda_n^{(0)} = \{0, 1+\frac{1}{n-1}, 1+\frac{1}{n-2-\frac{1}{n-1}}, \ldots, 1+\frac{1}{n-2-\frac{1}{n-2-\frac{1}{\ddots-\frac{1}{n-1}}}}, \ldots\},$$

$$\Lambda_n^{(1)} = \{1, 1+\frac{1}{n-2}, 1+\frac{1}{n-2-\frac{1}{n-2}}, \ldots, 1+\frac{1}{n-2-\frac{1}{n-2-\frac{1}{\ddots-\frac{1}{n-2}}}}, \ldots\}.$$

Теорема 2.1 ([11]). *Для* $n \geq 4$

$$\Sigma_n = \Lambda_n^{(0)} \cup \Lambda_n^{(1)} \cup \Big[\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}\Big] \cup (n-\Lambda_n^{(0)}) \cup (n-\Lambda_n^{(1)}).$$

Знайти всі точки із Σ_n дозволив підхід, істотним в якому було введення двох функторів Φ^+ і Φ^- на категоріях $Rep\mathcal{P}_{n,\alpha}$ $*$-зображень алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ (див. [13], [11]). Функтори Φ^+ і Φ^- називаються функторами Кокстера, тому що їх структура і роль при опису зображень подібна функторам Кокстера в [33]. Більш того, функтори Кокстера Φ^+ і Φ^- дозволили повністю описати незвідні $*$-зображення алгебри $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, з точністю до унітарної еквівалентності, в точках $\alpha \in \Lambda_n^{(0)} \cup \Lambda_n^{(1)} \cup (n - \Lambda_n^{(0)}) \cup (n - \Lambda_n^{(1)})$ і багато чого сказати про $*$-зображення алгебри $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ при $\alpha \in [\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}]$ (див. [11]).

В подальшому точки із множин $\Lambda_n^{(0)}$, $\Lambda_n^{(1)}$ та $n - \Lambda_n^{(0)}$ $n - \Lambda_n^{(1)}$ ми будемо називати точками дискретного спектру задачі, а точки з $[\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}]$ будемо називати точками неперервного спектру.

2.2. Про $*$-зображення алгебри $\mathcal{P}_{n,\vec{\alpha}}$

Про $*$-зображення алгебр $\mathcal{P}_{n,\vec{\alpha}}$ див. [12], [14], [20].

2.3. Про $*$-зображення алгебри $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$

1. Опис множини χ і $\gamma \in \mathbb{R}$, для яких існують $*$-зображення скінченновимірних алгебр $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$, асоційованих з графами Динкіна A_n $(n \geq 1)$, D_n $(n \geq 4)$, E_6, E_7, E_8, а також опис цих зображень див. в [15], [19].

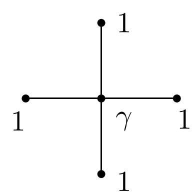
2. Дискретна серія $*$-зображень алгебр $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$, асоційованих з розширеними графами Динкіна, описується за допомогою техніки функторів Кокстера ([11], [13], [14] та ін.). Зауважимо, що функтори Кокстера пов'язані з гомоморфізмами самих алгебр (див. [34]).

В цій роботі ми наведемо опис множини $W_{\Gamma,\chi}$ тих γ, для яких існують $*$-зображення алгебри $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$ для деяких важливих χ на графі Γ.

a) Нехай є алгебра

$$\mathcal{P}_{\widetilde{D}_4,\chi,\gamma} = \mathbb{C}\langle p_1, p_2, p_3, p_4 \mid p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \gamma e,\ p_i^2 = p_i^* = p_i \rangle,$$

асоційована з розширеним графом Динкіна $\widetilde{D}_4$:

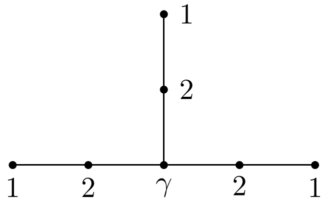


Опис множини $W_{\widetilde{D}_4,\chi}$ дивись в [10]:

$$W_{\widetilde{D}_4,\chi} = \left\{2 \pm \frac{1}{k+s} \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ s \in S\right\} \cup \{2\},$$

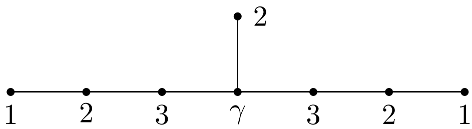
де $S = \{\frac{1}{2},\ 1\}$.

b) Розглянемо алгебру $\mathcal{P}_{\widetilde{E}_6,\chi,\gamma}$, пов'язану з розширеним графом Динкіна $\widetilde{E}_6$ (параметри χ та γ вказані біля вершин графа):



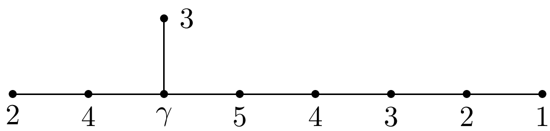
Тоді $W_{\widetilde{E}_6,\chi} = \{3 \pm \frac{1}{k+s} \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \ s \in S\} \cup \{3\}$, де $S = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$ (див. [17]).

c) Розглянемо алгебру $\mathcal{P}_{\widetilde{E}_7,\chi,\gamma}$, пов'язану з розширеним графом Динкіна $\widetilde{E}_7$ з відповідними параметрами χ та γ :



Тоді $W_{\widetilde{E}_7,\chi} = \{4 \pm \frac{1}{k+s} \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \ s \in S\} \cup \{4\}$, де $S = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$ (див. [18]).

d) Розглянемо алгебру $\mathcal{P}_{\widetilde{E}_8,\chi,\gamma}$, пов'язану з розширеним графом Динкіна $\widetilde{E}_8$ з відповідними параметрами χ та γ :

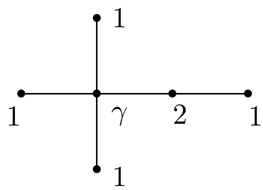


Тоді $W_{\widetilde{E}_8,\chi} = \{6 \pm \frac{1}{k+s} \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \ s \in S\} \cup \{6\}$, де $S = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1\}$ (див. [18]).

Для точок з неперервного спектру $*$-зображення алгебр, асоційованих з $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$, описані для певних поліномів: в [16] для алгебри $\mathcal{P}_{P_1,P_2,P_3;0}$, де $P_1 = P_2 = P_3 = (t-1)t(t+1)$ і $\gamma = 0$ (ця алгебра породжена трьома частковими ізометріями, сума яких дорівнює нулеві, асоційована з розширеним графом Динкіна $\widetilde{E}_6$ і ізоморфна алгебрі $b)$ з $\gamma = 3$); $*$-зображення алгебри $\mathcal{P}_{P_1,P_2,P_3;4}$, де $P_1 = P_2 = t(t-1)(t-2)(t-3)$, $P_3 = t(t-1)$ і $\gamma = 4$ описані в [21] (ця алгебра асоційована з розширеним графом Динкіна $\widetilde{E}_7$ і відповідає випадку $c)$ з $\gamma = 4$), про $*$-зображення алгебри $\mathcal{P}_{\widetilde{E}_8,\chi,6}$, що відповідає випадку $d)$ з $\gamma = 6$ див. в [22].

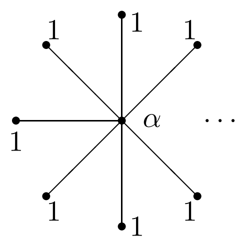
3. Для $*$-зображень алгебр, асоційованих з графами Γ, які не є ані графи Динкіна, ані розширені графи Динкіна, вже існують спектри χ, такі, що множина $W_{\Gamma,\chi}$ містить цілий відрізок. Наведемо лише приклади:

a) Розглянемо алгебру $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$ з графом



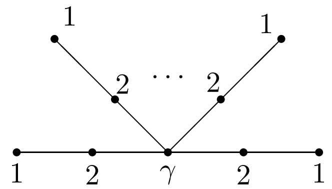
Тоді множина $W_{\Gamma,\chi} = \Lambda_4 \cup [2,3] \cup (5 - \Lambda_4)$, де $\Lambda_4 = \{2 - \frac{1}{k+s} \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ s \in \{\frac{1}{2}, 1\}\}$, (див. [17]).

b) Розглянемо алгебру $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ (число гілок $n \geq 5$):



Тоді $W_{\Gamma,\chi} = \Sigma_n = \Lambda_n^{(0)} \cup \Lambda_n^{(1)} \cup [\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}] \cup (n - \Lambda_n^{(0)}) \cup (n - \Lambda_n^{(1)})$ (див. теорему 2).

c) Розглянемо алгебру $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$ з графом



з числом гілок $n \geq 4$. Тоді множина $W_{\Gamma,\chi}$ має наступний вигляд (див. [17]):

$$W_{\Gamma,\chi} = ([0,2] \cap \Sigma_n) \cup [2, 2n-2] \cup (2n - ([0,2] \cap \Sigma_n)) =$$
$$= \Lambda_n^{(0)} \cup \Lambda_n^{(1)} \cup \left[n - \frac{n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, n + \frac{n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2}\right] \cup$$
$$\cup (2n - \Lambda_n^{(0)}) \cup (2n - \Lambda_n^{(1)}).$$

3. Коли оператор з даним спектром і спектральними кратностями є сумою n ортопроекторів

3.1. Спектр суми двох ортопроекторів

Нехай в сепарабельному гільбертовому просторі H діють два ортопроектори P_1 та P_2. З цими ортопроекторами природно зв'язати алгебру $\mathbb{C}\langle\ p_1, p_2 \mid p_k^2 = p_k^* = p_k,\ k = 1,2\ \rangle$, породжену двома самоспряженими ідемпотентами. Ця алгебра має лише одновимірні та двовимірні незвідні нееквівалентні $*$-зображення: чотири одновимірних $\pi_{0,0}(p_1) = 0$ і $\pi_{0,0}(p_2) = 0$, $\pi_{0,1}(p_1) = 0$ і $\pi_{0,1}(p_2) = 1$, $\pi_{1,0}(p_1) = 1$ і $\pi_{1,0}(p_2) = 0$, $\pi_{1,1}(p_1) = 1$ і $\pi_{1,1}(p_2) = 1$, та неперервну сім'ю двовимірних $\pi_\tau(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\pi_\tau(p_2) = \begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau(1-\tau)} \\ \sqrt{\tau(1-\tau)} & 1-\tau \end{pmatrix}$ $(0 < \tau < 1)$.

Для двох ортопроекторів має місце (див. [29], [30], [10] та ін.) відповідна спектральна теорема, наведемо її формулювання у вигляді операторів множення (див. [25]): *Нехай H-сепарабельний гільбертів простір і $P_1,\ P_2 \in L(H)$ ортопроектори. Тоді існує єдиний, з точністю до еквівалентності мір μ_k, розклад H в пряму суму інваріантних відносно P_1 та P_2 підпросторів*

$$H = H_{0,0} \oplus H_{0,1} \oplus H_{1,0} \oplus H_{1,1} \oplus_{k=1}^{\infty} (\mathbb{C}^2 \otimes L_2((0,1), d\mu_k)),$$

де $\mu_k \succeq \mu_{k+1}\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, *такий, що*

$$P_1 = P_{1,0} + P_{1,1} + \sum_{k=1}^{\infty}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_k),$$

$$P_2 = P_{0,1} + P_{1,1} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau(1-\tau)} \\ \sqrt{\tau(1-\tau)} & 1-\tau \end{pmatrix} \otimes I_k\right).$$

Застосування спектральної теореми дозволяє знайти необхідні та достатні умови на спектр самоспряженого оператора A і його спектральні кратності для того, щоб він був сумою двох ортопроекторів.

Теорема 3.1. *Самоспряжений оператор* A*, який діє в сепарабельному гільбертовому просторі* H*, є сумою двох ортопроекторів* $A = P_1 + P_2$ *тоді і тільки тоді, коли спектр* $\sigma(A) \subseteq [0,2]$ *і його функція кратності інваріантна на* $(0,2)$ *відносно перетворення* $\varphi : 1 + x \to 1 - x$.

Доведення. Нехай $A = P_1 + P_2$, тоді його спектр $\sigma(A) \subseteq [0,2]$. Оскільки (узагальнені) власні підпростори, які відповідають власним значенням оператора A $1+\varepsilon$ та $1-\varepsilon$, де $0 < \varepsilon < 1$, входять одночасно у спектр $\sigma(A)$ і їх розмірності співпадають, то функція кратності є інваріантною відносно перетворення $\varphi : 1 + x \to 1 - x$ на $(0,2)$.

Навпаки, нехай $\sigma(A) \subseteq [0,2]$ і функція кратності інваріантна відносно перетворення $\varphi : 1 + x \to 1 - x$ на $(0,2)$. За спектральною теоремою для $A = A^*$ маємо наступний розклад простору H :

$$H = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus_{k=1}^{\infty} (\mathbb{C}^2 \otimes L_2((0,1), d\mu_k)),$$

де H_0, H_1, H_2 власні підпростори, які відповідають власним значенням 0, 1, 2 оператора A. Тоді покладемо

$$P_1 = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_k\right),$$

$$P_2 = \mathcal{P}_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau(1-\tau)} \\ \sqrt{\tau(1-\tau)} & 1-\tau \end{pmatrix} \otimes I_k\right),$$

де $\mathcal{P}_\lambda$- спектральні проектори оператора A. Тоді

$$P_1 + P_2 = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_k\right) + \mathcal{P}_2 +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau(1-\tau)} \\ \sqrt{\tau(1-\tau)} & 1-\tau \end{pmatrix} \otimes I_k\right) =$$

$$= 0\cdot\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 + 2\mathcal{P}_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\begin{pmatrix} 1+\tau & \sqrt{\tau(1-\tau)} \\ \sqrt{\tau(1-\tau)} & 1-\tau \end{pmatrix} \otimes I_k\right) = A.$$

□

3.2. Коли оператор αI_H ($\alpha \in \mathbb{R}$) є сумою n ортопроекторів

Має місце наступна теорема (див. [26])

Теорема 3.2. 1) *Нехай* $\dim H = m < \infty$ *і* $\alpha = \frac{p}{q}$ *нескоротний дріб. Оператор* αI_H *є сумою* n *ортопроекторів тоді і тільки тоді, коли*

a) $\alpha \in \Sigma_n \cap \mathbb{Q}$,

b) $\dim H = qk$ *(*$k \in \mathbb{N}$*.)*

2) *Нехай* $\dim H = \infty$. *Оператор* αI_H *є сумою* n *ортопроекторів тоді і тільки тоді, коли* $\alpha \in \Sigma_n$.

Доведення. 1) Нехай $\dim H = m < \infty$. Якщо αI_m є сумою n ортопроекторів, то $\alpha \in \Sigma_n$ і $\alpha m = \mathrm{tr}(\alpha I_m)$ ціле число, оскільки $\mathrm{tr} P_1 + \ldots + \mathrm{tr} P_n = \mathrm{rank} P_1 + \ldots + \mathrm{rank} P_n$. Доведемо, що з $\alpha \in \Sigma_n$ $\alpha m \in \mathbb{N}$ випливає, що αI_m є сумою n ортопроекторів.

Припустимо, що $n \leq 3$, тоді теорема очевидна при $\alpha \in \mathbb{N}$. Якщо $\alpha \overline{\in} \mathbb{N}$, тоді $\alpha = \frac{3}{2}$ і $n = 3$, але $\frac{3}{2} I_2$ є сумою трьох ортопроекторів.

Нехай $n \geq 4$. Припустимо, що $\alpha \in \Lambda_n^{(0)} \cup \Lambda_n^{(1)} \cup (n - \Lambda_n^{(0)}) \cup (n - \Lambda_n^{(1)})$, тоді теорема випливає із теореми 4 роботи [11].

Залишається тільки можливість $\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2} \leq \alpha \leq \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}$ і $\alpha m \in \mathbb{N}$. Якщо $n = 4$, то $\alpha = 2$ і теорема очевидна.

Нехай $n \geq 5$, тоді (див. [11]) якщо $1 < \alpha < n-1$, то αI_m є сумою n ортопроекторів тоді і тільки тоді, коли $\Phi^+(\alpha) I_{(n-1-\alpha)m}$ (де $\Phi^+(\alpha) = 1 + \frac{1}{n-\alpha-1}$) є сумою n ортопроекторів.

Доведемо, що αI_m є сумою n ортопроекторів, якщо $2 < \alpha \leq n-2$ і $\alpha m \in \mathbb{N}$.

Нехай $n = 5$, тоді αI_m є сумою п'яти ортопроекторів при $\frac{3}{2} < \alpha \leq 2$ і $\alpha m \in \mathbb{N}$ (див. [11]). З неперервності функції Φ^{-1} випливає, що αI_m є сумою п'яти ортопроекторів, коли $\Phi^{-1}(\frac{3}{2}) = 2 < \alpha \leq \Phi^{-1}(2) = 3$ і $\alpha n \in \mathbb{N}$.

Якщо $k > 5$, $2 < \beta \leq k-2$ і $\beta n \in \mathbb{N}$, то існує невід'ємне ціле число s, таке, що $\beta = \alpha + s$ і $2 < \alpha \leq 3$, але тоді $\beta I_m = P_1 + \ldots + P_5 + s I_m$. Так як $s+5 < s+\alpha+3 = \beta+s \le k+1$, то βI_m є сумою n ортопроекторів. Тобто αI_m є сумою n ортопроекторів, якщо $2 < \alpha \le n-2$ і $\alpha m \in \mathbb{N}$ при $n \ge 5$.

З доведеного факту $2 < \alpha \le n-2 = \Phi^{-1}(2)$ і неперервності функції Φ^{+} випливає, що αI_m $(\alpha m \in \mathbb{N})$ є сумою n ортопроекторів, якщо $\Phi^{+}(2) < \alpha \le 2$, $\Phi^{+2}(2) < \alpha \le \Phi^{+}(2)$, $\Phi^{+3}(2) < \alpha \le \Phi^{+2}(2)$ і т. д. Продовжуючи в протилежному напрямку, отримуємо, що αI_m $(\alpha m \in \mathbb{N})$ є сумою n ортопроекторів, якщо $2 < \alpha \le k-2 = \Phi^{-1}(2)$, $\Phi^{-1}(2) < \alpha \le \Phi^{-2}(2)$, $\Phi^{-2}(2) \le \alpha \le \Phi^{-3}(2)$ і т. д. Так як $\lim_{s\to\infty} \Phi^{+s}(2) = \frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}$, $\lim_{s\to\infty} \Phi^{-s}(2) = \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}$, то оператор αI_m є сумою n ортопроекторів для всіх $\alpha \in [\frac{n-\sqrt{n^2-4n}}{2}, \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2}]$ (якщо $\alpha m \in \mathbb{N}$, то $\alpha \ne \frac{n\pm\sqrt{n^2-4n}}{2}$, так як вони ірраціональні при $k > 4$).

2) Доведення безпосередньо випливає з теореми 2. $\square$

3.3. Коли оператор з двома точками спектру є сумою ортопроекторів

В роботі [27], користуючись теорією $*$-зображень для $\mathcal{P}_{4,\vec{\alpha}}$, отримані умови на спектр і спектральні кратності оператора з двома точками спектру, необхідні і достатні для того, щоб він був сумою трьох ортопроекторів. Але ці умови виглядають досить громіздко. Ми, слідуючи [28], наведемо умови на оператор із спектром $\{\varepsilon, 1+\varepsilon\}$ необхідні і достатні для того, щоб він був сумою n ортопроекторів $(n \ge 3)$.

Розглянемо в унітарному просторі H самоспряжений оператор A, для якого $\sigma(A) = \{\varepsilon, 1+\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, і який можна розкласти в суму n ортопроекторів $P_1 + \ldots + P_n = A$.

Лема. *Для того щоб оператор $A = A^*$, який має спектр $\{\varepsilon, 1+\varepsilon\}$, був сумою n ортопроекторів, необхідно, щоб $1+\varepsilon \in \Sigma_{n+1}$. Зокрема, для того щоб $A = P_1 + P_2 + P_3$, необхідно $1+\varepsilon \in \Sigma_4$.*

Доведення. Нехай P є ортопроектор на власний підпростір оператора A, який відповідае власному значенню ε. Тоді $P_1 + \ldots + P_n = \varepsilon P + (1+\varepsilon)(I-P)$ або $P_1 + \ldots + P_n + P = (1+\varepsilon)I$. $\square$

Теорема 3.3. *Оператор $A = A^*$, який має лише дві точки спектру ε та $1+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ з кратностями $r_1 \ge 1$ і $r_2 \ge 1$ відповідно, є сумою трьох ортопроекторів тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

(1) *для $\varepsilon < 1$*

a) $\varepsilon = 1 - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}$ має кратність $r_1 = kt$ і $1+\varepsilon$ має кратність $r_2 = (k+1)t$;

b) *$\varepsilon = 1 - \frac{1}{k+1}$ має кратність $r_1 = r^{(1)}t_1 + r^{(2)}t_2$ і $1+\varepsilon$ має кратність $r_2 = r^{(2)}t_1 + r^{(1)}t_2$, де $r^{(1)} = \frac{2k+1+(-1)^{k-1}}{4}$, $r^{(2)} = \frac{2k+3+(-1)^k}{4}$;*

(2) *для $\varepsilon = 1$ кратності r_1 і r_2 довільні;*

(3) *для $\varepsilon > 1$ необхідною та достатньою умовою існування нерозкладного оператора $B = B^*$, який має дві точки спектру $2-\varepsilon$ і $3-\varepsilon$ з кратностями $r_2 \geq 1$ і $r_1 \geq 1$ в суму трьох ортопроекторів.*

Доведення. Нехай P є ортопроектор на власний підпростір оператора A, який відповідає власному значенню ε. Тоді $P_1 + P_2 + P_3 + P = (1+\varepsilon)I$.

В роботі [11] було показано, що незвідні четвірки ортопроекторів P_1, P_2, P_3, P_4, такі, що $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = (1+\varepsilon)I$, де $\varepsilon < 1$, існують тільки в наступних випадках: 1) $\varepsilon = 1 - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}$ і простір має розмірність $2k-1$, де $\dim \mathrm{Im} P_4 = k$. Таким чином, ортопроектори P_1, P_2, P_3, P такі, що $P_1 + P_2 + P_3 + P = (1+\varepsilon)I$ існують тільки в просторах розмірності $(2k+1)t$, $t \geq 1$ і $\dim \mathrm{Im} P = kt$, звідки випливає (1.a) теореми. 2) $\varepsilon = 1 - \frac{1}{k+1}$ і розмірність простору $k+1$, де $\dim \mathrm{Im} P_4 = r^{(1)} = \frac{2k+1+(-1)^{k-1}}{4}$ або $\dim \mathrm{Im} P_4 = r^{(2)} = \frac{2k+3+(-1)^k}{4}$. Ортопроектори P_1, P_2, P_3, P такі, що $P_1 + P_2 + P_3 + P = (1+\varepsilon)I$ існують тільки в просторі розмірності $(k+1)t$, $t \geq 1$ і $\dim \mathrm{Im} P = r^{(1)}t_1 + r^{(2)}t_2$, де $t_1 + t_2 = t$, $t_i \geq 0$, а це дає (1.b).

Для $\varepsilon = 1$ твердження очевидне.

Нехай $\varepsilon > 1$ і оператор $A = A^*$, спектр якого містить лише дві точки ε та $1+\varepsilon$ з кратностями $r_1 \geq 1$ і $r_2 \geq 1$ відповідно, є сумою трьох ортопроекторів $A = P_1 + P_2 + P_3$. Тоді оператор $B = P_1^{\perp} + P_2^{\perp} + P_3^{\perp} = 3I - A$, де $P_i^{\perp} = I - P_i$, також є сумою трьох ортопроекторів із спектром $2-\varepsilon$ і $3-\varepsilon$ з кратностями $r_2 \geq 1$ і $r_1 \geq 1$, і навпаки, що і доводить (3). □

Нехай $\Phi^+(\alpha) = 1 + \frac{1}{n-1-\alpha}$ і $\Phi^{+(k)}(\alpha) = \Phi^+(\Phi^{+(k-1)}(\alpha))$, $k \geq 1$, $\Phi^{+(0)}(\alpha) = \alpha$, тоді $\Lambda_n^{(0)} = \cup_{k\geq 0}\Phi^{+(k)}(0)$ і $\Lambda_n^{(1)} = \cup_{k\geq 0}\Phi^{+(k)}(1)$. Нехай $\alpha = \frac{p}{q}$ є нескоротний дріб.

Теорема 3.4. *Оператор $A = A^*$, який має лише дві точки спектру ε та $1+\varepsilon$, де $1+\varepsilon \in \left(0, \frac{n+1-\sqrt{(n+1)^2-4(n+1)}}{2}\right) \cup \left(\frac{n+1+\sqrt{(n+1)^2-4(n+1)}}{2}, n+1\right)$, із кратностями $r_1 \geq 1$ і $r_2 \geq 1$, є сумою n ортопроекторів тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

(1) $1+\varepsilon \in \Lambda_{n+1}^{(0)}\backslash\{0\}$ *і має кратність* $r_2 = (q - \frac{p}{n+1})t$, ε *має кратність* $r_1 = \frac{p}{n+1}t$;

(2) $1+\varepsilon \in \Lambda_{n+1}^{(1)}$ *має кратність* $r_2 = (q - r^{(1)})t_1 + (q - r^{(2)})t_2$, *і* ε *має кратність* $r_1 = r^{(1)}t_1 + r^{(2)}t_2$, *де* $r^{(1)} = \frac{p+(-1)^{k-1}}{n+1}$, $r^{(2)} = r^{(1)} + (-1)^k$ *і* $k : \Phi^{+(k)}(1) = 1+\varepsilon$, $t_i \geq 0$;

(3) $1+\varepsilon \in \left(\frac{n+1+\sqrt{(n+1)^2-4(n+1)}}{2}, n+1\right)$ *оператор* $B = B^*$, *спектр якого містить дві точки* $n-\varepsilon-1$ *і* $n-\varepsilon$ *з кратностями* $r_2 \geq 1$ *і* $r_1 \geq 1$ *відповідно, який є сумою* n *ортопроекторів.*

Доведення. Нехай P є ортопроектор на власний підпростір оператора A, який відповідає власному значенню ε. Тоді $P_1 + \ldots + P_n + P = (1+\varepsilon)I$.

В роботі [11] показано, що незвідні ортопроектори такі, що $P_1 + \ldots + P_{n+1} = (1+\varepsilon)I$, де $1+\varepsilon < \frac{n+1+\sqrt{(n+1)^2-4(n+1)}}{2}$, існують тільки в наступних випадках:

1) $1+\varepsilon = \frac{p}{q} \in \Lambda_{n+1}^{(0)}$ і простір має розмірність q і $\dim \mathrm{Im} P_{n+1} = \frac{p}{n+1}$. Тоді ортопроектори $P_1, \ldots, P_n$, P такі, що $P_1 + \ldots + P_n + P = (1+\varepsilon)I$ існують тільки в просторі розмірності qt, $t \geq 1$ і $\dim \mathrm{Im} P = \frac{p}{n+1}t$, а це і доводить (1).

2) $1+\varepsilon = \frac{p}{q} = \Phi^{+(k)}(1) \in \Lambda_{n+1}^{(1)}$ і розмірність простору q, де $\dim \mathrm{Im} P_{n+1} = r^{(1)} = \frac{p+(-1)^{k-1}}{n+1}$ або $\dim \mathrm{Im} P_{n+1} = r^{(2)} = r^{(1)} + (-1)^k$. Таким чином, ортопроектори $P_1, \ldots, P_n$, P такі, що $P_1 + \ldots + P_n + P = (1+\varepsilon)I$ існують тільки в просторі розмірності qt, $t \geq 1$ і $\dim \mathrm{Im} P = r^{(1)}t_1 + r^{(2)}t_2$, де $t_1 + t_2 = t$, $t_i \geq 0$, що доводить (2).

Якщо $1+\varepsilon > \frac{n+1+\sqrt{(n+1)^2-4(n+1)}}{2}$ і $A = A^*$, спектр якого містить тільки дві точки ε і $1+\varepsilon$ з кратностями $r_1 \geq 1$ $r_2 \geq 1$, є сумою n ортопроекторів $A = P_1 + \ldots + P_n$, тоді оператор $B = P_1^{\perp} + \ldots + P_n^{\perp} = nI - A$, де $P_i^{\perp} = I - P_i$ також є сумою n ортопроекторів і має дві точки спектру $n-1-\varepsilon$ і $n-\varepsilon$ з кратностями $r_2 \geq 1$ і $r_1 \geq 1$, що доводить (3). □

Автори щиро вдячні А. А. Кириченку і С. А. Кругляку за корисні зауваження.

Література

[1] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* Изд-во "Наукова думка", Киев, 1965.

[2] Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский, *Лекции по квантовой механике для студентов-математиков.* Изд-во Ленинградского ун-та, Ленинград, 1980.

[3] D. Ewans, Y. Kawahigashi, *Quantum symmetries on operator algebras.* Oxford Univ. Press, New York, 1998.

[4] A. A. Klyachko, *Stable bundles, representation theory and Hermitian operators* // Selecta Math. (1998), №4, 419–445.

[5] W. Crawley-Boevey, M. Holland, *Noncommutative deformations of Kleinian singularities* // Duke Math. Journ., **92** (1998), №3, 605–635.

[6] W. Fulton, *Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus* // Bull. of the AMS. **37** (2000), №3, 209–249.

[7] В. И. Рабанович, А. В. Стрелец, Ю. С. Самойленко, *О тождествах в алгебрах $Q_{n,\lambda}$, порожденных идемпотентами* // Укр. мат. журн., **53** (2001), №10, 1380–1390.

[8] В. И. Рабанович, А. В. Стрелец, Ю. С. Самойленко, *О тождествах в алгебрах, порожденных линейно связанными идемпотентами*, (2004).

[9] М. С. Власенко, А. С. Меллит, Ю. С. Самойленко, *Об алгебрах, порожденных линейно связанными образующими с заданным спектром. Функ. ан. и его прилож.* // **38** (2004), вып. 4.

[10] V. L. Ostrovsky, Yu. S. Samoilenko, *Introduction to the theory representation of finitely presented ∗-algebras. 1. Representations by bounded operators* // Rev. Math.& Math. Phis., Gordon and Breach **11** (1999), 1–261.

[11] С. А. Кругляк, В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко, *О суммах проекторов* // *Функциональный анализ и его приложения* // **36** (2002), №3, 20–35.

[12] Д. В. Галінський, С. А. Кругляк, *Зображення ∗-алгебр, породжених лінійно пов'язаними ортопроекторами* // Вісник Київського Універ., Серія: фіз.-мат. науки, (1999) №2, 24–31.

[13] С. А. Кругляк, *Функторы Кокстера для одного класса ∗-колчанов* // Укр. Мат. Журн. **54** (2002), №6, 789–797.

[14] S. A. Kruglyak, *Coxeter functors for a certain class of ∗-quivers and ∗-algebras* // Methods of Functional Analysis and Topology, **8** (2002), №4, 49–57.

[15] С. А. Кругляк, А. В. Ройтер, *Локально-скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств* // препринт Инст. Мат. НАН Украины, (2003) №8, 3–36.

[16] А. С. Меллит, *Когда сумма трех частичных отображений равна нулю* // Укр. мат. журн., **55** (2003), №9, 1277–1283.

[17] А. С. Меллит, В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко, *Когда сумма частичных отображений кратна единичному оператору, Функциональный анализ и его приложения* // **38** (2004), №2, 91–94.

[18] A. Mellit, Yu. Samoilenko, M. Zavodovsky, *On ∗-representations of algebras of Temperley-Lieb type and algebras generated by linearly dependent generators with given spectra* // Proc. of Inst. of Math. of NAS of Ukraine, **50** (2004), Part 3, 1139–1144.

[19] S. A. Kruglyak, S. V. Popovich, Yu. S. Samoilenko, *∗-Representations of algebras associated with Dynkin graphs and Horn's problem* // Ученые записки Таврич. Нац. Ун. им. В. И. Вернадского сер. "Математика. Механика. Информатика и кибернетика", **16(55)** (2003), №2, 132–139.

[20] A. A. Kyrychenko, Yu. S. Samoilenko, A. V. Strelets, *∗-Representations of the algebras $\mathcal{P}_{n,\vec{\alpha}}$* // Methods of Functional Analysis and Topology, to appear.

[21] В. Л. Островський, *Зображення алгебри, асоційованої з графом Динкіна* $\widetilde{E}_7$ // Укр. Мат. Журн., прийнято до друку.

[22] A. S. Mellit, *Geometry of $*$-representations of some PI-algebras* // Methods of Functional Analysis and Topology, to appear.

[23] P. A. Fillmore, *On sums of projections* // J. Func. Anal., (1969), №4, 146–152.

[24] L. L. Oridoroga, *On representation of a scalar operator in the form of a sum of orthoprojections* // Methods of Functional Analysis and Topology, **9** (2003), №3, 247–251.

[25] М. В. Заводовский, *О квадратичных функциях от пары проекторов* //Таврический вестник информатики и математики, (2003), №2, 67–70.

[26] S. A. Kruglyak, V. I. Rabanovich, Yu. S. Samoilenko, *Decomposition of a scalar matrix into a sum of orthogonal projections* // Linear Algebra and its Applications (2003), №370, 217–225.

[27] А. А. Кириченко, С. А. Кругляк, *Про спектр суми проекторів* // Вісник Київського універ., Серія: фіз.-мат. науки (2003), №1, 24–31.

[28] A. A. Kyrychenko, Yu. S. Samoilenko, *On the spectrum and spectrum multiplicities of a sum of orthogonal projections* // Algebra and Discrete Math., 2004, to appear.

[29] Ch. Davis, *Separation of two linear subspaces* // Acta Sci. Math.(Szeged), **19** (1958), 172–187.

[30] P. R. Halmos, *Two subspaces* // Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 381–389.

[31] S. Kruglyak, Yu. Samoilenko, *On the complexity of discription of representations of $*$-algebras generated by idempotents* // Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), №6, 1655–1664.

[32] V. F. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polinomials* // Ann. Math., **126** (1987), 335–338.

[33] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, *Функторы Кокстера и теорема Габриеля* // ИМН, **28** (1973), №2, 19–33.

[34] С. В. Попович, Ю. С. Самойленко, *О гомоморфизмах алгебр, порожденных проекторами, и функторах Кокстера* // Укр. Мат. Жур. **55** (2003), №9, 1224–1237.

Відомості про авторів

М. В. Заводовський
Ю. С. Самойленко

Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська 3,
01601, Київ-4,
Україна
E-Mail: mzv@imath.kiev.ua,
yurii_sam@imath.kiev.ua