Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 3, 373 – 401

# О необходимости условия Винера для нелинейных сингулярных параболических уравнений

И. И. Скрыпник

*Представлена А. Е. Шишковым*

**Аннотация.** Исследуется непрерывность решений нелинейных параболических уравнений вблизи негладкой границы цилиндрической области. Как частный случай можно рассмотреть параболическое уравнение с оператором $p$-Лапласа в главной части, $p < 2$. Доказано необходимое условие регулярности граничной точки в терминах $p$-ёмкости.

**2000 MSC.** 35K65, 35K35, 35Q35, 35G25, 35B45.

**Ключевые слова и фразы.** сингулярные параболические уравнения, условия Винера.

## 1. Введение

Целью работы является доказательство необходимого условия регулярности граничной точки для нелинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dx_i}\, a_i\Big(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) = a_0\Big(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T). \quad (1.1)$$

Рассматривается случай сингулярных уравнений (см. [1]), что означает сублинейность роста коэффициентов уравнения (1.1) относительно градиента решения. Достаточное условие регулярности граничной точки для таких уравнений доказано в [7].

Основной результат заключается в необходимости условия

$$\int_0^1 \left\{ \frac{C_p(B(x_0, r) \setminus \Omega)}{r^{N-p}} \right\}^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} = \infty \quad (1.2)$$

*Статья поступила в редакцию* 15.05.2004

для регулярности точки $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, T)$. Здесь $p$ характеризует рост функций $a_i(x, t, u, \xi)$ относительно $\xi$, а, именно, предполагается выполненным неравенство

$$|a_i(x,t,u,\xi)| \leqslant \nu_1\big(|\xi|^{p-1} + g_i(x,t)|u|^{p-1}\big) + h_i(x,t), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.3}$$

с $\frac{2n}{n+1} < p < 2$ и формулируемыми ниже условиями на функции $g_i$, $h_i$. Число $N$ в (1.2) — размерность области $\Omega$, $C_p$ — $p$-емкость, $B(x_0, r) = \{x \in R^N : |x - x_0| < r\}$.

Условие (1.2) совпадает с полученным в [7] достаточным условием регулярности граничной точки для уравнения (1.1) и, тем самым, это условие является необходимым и достаточным.

В случае линейного роста коэффициентов уравнения относительно производных решения достаточность и необходимость условия (1.2) для регулярности граничной точки доказаны в работах В. П. Цимера [9] и И. В. Скрыпника [4] соответственно. Для уравнений с суперлинейным ростом коэффициентов эти же вопросы изучены в [5,6].

Отметим, что доказательства регулярности решений существенно различны для уравнений, соответствующих линейному, суперлинейному и сублинейному ростам коэффициентов относительно $\frac{\partial u}{\partial x}$. Возникающие здесь трудности хорошо известны (см. [1]) уже при доказательстве внутренней гельдеровости решений. Эти же трудности остаются и при изучении проблемы регулярности граничных точек.

Доказательство необходимости условия (1.2) для уравнения (1.1) основано на развитии для параболических уравнений метода работы [2], посвященной регулярности граничной точки в эллиптическом случае.

## 2. Формулировка предположений и основного результата

Далее $\Omega$ — ограниченное открытое множество в $R^N$. Предполагается, что выполнены следующие условия:

$A_1$) функции $a_i(x, t, u, \xi)$, $i = 0, 1, \dots, n$ определены при $(x, t) \in \Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $u \in R^1$, $\xi \in R^n$, непрерывны по $u, \xi$ при почти всех $x, t$ и измеримы по $x, t$ при всех $u, \xi$;

$A_2$) при $(x, t) \in \Omega_T$, $u \in R^1, \xi, \xi', \xi'' \in R^N$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{N} \left[a_i(x,t,u,\xi') - a_i(x,t,u,\xi'')\right](\xi'_i - \xi''_i) > 0 \quad \text{при} \quad \xi' \neq \xi'', \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x,t,u,\xi)\xi_i > \nu_1|\xi|^p,$$
$$|a_i(x,t,u,\xi)| \leqslant \nu_2|\xi|^{p-1} + g_i(x,t)|u|^{p-1} + h_i(x,t), \quad (2.2)$$
$$\big|a_0(x,t,u,\xi)\big| \leqslant \nu_3(x,t)|\xi|^{p-1} + g_0(x,t)|u|^{p-1} + h_0(x,t) \quad (2.3)$$

и неравенство (1.3) с $\frac{2N}{N+1} < p < 2$, положительными постоянными $\nu_1, \nu_2$ и неотрицательными функциями $g_i(x,t)$, $h_i(x,t), \nu_3(x,t)$, такими, что $F(x,t) \in L_r(0,T;L_q(\Omega))$,

$$F(x,t) = F_0(x,t) + \big[F_1(x,t)\big]^{\frac{p}{p-1}} + \nu_3^p(x,t),$$

где $F_0(x,t) = g_0(x,t) + h_0(x,t)$, $F_1(x,t) = \sum\limits_{i-1}^{N} g_i(x,t) + \sum\limits_{i=1}^{N} h_i(x,t)$ $q,\ r \geqslant 1,\ \frac{N}{qp} + \frac{1}{r} < 1$.

В дальнейшем предполагаем, что $u(x,t) \in V_{2,p}(\Omega_T) \equiv C(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$. Под решением уравнения (1.1) понимаем функцию $u(x,t) \in V_{2,p(\Omega_T)}$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[u(x,t)]_h\varphi(x,t) + \sum_{i=1}^{N}\left[a_i\Big(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\right]_h\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \right.$$
$$\left. - \left[a_0\Big(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\right]_h\varphi(x,t)\right\}dx\,dt = 0 \quad (2.4)$$

при произвольной функции $\varphi(x,t) \in \overset{\circ}{V}_{2,p}(\Omega_T) = C(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_p(0,T;\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ и произвольных $h, t_1, t_2$, таких, что $0 < h < t_1 < t_2 < T-h$. Здесь

$$[u(x,t)]_h = \frac{1}{h}\int\limits_{t}^{t+h} u(x,s)\,ds$$

и аналогично определяются $\left[a_i\Big(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\right]_h$, $i = 0,1,\dots,N$.

Будем говорить, что $(x_0,t_0) \in S_T = \partial\Omega\times(0,T)$ — регулярная граничная точка уравнения (1.1), если для произвольного решения $u(x,t) \in V_{2,p}(\Omega_T)$ этого уравнения, удовлетворяющего условию

$$\varphi(x,t)[u(x,t) - f(x,t)] \in L_p\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\big) \quad (2.5)$$

с некоторыми функциями $\varphi(x,t)$, $f(x,t)$, такими, что $\varphi(x,t) \in C^1(R^{N+1})$, $\varphi(x,t) \equiv 1$ в некоторой окрестности точки $(x_0,t_0)$ и $f(x,t) \in C(\overline{\Omega}_T) \cap V_{2,p}(\Omega_T)$, выполнено равенство

$$\lim_{R\to 0}\{\text{ess sup}\,[u(x,t):(x,t)\in\Omega_T\cap Q_R(x_0,t_0)]\}=$$
$$=\lim_{R\to 0}\{\text{ess inf}\,[u(x,t):(x,t)\in\Omega_T\cap Q_R(x_0,t_0)]\}=f(x_0,t_0). \quad (2.6)$$

Здесь $Q_R(x_0,t_0)=B(x_0,R)\times[t_0-R^p,\ t_0+R^p]$ и $B(x_0,R)$ — шар в $R^N$ радиуса $R$ с центром $x_0$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 2.1.** *Предположим, что выполнены условия* $A_1$, $A_2$. *Для того, чтобы точка* $(x_0,t_0)\in S_T$ *была регулярной для уравнения* (1.1), *необходимо выполнение равенства* (1.2).

**Замечание 2.1.** Из работы [7] и теоремы 2.1 следует, что условие (1.2) необходимо и достаточно для регулярности граничной точки $(x_0,t_0)\in S_T$.

## 3. Априорные оценки решения

Далее предполагается, что равенство (1.2) не выполнено, т.е.

$$\int_0^1\left\{\frac{C_p(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{N-p}}\right\}^{\frac{1}{p-1}}\frac{dr}{r}<\infty, \quad (3.1)$$

и докажем существование решения уравнения (1.1), удовлетворяющего условию вида (2.5), для которого не выполнено равенство (2.6).

Методом Мозера просто устанавливается ограниченность вблизи $(x_0,t_0)$ решения уравнения (1.1), удовлетворяющего условию (2.5). Поэтому далее, не ограничивая общности, можем считать, что $u(x,t)\in L_\infty(\Omega_T)$. В этом разделе $u(x,t)$ — произвольное ограниченное решение уравнения (1.1) в $\Omega_T$, и пусть $M=\text{ess sup}\{|u(x,t)|:(x,t)\in\Omega_T\}$.

Пусть $\delta$, $R$ — произвольные положительные числа, такие, что $(t_0-\delta^{2-p}R^p,\ t_0+\delta^{2-p}R^p)\subset(0,T), R<1$ и обозначим

$$B=B(x_0,R),\quad Q=B\times\big(t_0-\delta^{2-p}R^p,t_0+\delta^{2-p}R^p\big).$$

Предполагаем, что $\xi(x),\eta(x),\zeta(x)$ — произвольные определенные в $R^N$ функции, удовлетворяющие условиям:

1) $\xi(x),\eta(x),\zeta(x)\in W_p^1(B)$;

2) $0\leqslant\xi(x)\leqslant 1,\xi(x)=1$ в $B\big(x_0,\frac{3R}{8}\big),\xi(x)=0$ вне $B$, $\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|\leqslant\frac{6}{R}$;

3) $0\leqslant\eta(x)\leqslant 1$, $[1-\eta(x)]\,[1-\zeta(x)]\equiv 0$;

4) $0\leqslant\zeta(x)\leqslant 1$, $\zeta(x)=0$ при $x\in B\setminus\Omega$, $\int\limits_B\left|\frac{\partial}{\partial x}(\xi\zeta)\right|^p dx\leqslant CR^{N-p}$.

Обозначим

$$\omega(x)=\xi(x)\zeta(x), \quad \sigma(x)=\xi(x)\zeta(x)\eta(x). \tag{3.2}$$

В дальнейшем будет указан конкретный выбор этих функций.

Определим $\theta(t)\in C^\infty(R^1)$, удовлетворяющую условиям: $0\leqslant\theta(t)\leqslant 1$, $\theta(t)=1$ при $|t-t_0|\leqslant\frac{4}{9}\delta^{2-p}R^p$, $\theta(t)=0$ при $|t-t_0|\geqslant\delta^{2-p}R^p$, $\operatorname{sign}(t-t_0)\frac{d\theta}{dt}\leqslant 0$, $\left|\frac{d\theta}{dt}\right|\leqslant 8\delta^{p-2}R^{-p}$.

Пусть $0<l<M$ и определим

$$\begin{aligned} &L=Q\cap\Omega_T\cap\{u>l\}, \quad L(\tau)=\{(x,t)\in L: t=\tau\}, \\ &E=L\cap\{\eta(x)<1\}, \quad F=L\cap\{\eta(x)=1\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Обозначим

$$\lambda=\min\left\{p-1,\ \frac{2[p+n(p-2)]}{n(2p-1)}\right\}, \quad \rho(\lambda)=\frac{2p}{2p-2-\lambda}. \tag{3.4}$$

Из условия на $p$ следует, что $\lambda$ — положительное число. Определим еще функцию

$$w(x,t)=\frac{1}{\delta}\left[\int\limits_l^{u(x,t)}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\frac{1}{p}+\frac{\lambda}{2p}}\left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\frac{\lambda}{p}}ds\right]_+, \tag{3.5}$$

где $[\cdot]_+$ обозначает положительную часть функции.

Будем понимать под известными параметрами $M$, $N$, $p$, $\nu_1$, $\nu_2$, $q$, $r$ норму функции $F(x,t)$ в пространстве $L_r(0,T;L_q(\Omega))$.

**Теорема 3.1.** *Предположим, что выполнены условия $A_1$, $A_2$ и $u(x,t)$ — решение уравнения (1.1) в $\Omega_T$, удовлетворяющее неравенству $|u(x,t)|\leqslant M$. Тогда при произвольном $k\in\left(\frac{p}{p-1},\infty\right)$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\int\limits_{L(t)} G\Big(\frac{u(x,t)-l}{\delta}\Big)\,\omega^k(x)\theta^k(t)\,dx+ \\ &\qquad+\delta^{p-2}\iint\limits_L\Big|\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\Big|^p\omega^k(x)\theta^k(t)\,dx\,dt\leqslant \\ &\leqslant K_1\bigg\{\delta^{p-2}R^{-p}\iint\limits_E\Big[1+\frac{u(x,t)-l}{\delta}\Big]^{1-\frac{\lambda}{2}(p-1)}\Big[\frac{u(x,t)-l}{\delta}\Big]^{\lambda(p-1)}\times \\ &\qquad\times\omega^{k-p}(x)\theta^{k-1}(t)\,dx\,dt+R^N\Big[\delta^{1-p}R^{p-N}\int\limits_B\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\Big|^p dx+ \end{aligned}$$

$$+\,\delta^{-1}\biggl(R^{p-N}\int\limits_{B}\Bigl|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\Bigr|^{p}dx\biggr)^{\frac{1}{p-1}}+R^{\alpha}\bigl(\delta^{\beta_1}+\delta^{\beta_2}+\delta^{\beta_3}\bigr)\biggr]\biggr\},\qquad(3.6)$$

*где использованы обозначения* (3.2)–(3.5), $G(s)=s$ *при* $s\geqslant 1, G(s)=s^{2-\lambda}$ *при* $0\leqslant s\leqslant 1$, $K_1$ *— постоянная, зависящая лишь от известных параметров и* $k$. *Здесь* $\alpha=\bigl(1-\frac{N}{pq}-\frac{1}{r}\bigr)(p-1)$, $\beta_1=(1-p)\bigl(1+\frac{\lambda}{2}\bigr)+\frac{p-2}{r}$, $\beta_2=(1-p)\bigl(1+\frac{2-p}{pr}\bigr)+\frac{p-2}{r}$, $\beta_3=1-p+\frac{p-2}{r}$.

*Доказательство.* Подставим в интегральное тождество (2.4) пробную функцию

$$\varphi_1(x,t)=\Biggl[\int\limits_{l}^{[u(x,t)]_h}\Bigl(1+\frac{s-l}{\delta}\Bigr)^{-1+\frac{\lambda}{2}}\Bigl(\frac{s-l}{\delta}\Bigr)^{-\lambda}ds\Biggr]_{+}\omega^k(x)\theta^k(t).$$

Преобразуя слагаемое полученного равенства, содержащее $\frac{\partial}{\partial t}[u(x,t)]_h$, переходя затем к пределу при $h\to 0$ и оценивая с использованием условий (1.3), (2.2), (2.3), получаем неравенство

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\int\limits_{L(t)}\Biggl\{\int\limits_{l}^{u(x,t)}\int\limits_{l}^{v}\Bigl(1+\frac{s-l}{\delta}\Bigr)^{-1+\frac{\lambda}{2}}\Bigl(\frac{s-l}{\delta}\Bigr)^{-\lambda}ds\,dv\Biggr\}\times\\
&\quad\times\omega^k(x)\theta^k(t)\,dx+\iint\limits_{L}\Bigl(1+\frac{u-l}{\delta}\Bigr)^{-1+\frac{\lambda}{2}}\Bigl(\frac{u-l}{\delta}\Bigr)^{-\lambda}\Bigl|\frac{\partial u}{\partial x}\Bigr|^{p}\times\\
&\quad\times\omega^k(x)\theta^k(t)\,dx\,dt\leqslant C_1\iint\limits_{L}\Biggl\{\int\limits_{l}^{u(x,t)}\int\limits_{l}^{v}\Bigl(1+\frac{s-l}{\delta}\Bigr)^{-1+\frac{\lambda}{2}}\times\\
&\quad\times\Bigl(\frac{s-l}{\delta}\Bigr)^{-\lambda}ds\,dv\,\theta^{-1}(t)\Bigl|\frac{d\theta}{dt}\Bigr|+\\
&\quad+\int\limits_{l}^{u(x,t)}\Bigl(1+\frac{s-l}{\delta}\Bigr)^{-1+\frac{\lambda}{2}}\Bigl(\frac{s-l}{\delta}\Bigr)^{-\lambda}ds\times\\
&\quad\times\Biggl[\biggl(\Bigl|\frac{\partial u}{\partial x}\Bigr|^{p-1}+F_1(x,t)\biggr)\omega^{-1}(x)\Bigl|\frac{\partial\omega}{\partial x}\Bigr|+\\
&\quad+\nu_3(x,t)\Bigl|\frac{\partial u}{\partial x}\Bigr|^{p-1}+F_0(x,t)\Biggr\}\omega^k(x)\theta^k(t)\,dx\,dt.\qquad(3.7)
\end{aligned}$$

Здесь и в ходе доказательства теоремы 3.1 через $C_i$ обозначаются постоянные, зависящие от тех же параметров, что и $K_1$ в (3.6).

Отметим следующие просто проверяемые неравенства

$$
\begin{gathered}
\left[\int\limits_l^v \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} ds\right]_+ \leqslant C_2\delta, \\
\int\limits_l^u \int\limits_l^v \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1+\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\lambda} ds\, dv \geqslant C_2\delta^2 G\left(\frac{u-l}{\delta}\right), \qquad (3.8) \\
w(x,t) \leqslant C_2\left[\frac{u(x,t)-l}{\delta}\right]^{\frac{1}{\rho(\lambda)}}.
\end{gathered}
$$

Используя эти неравенства, получаем из (3.7)

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{L(t)} G\left(\frac{u(x,t)-l}{\delta}\right)\omega^k(x)\theta^k(t)\,dx+ \\
&\qquad + \delta^{p-2}\iint\limits_L \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^p \omega^k(x)\theta^k(t)\,dx\,dt \leqslant \\
&\leqslant C_3\delta^{-1}\iint\limits_L \Big\{\delta^{p-2}R^{-p}[u(x,t)-l]\theta^{-1}(t)+ \\
&\qquad + \Big[\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{p-1} + F_1(x,t)\Big)\omega^{-1}(x)\Big|\frac{\partial \omega}{\partial x}\Big| + \\
&\qquad + \nu_3(x,t)\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{p-1} + F_0(x,t)\Big]\Big\}\omega^k(x)\theta^k(t)\,dx\,dt. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Интеграл в правой части последнего неравенства представим в виде суммы интегралов по множествам $E$ и $F$, принимая во внимание, что $L = E \cup F$.

Оценим вначале интегралы по $E$, учитывая, что при этом $\zeta(x)=1$, $\omega(x) = \xi(x)$. Используя неравенство Юнга с $\varepsilon > 0$ и неравенство Гельдера для слагаемого, содержащего $\nu_3(x,t)$, имеем

$$
\begin{aligned}
&\delta^{-1}\iint\limits_E \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{p-1}\Big[\omega^{-1}(x)\Big|\frac{\partial \omega}{\partial x}\Big| + \nu_3(x,t)\Big]\omega^k(x)\theta^k(t)\,dx\,dt \leqslant \\
&\qquad \leqslant C_4\varepsilon\delta^{p-2}\iint\limits_E \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^p \omega^k(x)\theta^k(t)\,dx\,dt+ \\
&\qquad + C_4\varepsilon^{1-p}\Big\{\delta^{\frac{p-2}{r}-(1+\frac{\lambda}{2})(p-1)}R^{\frac{N}{q'}+\frac{p}{r'}}+
\end{aligned}
$$

$$+\,\delta^{p-2}R^{-p}\iint\limits_{E}\Big[1+\frac{u(x,t)-l}{\delta}\Big]^{1-\frac{\lambda}{2}(p-1)}\times$$
$$\times\Big[\frac{u(x,t)-l}{\delta}\Big]^{\lambda(p-1)}\xi^{k-p}(x)\theta^{k}(t)\,dx\,dt\Big\},\quad(3.10)$$

где $r'=\frac{r}{r-1}$, $q'=\frac{q}{q-1}$ и $q,\ r$ определены в условии $A_2$.

Далее, в силу выбора $\lambda$ и условия $A_2$, имеем

$$\delta^{p-3}R^{-p}\iint\limits_{E}[u(x,t)-l]\omega^{k}(x)\theta^{k-1}(t)\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\delta^{p-2}R^{-p}\iint\limits_{E}\Big[1+\frac{u(x,t)-l}{\delta}\Big]^{1-\frac{\lambda}{2}(p-1)}\times$$
$$\times\Big[\frac{u(x,t)-l}{\delta}\Big]^{\lambda(p-1)}\omega^{k}(x)\theta^{k-1}(t)\,dx\,dt,\quad(3.11)$$
$$\delta^{-1}\iint\limits_{E}\Big\{F_1(x,t)\omega^{-1}(x)\Big|\frac{\partial\omega}{\partial x}\Big|+F_0(x,t)\Big\}\omega^{k}(x)\theta^{k}(t)\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant C_5\Big\{\delta^{1-p-\frac{2-p}{r}\cdot\frac{p-1}{p}}R^{(\frac{N}{q'}+\frac{p}{r'})\frac{p-1}{p}+\frac{N}{p}}+\delta^{1-p-\frac{2-p}{r}}R^{\frac{N}{q'}+\frac{p}{r'}}\Big\}.$$

Подставим теперь в интегральное тождество (2.4) пробную функцию

$$\varphi_2(x,t)=[[u(x,t)]_h-l]_+\,\sigma^{k}(x)\theta^{k}(t).$$

Повторяя преобразования, совершаемые при подстановке в (2.4) функции $\varphi_1(x,t)$ и оценивая с использованием условий (1.3), (2.2), (2.3), неравенства Юнга, получаем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\int\limits_{L(t)}[u(x,t)-l]^2\sigma^{k}(x)\theta^{k}(t)\,dx+$$
$$+\iint\limits_{L}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{p}\sigma^{k}(x)\theta^{k}(t)\,dx\,dt\leqslant C_6\iint\limits_{L}\Big\{[u(x,t)-l]^2\theta^{k-1}(t)\Big|\frac{d\theta}{dt}\Big|+$$
$$+[u(x,t)-l]\Big[\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{p-1}+F_1(x,t)\Big)\sigma^{-1}(x)\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\Big|+$$
$$+\nu_3(x,t)\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{p-1}+F_0(x,t)\Big]\Big\}\sigma^{k}(x)\theta^{k}(t)\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant C_6\Big\{\delta^{2-p}R^{p}\int\limits_{B}\Big|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\Big|^{p}dx+\int\limits_{B}\sigma^{k}(x)\,dx+\delta^{\frac{2-p}{r'}}R^{\frac{N}{q'}+\frac{p}{r'}}\Big\}.\quad(3.12)$$

Оценим второй интеграл правой части (3.12), используя неравенства Гельдера и теорему вложения

$$\int\limits_B \sigma^k(x)\,dx \leqslant \int\limits_B [\sigma(x)]^{\frac{p}{p-1}}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C_7 R^N \left\{ \frac{1}{R^N} \int\limits_B [\sigma(x)]^{\frac{Np}{N-p}}\,dx \right\}^{\frac{N-p}{N(p-1)}} \leqslant$$
$$\leqslant C_8 R^N \left\{ \frac{1}{R^{N-p}} \int\limits_B \left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p-1}}. \quad (3.13)$$

Так как $\omega(x) = \sigma(x)$ на $F$, то, используя (3.12), (3.13) и неравенство Юнга, получаем

$$\delta^{-1} \iint\limits_F \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1} \left[\omega^{-1}(x)\left|\frac{\partial\omega}{\partial x}\right| + \nu_3(x,t)\right]\omega^k(x)\theta^k(t)\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant C_9 \left\{ \delta^{1-p} R^p \int\limits_B \left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right|^p dx + \delta^{-1} R^N \left[\frac{1}{R^{N-p}} \int\limits_B \left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p-1}} + \right.$$
$$\left. + \delta^{1-p-\frac{2-p}{r}} R^{\frac{N}{q'}+\frac{p}{r'}} \right\}. \quad (3.14)$$

Аналогичную оценку имеет интеграл, получающийся заменой области интегрирования $L$ на $F$ в интеграле, содержащемся в правой части (3.9). Дополнительно к (3.13) нужно воспользоваться в остальных возникающих слагаемых неравенствами Юнга и (3.13). Из неравенств (3.9)–(3.11), (3.14) получаем при соответствующем выборе $\varepsilon$ оценку (3.6), что и заканчивает доказательство теоремы 3.1. □

**Лемма 3.1.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3.1. *Существует положительная постоянная* $K_2$, *зависящая только от известных параметров, такая, что справедлива оценка*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{L(t)} [u(x,t)-l]\sigma^p(x)\theta^p(t)\,dx \leqslant K_2 R^N \left\{ \frac{\delta^{2-p}}{R^{N-p}} \int\limits_B \left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right|^p dx + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{1}{R^{N-p}} \int\limits_B \left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p-1}} + R^\alpha \delta^{\beta_3+1} \right\}, \quad (3.15)$$

*где* $\alpha, \beta_3$ — *постоянные, определенные в теореме* 3.1.

*Доказательство.* Неравенство (3.15) доказывается в результате подстановки в (2.4) пробной функции $\varphi_3(x,t) = \big[[u(x,t)]_h - l\big]_+ \big\{[u(x,t)]_h - l + \varepsilon\big\}^{-1} \sigma^k(x)\theta^k(t)$ с $\varepsilon > 0$. При этом нужно использовать оценки (3.12), (3.13). $\square$

## 4. Построение последовательностей $\{l_j\}$, $\{\delta_j\}$, $\{\xi_j(x)\}$, $\{\eta_j(x)\}$, $\{\zeta_j(x)\}$, $\{\theta_{jn}(t)\}$

Пусть $R_0 \in (0, \frac{1}{2})$ и такое, что $M^{2-p}R_0^p < \min\{t_0, T - t_0\}$, $\{R_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию $R_j \in \big[2^{-j-1+\frac{1}{p}}R_0,\, 2^{-j}R_0\big]$. Обозначим $B_j = B(x_0, R_j)$ при $j = 0, 1, 2, \ldots$. Выберем последовательность функций $\{\xi_j(x)\}$ так, что $\xi_j(x) \equiv 0$ вне $B_j$, $\xi_j(x) \equiv 1$ в $B_{j+1}$; $\big|\frac{\partial \xi_j}{\partial x}\big| \leqslant 2^{j+3}R_0^{-1}$, $0 \leqslant \xi_j(x) \leqslant 1$ при $x \in B_j$, $\xi_j(x) \in C^\infty(R^N)$.

Определим функции $g_j(x) \in C^\infty(R^N)$ так, чтобы $g_j(x) \equiv 0$ при $x \notin B(x_0, 1)$, $g_j(x) \equiv 1$ при $x \in B_j \setminus \Omega$ и

$$\int\limits_{B(x_0,1)} \Big|\frac{\partial g_j(x)}{\partial x}\Big|^p dx \leqslant C_0 C_p(B_j \setminus \Omega) + R_j^N. \tag{4.1}$$

Здесь $C_0$ — постоянная, зависящая лишь от $p$, $n$; $C_p(B_j \setminus \Omega)$ — $p$-емкость множества $B_j \setminus \Omega$. Обозначим $g_j'(x) = \min\{1, [g_j(x)]_+\}$ и определим последовательности $\eta_j(x)$, $\zeta_j(x)$, $\omega_j(x)$, $\sigma_j(x)$ равенствами

$$\begin{aligned} &\eta_j(x) = \min\{1, 3g_j'(x) + 3g_{j-1}'(x)\},\\ &\zeta_j(x) = \min\{1, [2 - 3g_j'(x)]_+\},\\ &\omega_j(x) = \xi_j(x)\zeta_j(x), \quad \sigma_j(x) = \xi_j(x)\eta_j(x)\zeta_j(x). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Отметим, что так построенные последовательности $\xi_j(x)$, $\eta_j(x)$, $\zeta_j(x)$ удовлетворяют при каждом $j$ сформулированным в начале предыдущего раздела условиям 1)–4).

Сейчас покажем способ выбора последовательностей $\{l_j\}$, $\{\delta_j\}$, $\{\theta_{j,n}(t)\}$ для $j = -1, 0, 1, 2, \ldots$, $n = 1, \ldots, M(j)$. При этом полагаем $l_{-1} = -C(t_0)$ с $C(t_0)$, определяемым равенством $[C(t_0)]^{2-p} = \min\{t_0, T - t_0\}$, $l_0$ выбираем равным нулю и при всех $j$

$$\delta_j = l_{j+1} - l_j.$$

При выбранном значении $\delta_i$ функции $\theta_{i,n}(t)$ определяются равенством

$$\theta_{i,n}(t) = \overline{\theta}\big(\delta_i^{p-2}R_i^{-p}(t - \tau_{in})\big), \tag{4.3}$$

где $\overline{\theta}(s)$ — фиксированная функция, такая, что $\overline{\theta} \in C^\infty(R^1)$, $0 \leqslant \overline{\theta}(s) \leqslant 1$, $\overline{\theta}(s) \equiv 1$ при $|s| \leqslant \frac{4}{9}$, $\overline{\theta}(s) \equiv 0$ при $|s| > 1$, $\frac{d\overline{\theta}(s)}{ds} \operatorname{sign} s \leqslant 0$, $\left|\frac{d\overline{\theta}(s)}{ds}\right| \leqslant 8$. Последовательность $\tau_{in}$, $n = 1, \dots, M(i)$ определяем так, чтобы

$$1 \leqslant \sum_{n=1}^{M(i)} \theta_{in}(t) \leqslant 6 \quad \text{при} \quad |t - t_0| \leqslant (BM)^{2-p} R_i^p, \tag{4.4}$$

где $B$ — число, определяемое далее в лемме 4.1, $B \geqslant 2$, $BM \geqslant 1$. Предполагаем $R_0$ зависящим от $B$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$(BM)^{2-p} R_0^p < \min{[t_0, T - t_0]}. \tag{4.5}$$

Предположим, что значения $l_i$, $i = -1, 0, 1, \dots, j$ уже выбраны при некотором $j \geqslant 0$, и дадим определение $l_{j+1}$. Пусть $l$ — произвольное число из интервала $(l_j, BM]$ и обозначим $\delta_j(l) = l - l_j$. Разобьем отрезок $[t_0 - (BM)^{2-p} R_j^p,\ t_0 + (BM)^{2-p} R_j^p]$ точками $\tau^*_{jm}$, $m = 1, \dots, M^*(j)$ на интервалы равной длины так, чтобы $\frac{1}{4}\delta_{j-1} \leqslant \tau^*_{j,m+1} - \tau^*_{jm} < \frac{1}{2}\delta_{j-1}$ при $m = 1, \dots, M^*(j) - 1$.

Обозначим

$$\theta^*_{jm}(t, l) = \overline{\theta}\big([\delta_j(l)]^{p-2} R_j^{-p} (t - \tau^*_{jm})\big), \quad m = 1, \dots, M^*(j),$$

где $\overline{\theta}$ — та же функция, что и в (4.3).

Определим

$$A_j(l) = \max_{1 \leqslant m \leqslant M(j)} A_{jm}(l),$$

$$\begin{aligned} A_{jm}(l) &= \\ &= \frac{[\delta_j(l)]^{p-2}}{R_j^{N+p}} \iint\limits_{\{u > l_j\}} \left[\frac{u(x,t) - l_j}{l - l_j}\right]^{1 + \frac{\lambda}{2}(p-1)} \omega_j^{k-p}(x) [\theta^*_{jm}(t, l)]^{k-1}\, dx\, dt + \\ &\quad + \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \frac{1}{R_j^N} \int\limits_{\{u(\cdot,t) > l_j\}} G\left(\frac{u(x,t) - l_j}{l - l_j}\right) \omega_j^k(x) [\theta^*_{jm}(t, l)]^k\, dx, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $\{u(\cdot, t) > l_j\} = \{x \in \Omega : u(x,t) > l_j\}$, $k > \frac{p}{p-1}$ и выбор числа $k$ будет указан позже, $G$ — функция, определенная в теореме 3.1.

Выбор $l_{j+1}$ будет зависеть от значения нового положительного параметра $a$, который в дальнейшем будет зафиксирован. Рассмотрим уравнение

$$A_j(l) = a. \tag{4.7}$$

Если существует решение $l(a)$ этого уравнения на интервале $\big(l_j + C(t_0)R_{j+1}^{\frac{\alpha}{p-1}},\ BM\big]$, то полагаем $l_{j+1} = l(a)$. В противном случае $l_{j+1} = l_j + C(t_0)R_{j+1}^{\frac{\alpha}{p-1}}$. Здесь $C(t_0)$ — число, определенное при выборе $l_{-1}$, $\alpha$ — число, определенное в теореме 3.1.

**Лемма 4.1.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда существует положительное число $B$, зависящее только от известных параметров, такое, что при выполнении неравенств*

$$A_{j-1}(l_j) \leqslant a, \quad C_p(B_{j-1} \setminus \Omega) \leqslant \frac{1}{B} R_{j-1}^{N-p} a, \quad R_j^{\alpha} \leqslant \frac{1}{B}\, a \tag{4.8}$$

*справедлива оценка $A_j(l_{j+1}) \leqslant a$.*

*Доказательство.* В силу определения $l_{j+1}$ достаточно проверить, что $A_j(BM) \leqslant a$. Можем считать, что $l_j \leqslant M$, так как в противном случае $A_j(l) \equiv 0$ при $l > l_j$. Обозначим

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\delta}_j = BM - l_j, \quad \widetilde{Q}_{jm} = B_j \times \left(\tau_{jm}^* - \widetilde{\delta}_j^{2-p} R_j^p, \tau_{jm}^* + \widetilde{\delta}_j^{2-p}\, R_j^p\right),\\
&\widetilde{L}_{jm} = \widetilde{Q}_{jm} \cap \{u > l_j\}, \quad \widetilde{E}_{jm} = \widetilde{L}_{jm} \cap \{\eta_j(x) < 1\},\\
&\widetilde{F}_{jm} = \widetilde{L}_{jm} \cap \{\eta_j(x) = 1\}, \quad \theta_{jm}^*(t, BM) = \widetilde{\theta}_{jm}(t).
\end{aligned}$$

Займемся оценкой слагаемых, содержащихся в $A_j(BM)$. Для заданного $m$, такого, что $1 \leqslant m \leqslant M^*(j)$, определим, в силу неравенства (4.4), последовательность $n(i)$, $i = 1, \ldots, i(m,j)$, $1 \leqslant n(i) \leqslant M(j-1)$ так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{i(m,j)} \theta_{j-1,n(i)}^k(t) \geqslant \widetilde{\theta}_{jm}^{k-1}(t), \quad i(m,j) \leqslant C_{10} \left(\frac{BM}{\delta_{j-1}}\right)^{2-p}. \tag{4.9}$$

Заметим также, что из определения функций $\eta_j(x), \zeta_j(x)$ следует равенство

$$\zeta_{j-1}(x) \equiv 1, \quad \text{если} \quad \eta_j(x) < 1. \tag{4.10}$$

Представляя первый интеграл правой части (4.6) с $l = BM$ в виде суммы интегралов $\widetilde{E}_{jm}$ и $\widetilde{F}_{jm}$ и используя (4.9), (4.10), первое неравенство в (4.8) и лемму 3.1, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\widetilde{\delta}_j^{p-2}}{R_j^{N+p}} \iint\limits_{\{u>l_j\}} \left[\frac{u(x,t) - l_j}{\widetilde{\delta}_j}\right]^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)} \omega_j^{k-p}(x)\, \widetilde{\theta}_{jm}^{k-1}(t)\, dx\, dt \leqslant\\
&\leqslant \frac{\widetilde{\delta}_j^{p-2}}{R_j^{N+p}} \sum_{i=1}^{i(m,j)} \iint\limits_{\{u>l_{j-1}\}} \left[\frac{u(x,t) - l_{j-1}}{\widetilde{\delta}_j}\right]^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)} \omega_{j-1}^{k-p}(x)\, \theta_{j-1,n(i)}^{k-1}(t)\, dx\, dt +
\end{aligned}$$

$$+ C_{11} \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \frac{1}{R_j^N} \int\limits_{\widetilde{F}_{jm}(t)} [u(x,t) - l_j] \sigma_j^p(x) \, \widetilde{\theta}_{jm}^p(t) \, dx \leqslant$$

$$C_{12} \Big\{ B^{-1-\frac{\lambda}{2}(p-1)} a + B^{2-p} R_{j-1}^{p-N} C_p(B_{j-1} \setminus \Omega) + B^{1+\beta_3} R_j^{\alpha} \Big\}, \quad (4.11)$$

где $\widetilde{F}_{jm}(t) = \{x : (x,t) \in \widetilde{F}_{jm}\}$. При этом воспользовались оценкой

$$\int\limits_{B_j} \Big| \frac{\partial \sigma_j(x)}{\partial x} \Big|^p dx \leqslant C_{13} \Big\{ C_p(B_{j-1} \setminus \Omega) + R_j^N \Big\}, \quad (4.12)$$

следующей из (4.1), (4.2) и неравенства Пуанкаре.

Для оценки второго интеграла в (4.6) при $l = BM$ используем теорему 3.1 и получаем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \frac{1}{R_j^N} \int\limits_{\{u(\cdot,t)>l_j\}} G\Big( \frac{u(x,t) - l_j}{\widetilde{\delta}_j} \Big) \omega_j^k(x) \, \widetilde{\theta}_{jm}^k(t) \, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_{14} \Big\{ C(\varepsilon) \widetilde{\delta}_j^{p-2} R_j^{-N-p} \iint\limits_{\widetilde{E}_{jm}} \Big[ \frac{u(x,t) - l_j}{\widetilde{\delta}_j} \Big]^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)} \omega_j^{k-p}(x) \, \widetilde{\theta}_{j,m}^{k-1}(t) \, dx \, dt +$$

$$+ \varepsilon \widetilde{\delta}_j^{p-2} R_j^{-N-p} \iint\limits_{\widetilde{E}_{jm}} \omega_j^{k-p}(x) \, \widetilde{\theta}_j^{k-1}(t) \, dx \, dt + \widetilde{\delta}_j^{1-p} R_j^{p-N} \int\limits_{B_j} \Big| \frac{\partial \sigma_j}{\partial x} \Big|^p dx +$$

$$+ \widetilde{\delta}_j^{-1} \Big[ R_j^{p-N} \int\limits_{B_j} \Big| \frac{\partial \sigma_j}{\partial x} \Big|^p dx \Big]^{\frac{1}{p}} + R_j^{\alpha} \big( \delta_j^{\beta_1} + \delta_j^{\beta_2} + \delta_j^{\beta_3} \big) \Big\}, \quad (4.13)$$

где $\varepsilon$ — произвольное число из интервала (0,1), $C(\varepsilon)$ — постоянная, зависящая лишь от $\varepsilon$, $\lambda$, $p$.

Оценка первого слагаемого правой части (4.13) следует из (4.11). Используя (4.9), (4.10) и первое неравенство в (4.8), имеем

$$\widetilde{\delta}_j^{p-2} \, R_j^{-N-p} \iint\limits_{\widetilde{E}_{jm}} \omega_j^{k-p}(x) \, \widetilde{\theta}_{j,m}^{k-1}(t) \, dx \, dt \leqslant C_{15} \widetilde{\delta}_j^{p-2} R_j^{-N-p} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{i(m,j)} \iint\limits_{\{u>l_j\}} \Big[ \frac{u(x,t) - l_{j-1}}{\delta_{j-1}} \Big]^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)} \omega_{j-1}^{k-p}(x) \theta_{j-1,n(i)}^{k-1}(t) \, dx \, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_{15} \, \widetilde{\delta}_j^{p-2} \, R_j^{-N-p} \, \delta_{j-1}^{2-p} \, R_{j-1}^{N+p} \, i(m,j) a \leqslant C_{16} \, a. \quad (4.14)$$

Теперь из неравенств (4.11)–(4.14) и предположений (4.8) следует оценка

$$A_j(BM) \leqslant C_{17}\Big\{C(\varepsilon)\Big[B^{-1-\frac{\lambda}{2}(p-1)} + B^{1-p} + B^{\beta_3}\Big] + B^{\beta_1-1} + B^{\beta_2-1} + \varepsilon\Big\}a. \tag{4.15}$$

Выбирая далее достаточно малым число $\varepsilon$, а затем достаточно большим число $B$, получаем из (4.15) $A_j(BM) < a$, что и доказывает утверждение леммы 4.1. □

Возвращаясь опять к определению числа $l_{j+1}$, мы видим, что могут представиться две возможности: $A_j\big(l_j + C(t_0)R_{j+1}^{\frac{\alpha}{p-1}}\big) \leqslant a$, $A_j\big(l_j + C(t_0)R_{j+1}^{\frac{\alpha}{p-1}}\big) > a$. Принимая во внимание, что функция $A_j(l)$ монотонно убывает и непрерывна, и предполагая выполнение условий леммы 4.1, получаем во втором случае существование решения $l(a)$ уравнения (4.7) на интервале $\big[l_j + C(t_0)R_{j+1}^{\frac{\alpha}{p-1}}, BM\big]$. Следовательно, это решение и будет $l_{j+1}$. В первом случае мы выбрали $l_{j+1} = l_j + C(t_0)R_{j+1}^{\frac{\alpha}{p-1}}$. Отметим также ограниченность последовательности $\{l_j\}$.

Закончив с выбором $l_{j+1}$, вернемся к построению последовательности $\{\theta_{jn}(t)\}$, $n = 1, \ldots, M(j)$. Она определяется равенством $\theta_{jn}(t) = \theta^*_{j,m(n)}(t, l_{j+1})$ и подпоследовательность $\{m(1), \ldots, m(M(j))\}$ последовательности $\{1, \ldots, M^*(j)\}$ выбирается так, чтобы выполнялись условия:

1) $$\max\Big\{A_{j,m(1)}(l_{j+1}), \ldots, A_{j,m(M(j))}(l_{j+1})\Big\} = A_j(l_{j+1}) = a, \tag{4.16}$$

   если $l_{j+1} > l_j + C(t_0)R_{j+1}^{\frac{\alpha}{p-1}}$;

2) $$1 \leqslant \theta_{j_1}(t) + \cdots + \theta_{j,M(j)}(t) \leqslant 6 \text{ при } |t - t_0| \leqslant (BM)^{2-p}R_j^p. \tag{4.17}$$

## 5. Оценка сверху последовательности $\{l_j\}$

**Теорема 5.1.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3.1, *леммы* 4.1 *и* $R_0$ *удовлетворяет условию* (4.5). *Тогда существуют положительные числа* $k$, $a$, $\alpha_1$, $K_3$, *зависящие только от известных параметров, такие, что при всех* $j$ *выполнена оценка*

$$\delta_j \leqslant \frac{1}{2}\,\delta_{j-1} + K_3\Big\{R_j^{\alpha_1} + \Big[R_j^{p-N}\,C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)\Big]^{\frac{1}{p-1}}\Big\}. \tag{5.1}$$

*Доказательство.* Зафиксируем $j \geqslant 1$ и будем предполагать, что

$$\delta_j > \frac{1}{2}\,\delta_{j-1}, \quad \delta_j > C(t_0)R_j^{\frac{\alpha}{p-1}}, \tag{5.2}$$

так как в противном случае оценка (5.1) тривиальна. Второе неравенство в (5.2) показывает, что $l_{j+1} = l(a)$, где $l(a)$ — решение уравнения (4.7).

Займемся оценкой слагаемых правой части (4.6) при $l = l_{j+1}$, $m = m(n)$. Обозначим

$$L_{jn} = Q_{jn} \cap \{u > l_j\},$$
$$Q_{jn} = B_j \times \big(\tau^*_{j,m(n)} - \delta_j^{2-p} R_j^p,\ \tau^*_{j,m(n)} + \delta_j^{2-p} R_j^p\big),$$
$$E_{jn} = L_{jn} \cap \{\eta_j(x) < 1\}, \quad F_{jn} = L_{jn} \cap \{\eta_j(x) = 1\}$$

и представим $L_{jn} = L'_{jn} \cup L''_{jn}$, где

$$L'_{jn} = L_{jn} \cap \{u - l_j < \gamma\delta_j\}, \quad L''_{jn} = L_{jn} \cap \{u - l \geqslant \gamma\delta_j\}$$

с некоторым, выбираемым в дальнейшем, $\gamma \in (0, 1)$. Имеем

$$\begin{gathered}
\frac{\delta_j^{p-2}}{R_j^{N+p}} \iint\limits_{L_{jn}} \Big[\frac{u(x,t) - l_j}{\delta_j}\Big]^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)} \omega_j^{k-p}(x)\, \theta_{jn}^{k-1}(t)\, dx\, dt \leqslant \\
\leqslant \gamma^{\frac{\lambda}{2}(p-1)} \delta_j^{p-2} R_j^{-N-p} \Bigg\{ \gamma \iint\limits_{E_{jn}} \omega_j^{k-p}(x)\, \theta_{jn}^{k-1}(t)\, dx\, dt + \\
+ \iint\limits_{F_{jn}} \frac{u(x,t) - l_j}{\delta_j} \sigma_j^{k-p}(x)\, \theta_{jn}^{k-1}(t)\, dx\, dt \Bigg\} + \\
+ \delta_j^{p-2} R_j^{-N-p} \iint\limits_{L''_{jn}} \Big[\frac{u(x,t) - l_j}{\delta_j}\Big]^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)} \omega_j^{k-p}(x)\, \theta_{jn}^{k-1}(t)\, dx\, dt. \qquad (5.3)
\end{gathered}$$

Первый интеграл правой части (5.3) оценивается аналогично неравенству (4.14)

$$\delta_j^{p-2} R_j^{-N-p} \iint\limits_{E_{jn}} \omega_j^{k-p}(x)\, \theta_{jn}^{k-1}(t)\, dx\, dt \leqslant C_{18}\, a. \qquad (5.4)$$

Следующая оценка получается в силу леммы 3.1 и неравенства (4.12)

$$\begin{gathered}
\delta_j^{p-2} R_j^{-N-p} \iint\limits_{F_{jn}} \frac{u(x,t) - l_j}{\delta_j} \sigma_j^{k-p}(x)\, \theta_{jn}^{k-1}(t)\, dx\, dt \leqslant \\
\leqslant C_{19} R_j^{-N} \delta_j^{-1} \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{\{u(\cdot,t)>l_j\}} [u(x,t) - l_j]\, \sigma_j^p(x)\, \theta_{jn}^p(t)\, dx \leqslant \\
\leqslant C_{20} \Big\{ \delta_j^{1-p} R_j^{p-N} C_p(B_{j-1} \setminus \Omega) + \delta_j^{-1} \Big[ R_j^{p-N} C_p(B_{j-1} \setminus \Omega) \Big]^{\frac{1}{p-1}} +
\end{gathered}$$

$$+\,\delta_j^{\beta_3}\,R_j^{\alpha}+\delta_j^{-1}\,R_j^{p}\Big\}. \quad (5.5)$$

Определим функцию $w_j(x,t)$ равенством (3.5) при $l=l_j$, $\delta=\delta_j$. Для нее выполнена оценка

$$w_j(x,t)\geqslant C_{21}(\gamma)\Big(\frac{u-l_j}{\delta_j}\Big)^{\frac{1}{\rho(\lambda)}} \quad \text{при} \quad (x,t)\in L''_{jn} \qquad (5.6)$$

с постоянной $C_{21}(\gamma)$, зависящей от известных параметров и $\gamma$. В дальнейшем зависимость постоянных от дополнительных, к известным, параметров $\varepsilon,\gamma$ указывается в виде $C_i(\varepsilon), C_i(\gamma)$.

Обозначим $z_1=\big(1+\frac{\lambda}{2}(p-1)\big)\rho(\lambda)$ и оценим последний интеграл в (5.3) по неравенству Юнга

$$\iint\limits_{L''_{jn}}\Big[\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\Big]^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)}\omega_j^{k-p}(x)\,\theta_{jn}^{k-1}(t)\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\,C_{22}(\gamma)\iint\limits_{L''_{jn}}w_j^{\rho(\lambda)}(x,t)\big[\omega_j(x)\,\theta_{jn}(t)\big]^p\,dx\,dt+$$
$$+\,C_{23}(\varepsilon)\iint\limits_{L''_{jn}}\big[w_j(x,t)\big]^{(z_1-\rho(\lambda))z_2+\rho(\lambda)}\big[\omega_j(x)\,\theta_{jn}(t)\big]^{(k-2p)z_2+p}\,dx\,dt, \qquad (5.7)$$

где $\varepsilon$ — произвольное число из интервала (0,1), число $z_2$ находится из условия

$$(z_1-\rho(\lambda))z_2+\rho(\lambda)=p\,\frac{N+\rho(\lambda)}{N}. \qquad (5.8)$$

Условие на $\lambda$ обеспечивает выполнение неравенства $z_2>1$.

В силу определения функции $G$ в теореме 3.1 имеем

$$w_j^{\rho(\lambda)}(x,t)\leqslant C_{24}(\gamma)\,G\Big(\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\Big) \quad \text{при} \quad (x,t)\in L''_{jn}. \qquad (5.9)$$

Используя неравенства (4.4) и (5.2), определим последовательность $q(i)$, $i=1,\dots,I_j(n)$, $1\leqslant q(i)\leqslant M(j-1)$ так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{I_j(n)}\theta^k_{j-1,q(i)}(t)\geqslant\theta^p_{jn}(t), \quad I_j(n)\leqslant C_{25}\Big(\frac{\delta_j}{\delta_{j-1}}\Big)^{2-p}. \qquad (5.10)$$

Обозначим $E''_{jn}=E_{jn}\cap L''_{jn}$, $F''_{jn}=F_{jn}\cap L''_{jn}$. Неравенства (5.9), (5.10), (5.2), равенство (4.10) и лемма 4.1 дают нам возможность получить следующую оценку

$$\iint\limits_{E''_{jn}} w_j^{\rho(\lambda)}(x,t)\big[\omega_j(x)\,\theta_{jn}(t)\big]^p\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_{26}\,(\gamma)\sum_{i=1}^{I_j(n)}\iint\limits_{E''_{jn}} G\Big(\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\Big)\omega_{j-1}^k(x)\theta_{j-1,q(i)}^k(t)\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_{27}\,(\gamma)\delta_{j-1}^{2-p}R_{j-1}^p\sum_{i=1}^{I_j(n)}\operatorname*{ess\,sup}_t\int\limits_{\{u(\cdot,t)>l_{j-1}\}} G\Big(\frac{u(x,t)-l_{j-1}}{\delta_{j-1}}\Big)\times$$

$$\times\,\omega_{j-1}^k(x)\theta_{j-1,q(i)}^k(t)\,dx\,dt \leqslant C_{27}\,(\gamma)\delta_{j-1}^{2-p}R_{j-1}^{N+p}I_j(n)\,A_{j-1}(l_j)\leqslant$$

$$\leqslant C_{28}\,(\gamma)\delta_j^{2-p}R_j^{N+p}\,a. \quad (5.11)$$

Представляя второй интеграл в (5.7) в виде суммы интегралов по $E''_{jn}$ и $F''_{jn}$ и используя неравенства (5.5), (5.11), получаем

$$\iint\limits_{L''_{jn}} w_j^{\rho(\lambda)}(x,t)\,\big[\omega_j(x)\,\theta_{jn}(t)\big]^p\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_{29}\,(\gamma)\delta_j^{2-p}R_j^{N+p}\Big\{a+\delta_j^{1-p}R_j^{p-N}\,C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)+$$

$$+\,\delta_j^{-1}\big[R_j^{p-N}\,C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)\big]^{\frac{1}{p-1}}+\delta_j^{\beta_3}R_j^{\alpha}+\delta_j^{-1}R_j^p\Big\}. \quad (5.12)$$

Второй интеграл правой части (5.7) оцениваем, применяя вначале неравенство Гельдера, затем теорему вложения, и получаем

$$\iint\limits_{L''_{jn}}[w_j(x,t)]^{(z_1-\rho(\lambda))z_2+\rho(\lambda)}[\omega_j(x)\theta_{jn}(t)]^{(k-2p)z_2+p}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant\Big\{\operatorname*{ess\,sup}_t\int\limits_{L''_{jn}(t)} w_j^{\rho(\lambda)}(x,t)[\omega_j(x)\theta_{jn}(t)]^p\,dx\Big\}^{\frac{p}{N}}\times$$

$$\times\iint\limits_{L_{jn}}\left|\frac{\partial}{\partial x}\Big\{w_j(x,t)\,[\omega_j(x)\theta_{jn}(t)]^{(\frac{k}{p}-2)z_2+\frac{N-p}{N}}\Big\}\right|^p dx\,dt. \quad (5.13)$$

Заметим, что аналогично неравенству (5.12) получается следующая оценка первого интеграла в правой части (5.13)

$$\operatorname*{ess\,sup}_t\iint\limits_{L''_{jn}(t)} w_j^{\rho(\lambda)}(x,t)\,[\omega_j(x)\,\theta_{jn}(t)]^p\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_{30}(\gamma)\, R_j^N \Big\{ a + \delta_j^{\beta_3} R_j^{\alpha} + \delta_j^{-1} R_j^p + \delta_j^{1-p} R_j^{p-N} C_p(B_{j-1} \setminus \Omega) + \\ + \delta_j^{-1} \big[ R_j^{p-N} C_p(B_{j-1} \setminus \Omega) \big]^{\frac{1}{p-1}} \Big\}. \quad (5.14)$$

Зафиксируем значение $k$

$$k = \max \left\{ 2p,\ \frac{p}{p-1},\ \left( \frac{p^2}{N} + 2pz_2 \right) (z_2 - 1)^{-1} \right\} + 1.$$

В силу теоремы 3.1 и (4.12) последний интеграл в (5.13) оценивается следующим образом

$$\iint\limits_{L_{jn}} \left| \frac{\partial}{\partial x} \Big\{ w_j(x,t)\, [\omega_j(x)\theta_{jn}(t)]^{(\frac{k}{p}-2)z_2 + \frac{N-p}{N}} \Big\} \right|^p dx\, dt \leqslant \\ \leqslant C_{31} \Big\{ I_1 + I_2 + \delta_j^{1-p} R_j^p C_p(B_{j-1} \setminus \Omega) + \\ + \delta_j^{-1} R_j^N \big[ R_j^{p-N} C_p(B_{j-1} \setminus \Omega) \big]^{\frac{1}{p-1}} + R_j^{N+\alpha} \delta_j^{\beta_4} \Big\}, \quad (5.15)$$

где $\beta_4 = \min\{-1, \beta_1, \beta_2, \beta_3 < 0\}$,

$$I_1 = \frac{1}{R_j^p} \iint\limits_{E_{jn}} \Big[ 1 + \frac{u(x,t) - l_j}{\delta_j} \Big]^{1 + \frac{\lambda}{2}(p-1)} [\omega_j(x)\theta_{jn}(t)]^k\, dx\, dt,$$

$$I_2 = \iint\limits_{L_{jn}} w_j^p(x,t) \Big| \frac{\partial \omega_j(x)}{\partial x} \Big|^p [\omega_j(x)\theta_{jn}(t)]^k\, dx\, dt.$$

Интеграл $I_1$ оцениваем, используя определение $l_{j+1}$ и неравенство (5.4),

$$I_1 \leqslant C_{32} \Big\{ \delta_j^{2-p} R_j^N A_{j,m(n)}(l_{j+1}) + \\ + \frac{1}{R_j^p} \iint\limits_{E_{jn}} [\omega_j(x)\theta_{jn}(t)]^k\, dx\, dt \Big\} \leqslant C_{33} \delta_j^{2-p} R_j^N\, a. \quad (5.16)$$

Интеграл $I_2$ представим в виде суммы интегралов по $E_{jn}$ и $F_{jn}$ и оценим каждый из интегралов. Используя последнее неравенство в (3.8), ограниченность последовательности $\{\delta_j\}$ и оценки (4.12), (5.16), получаем

$$\iint\limits_{L_{jn}} w_j^p(x,t) \Big| \frac{\partial w_j}{\partial x} \Big|^p [\omega_j(x)\theta_{jn}(t)]^k\, dx\, dt \leqslant$$

$$
\leqslant C_{34}\Big\{ \iint\limits_{L_{jn}} w_j^p(x,t)\Big[\Big|\frac{\partial\zeta_j}{\partial x}\Big|^p+\Big|\frac{\partial\sigma_j}{\partial x}\Big|^p\Big][\omega_j(x)\theta_{jn}(t)]^k\,dx\,dt+
$$

$$
+\frac{1}{R_j^p}\iint\limits_{E_{jn}}\Big[\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\Big]^{\frac{p}{\rho(\lambda)}}[\omega_j(x)\theta_{jn}(t)]^k\,dx\,dt\Big\}\leqslant
$$

$$
\leqslant C_{35}\Big\{\delta_j^{3-2p}R_j^p\big[C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)+R_j^N\big]+I_1\Big\}\leqslant
$$

$$
\leqslant C_{36}\delta_j^{2-p}R_j^N\Big\{a+\delta_j^{1-p}R_j^{p-N}\big[C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)+R_j^N\big]\Big\}. \quad (5.17)
$$

Неравенства (5.3)–(5.5), (5.7), (5.12), (5.13)–(5.17) приводят к следующей оценке первого слагаемого в $A_{j,m(n)}(l_{j+1})$:

$$
\delta_j^{p-2}R_j^{-N-p}\iint\limits_{L_{jn}}\Big[\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\Big]^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)}\omega_j^{k-p}(x)\theta_{jn}^{k-p}(t)\,dx\,dt\leqslant
$$

$$
\leqslant C_{37}\Big\{\big[\gamma^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)}+\varepsilon C_{38}(\gamma)\big]a+\delta_j^{1-p}R_j^{p-N}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)+
$$

$$
+\delta_j^{-1}\big[R_j^{p-N}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)\big]^{\frac{1}{p-1}}+\delta_j^{\beta_4}R_j^{\alpha}\Big\}+C_{39}(\varepsilon)\,C_{40}(\gamma)\Big\{a+
$$

$$
+\delta_j^{1-p}R_j^{p-N}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)+\delta_j^{-1}\big[R_j^{p-N}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)\big]^{\frac{1}{p-1}}+\delta_j^{\beta_4}R_j^{\alpha}\Big\}^{1+\frac{p}{N}}. \quad (5.18)
$$

Займемся теперь оценкой второго слагаемого в $A_{j,m(n)}(l_{j+1})$. Применяя теорему 3.1 и неравенство (4.12), получаем

$$
\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\frac{1}{R_j^N}\int\limits_{\{u(\cdot,t)>l_j\}}G\Big(\frac{u(x,t)-l_j}{\delta_j}\Big)\omega_j^k(x)\theta_{jn}^k(t)\,dx\leqslant
$$

$$
\leqslant C_{41}\Big\{I_3+\delta_j^{1-p}R_j^{p-N}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)+
$$

$$
+\delta_j^{-1}\big[R_j^{p-N}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)\big]^{\frac{1}{p-1}}+R_j^{\alpha}\delta_j^{\beta_4}\Big\}, \quad (5.19)
$$

где

$$
I_3=\delta_j^{p-2}R_j^{-N-p}\iint\limits_{E_{jn}}\Big[1+\frac{u-l_j}{\delta_j}\Big]^{1-\frac{\lambda}{2}(p-1)}\times
$$

$$
\times\Big(\frac{u-l_j}{\delta_j}\Big)^{\lambda(p-1)}\omega_j^{k-p}(x)\theta_{jn}^{k-1}(t)\,dx\,dt.
$$

Для оценки $I_3$ представим последний интеграл в виде суммы двух интегралов по $E'_{jn}$ и $E''_{jn}$ и получаем

$$
\begin{gathered}
I_3 \leqslant C_{42}\gamma^{\lambda(p-1)}\delta_j^{p-2}R_j^{-N-p}\iint\limits_{E'_{jn}}\omega_j^{k-p}(x)\theta_j^{k-1}(t)\,dx\,dt+\\
+C_{42}\gamma^{-1+\frac{\lambda}{2}(p-1)}\delta_j^{p-2}R_j^{-N-p}\iint\limits_{E''_{jn}}\Big[\frac{u-l_j}{\delta_j}\Big]^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)}\omega_j^{k-p}(x)\theta_{jn}^{k-1}(t)\,dx\,dt.
\end{gathered}
\tag{5.20}
$$

Таким образом, из равенства $A_j(l_{j+1})=a$, (4.16) и оценок (5.18)–(5.20) и (5.4) имеем

$$
\begin{gathered}
a \leqslant C_{43}\bigg\{\big[\gamma^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)}+\gamma^{\lambda(p-1)}+\varepsilon\,C_{44}(\gamma)\big]\,a+\\
+C_{44}(\gamma)\bigg\{\delta_j^{1-p}R_j^{p-N}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)+\delta_j^{-1}\big[R_j^{p-N}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)\big]^{\frac{1}{p-1}}+\\
+\delta_j^{\beta_4}R_j^{\alpha}+C_{45}(\varepsilon)\Big[a^{1+\frac{p}{n}}+\Big(\delta_j^{1-p}R_j^{p-N}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)+\\
+\delta_j^{-1}\big[R_j^{p-N}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)\big]^{\frac{1}{p-1}}+\delta_j^{\beta_4}R_j^{\alpha}\Big)^{1+\frac{p}{N}}\Big]\bigg\}.
\end{gathered}
\tag{5.21}
$$

Далее, вначале фиксируем $\gamma$, удовлетворяющим равенству

$$
(1+C_{43})\big[\gamma^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)}+\gamma^{\lambda(p-1)}\big]=\frac{1}{5},
\tag{5.22}
$$

затем выбираем $\varepsilon$ из условия

$$
\varepsilon\big(C_{43}\,C_{44}(\gamma)+1\big)=\frac{1}{5}.
\tag{5.23}
$$

После того, как зафиксированы значения $\gamma$ и $\varepsilon$, определяем число $a$ следующим равенством

$$
a^{\frac{p}{N}}\big[C_{44}(\gamma)\,C_{45}(\varepsilon)+1\big]=\frac{1}{5}.
\tag{5.24}
$$

Учитывая равенства (5.22)–(5.25), получаем из неравенства (5.21) следующую оценку

$$
\begin{gathered}
a \leqslant C_{46}\delta_j^{1-p}R_j^{p-N}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)+C_{46}\big[\delta_j^{1-p}R_j^{p-n}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)\big]^{\frac{1}{p-1}}+\\
+C_{46}\delta_j^{\beta_4}R_j^{\alpha}+C_{46}\big[\delta_j^{1-p}R_j^{p-n}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)\big]^{1+\frac{p}{N}}+\\
+C_{46}\big[\delta_j^{1-p}R_j^{p-N}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)\big]^{\frac{p+N}{N(p-1)}}+C_{46}\big[\delta_j^{\beta_4}R_j^{\alpha}\big]^{1+\frac{p}{N}}.
\end{gathered}
\tag{5.25}
$$

Окончательно следует, что хотя бы одно слагаемое правой части (5.25) превосходит $\frac{a}{6}$, что приводит к справедливости одной из оценок

$$\delta_j \leqslant C_{47} \left\{ R_j^{p-M} C_p(B_{j-1} \setminus \Omega) \right\}^{\frac{1}{p-1}}, \quad \delta_j \leqslant C_{47} R_j^{\frac{\alpha}{\beta_4}}. \tag{5.26}$$

Теперь неравенство (5.1) следует из (5.6) и доказательство теоремы 5.1 закончено. □

Вернемся к проверке условий (4.8) леммы 4.1. Очевидно, что последнее неравенство в (4.8) обеспечивается выбором $R_0$, подчиненным, дополнительно к (4.5), неравенству

$$R_0^{\alpha} < B^{-1} a, \tag{5.27}$$

в котором справа стоит уже фиксированная постоянная. Второе неравенство в (4.8) обеспечивается выборами $R_0$ и последовательности $\{R_j\}$, но при этом уже будет использоваться неравенство (3.1).

Итак, предполагаем сейчас справедливым неравенство (3.1). Тогда можем выбрать $R_0$ так, чтобы

$$\int_0^{R_0} \left\{ \frac{C_p(B(x_0, r) \setminus \Omega)}{r^{N-p}} \right\}^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} < \left( \frac{a}{B} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-1}{p} \ln 2. \tag{5.28}$$

Неравенство (5.28) влечет за собой следующее неравенство, справедливое при любом $j = 1, 2, \ldots$

$$\int_{R_j'}^{R_j''} \left\{ \frac{C_p(B(x_0, r) \setminus \Omega)}{r^{N-p}} \right\}^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} < \left( \frac{a}{B} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-1}{p} \ln 2,$$

где $R_j' = 2^{-j-1+\frac{1}{p}} R_0$, $R_j'' = 2^{-j} R_0$. Тогда можно выбрать $R_j \in [R_j', R_j'']$ так, чтобы

$$\left\{ R_j^{p-N} C_p(B_j \setminus \Omega) \right\}^{\frac{1}{p-1}} \frac{p-1}{p} \ln 2 = \int_{R_j'}^{R_j''} \left\{ \frac{C_p(B(x_0, r) \setminus \Omega)}{r^{N-p}} \right\}^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} \tag{5.29}$$

и, следовательно, удовлетворить второе неравенство в (4.8).

Для обеспечения выполнения при всех $j = 1, 2, \ldots$ первого неравенства (4.8) достаточно проверить справедливость неравенства

$A_0(l_1) \leqslant a$. А для установления последнего неравенства достаточно выполнение оценки $A_0(BM) \leqslant a$. Непосредственно из (4.6) имеем

$$A_0(BM) \leqslant \frac{1}{M} \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \frac{1}{R_0^N} \int\limits_{\Omega} [u(x,t)]_+ \, dx.$$

И, следовательно, для выполнения первого условия в (4.8) при всех $j$ достаточно выполнение неравенства

$$\frac{1}{M} \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \frac{1}{R_0^N} \int\limits_{\Omega} [u(x,t)]_+ \, dx \leqslant a. \tag{5.30}$$

Подводя сказанное, сформулируем следующую лемму.

**Лемма 5.1.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3.1 *и неравенство* (3.1)*. Тогда существуют* $R_0 > 0$ *и последовательность* $\{R_j\}$, $R_j \in [2^{-j-1-\frac{1}{p}} R_0,\, 2^{-j} R_0]$ *такие, что для решения* $u(x,t)$*, удовлетворяющего условию* (5.30)*, выполнены неравенства* (4.8) *при всех* $j = 1, 2, \ldots$.

В дальнейшем считаем, что $R_0$ и $R_j$ выбраны в соответствии с леммой 5.1.

**Лемма 5.2.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3.1 *и неравенства* (3.1), (5.30)*. Тогда справедлива оценка*

$$\bar{l} = \lim_{j\to\infty} l_j \leqslant K_4 \Biggl\{ \biggl[ \frac{1}{R_0^N} \operatorname*{ess\,sup}_{t} \int\limits_{\Omega} [u(x,t)]_+ \, dx \biggr]^{\alpha_2} + \\ + R_0^{\alpha_1} + \int\limits_0^{2R_0} \left( \frac{C_p(B(x_0,r) \setminus \Omega)}{r^{N-p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} \Biggr\} \tag{5.31}$$

*с* $\alpha_1$*, определенным в теореме* 5.1*,* $\alpha_2 = \min\{\frac{2}{2+\lambda(p-1)}, \frac{1}{2-\lambda}\}$ *и постоянной* $K_3$*, зависящей лишь от известных параметров и* $t_0$.

*Доказательство.* Суммируя неравенства (5.1), получаем при любом $J \geqslant 1$

$$\sum_{j=1}^{J} \delta_j \leqslant \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J} \delta_{j-1} + K_3 \sum_{j=1}^{J} \Bigl\{ R_j^{\alpha_1} + \Bigl[ R_j^{p-N} C_p(B_{j-1} \setminus \Omega) \Bigr]^{\frac{1}{p-1}} \Bigr\}.$$

Отсюда и из (5.29) имеем

$$l_J \leqslant C_{48} \Biggl\{ \delta_0 + R_0^{\alpha_1} + \int\limits_0^{R_0} \biggl[ \frac{C_p(B(x_0,r) \setminus \Omega)}{r^{N-p}} \biggr]^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} \Biggr\}. \tag{5.32}$$

Оценим теперь $\delta_0$. Если $l_1 = C(t_0)R_1^{\frac{\alpha}{p-1}}$, то неравенство (5.31) непосредственно следует из (5.32). Если же $l_1$ определено равенством $A_1(l_1) = a$, то выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\frac{\delta_0^{p-2}}{R_0^{N+p}} \iint\limits_{\Omega_T} \left(\frac{[u(x,t)]_+}{\delta_0}\right)^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)} dx\,dt \geqslant \frac{a}{3},$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \frac{1}{R_0^N} \int\limits_{\Omega} \frac{[u(x,t)]_+}{\delta_0}\,dx \geqslant \frac{a}{3},$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \frac{1}{R_0^N} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{[u(x,t)]_+}{\delta_0}\right)^{2-\lambda} dx \geqslant \frac{a}{3}.$$

Отсюда, используя ограниченность $u(x,t)$ и неравенство (5.30), получаем оценку

$$\delta_0 \leqslant C_{49} \left\{ \frac{1}{R_0^N} \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{\Omega} [u(x,t)]_+\,dx \right\}^{\alpha_2}, \tag{5.33}$$

что и доказывает (5.31). □

**Замечание 5.1.** Отметим, что выбор последовательности $\{l_j\}$ зависит от выбора $R_0$, так что и $\bar{l}$ зависит от $R_0$. Из доказательства леммы 5.1 и теоремы 5.2 следует, что оценка (5.31) остается справедливой при замене $R_0$ на произвольное число $R_0' \in (0, R_0]$.

## 6. Доказательство теоремы 2.1

**Определение 6.1.** *Определим для произвольного ограниченного множества $E \subset B(x_0, \frac{1}{2}) \times (0,T)$ параболическую $p$-емкость $\Gamma_p(E)$ равенством*

$$\Gamma_p(E) = \inf_{\varphi \in \mathfrak{M}(E)} \left\{ \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_{B(x_0,1)} |\varphi(x,t)|^p\,dx + \int\limits_0^T \int\limits_{B(x_0,1)} \left|\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}\right|^p dx\,dt \right\},$$

*где $\mathfrak{M}(E) = \big\{\varphi(x,t) \in C(0,T; L_p(B(x_0,1)) \cap L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(B(x_0,1)) : \varphi(x,t) \geqslant 1$ при $(x,t) \in E\big\}$.*

Заметим (см. [8]), что для произвольной функции $\psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(B(x_0, 1))$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{B(x_0,r)} |\psi(x)|^p dx \leqslant C_{50}\, r^p \int\limits_{B(x_0,1)} \left|\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}\right|^p dx \quad \text{при} \quad 0 < r < \frac{1}{2}, \tag{6.1}$$

из которого немедленно следует оценка

$$\operatorname{mes} E \leqslant C_{50}\, r^p \Gamma_p(E), \text{ если } E \subset B(x_0, r) \times (t_0 - r^p,\, t_0 + r^p). \qquad (6.2)$$

Будем предполагать, что решение $u(x,t)$ уравнения (1.1) удовлетворяет условию

$$\xi_0(x)\ \theta_0(t)\,[u(x,t)-1] \in L_p\big(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\big) \qquad (6.3)$$

с функцией $\xi_0(x)$, определенной в начале раздела 4, и функцией $\theta_0 \in C_0^\infty(0,T)$, $\theta_0(t) \equiv 1$ при $t \in \left[\frac{t_0}{2}, \frac{T+t_0}{2}\right]$, $0 \leqslant \theta_0(t) \leqslant 1$, $\left|\frac{d\theta_0(t)}{dt}\right| \leqslant C_{51}(t_0)$.

Обозначим $Q_r = B(x_0, r) \times (t_0 - r^p,\, t_0 + r^p)$, $Q'_r = Q_r \cap \Omega_T$.

**Теорема 6.1.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3.1 *и* (3.1)*. Тогда для произвольного решения* $u(x,t)$ *уравнения* (1.1)*, удовлетворяющего условию* (6.3) *и неравенствам* (5.30) *и* $\bar{l} < 1$*, выполнена оценка*

$$\inf\left\{ l : \int\limits_0^{r_0} \left[\frac{\Gamma_p(\overline{Q}'_r \cap \{u > l\})}{r^N}\right]^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} < \infty \right\} \leqslant \bar{l}, \qquad (6.4)$$

*где* $\bar{l}$ *определено в* (5.3)*,* $r_0 \leqslant \frac{1}{2}$*,* $r_0^p \leqslant \frac{1}{2}\min[t_0,\, T - t_0]$.

*Доказательство.* Нужно доказать неравенство

$$\int\limits_0^{r_0} \left[\frac{\Gamma_p(\overline{Q}'_r \cap \{u > \bar{l} + \varepsilon\})}{r^N}\right]^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} < \infty \qquad (6.5)$$

для любого $\varepsilon \in (0, 1 - \bar{l})$.

Продолжим функцию $u(x,t)$ на $\mathcal{D}_1 = B_1 \times \left(\frac{t_0}{2}, \frac{T+t_0}{2}\right)$, $B_1 = B(x_0, R_1)$, полагая ее равной единице вне $\Omega_T$. В силу (6.3) так продолженная функция принадлежит $L_p\big(\frac{t_0}{2}, \frac{T+t_0}{2}; W_2^1(B_1)\big)$.

Определим функцию

$$w_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\int\limits_{\bar{l}+\varepsilon}^{u(x,t)} \left(\frac{s-\bar{l}}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{p}+\frac{\lambda}{2p}} \left(\frac{s-\bar{l}-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{-\frac{\lambda}{p}} ds\right]_+ \quad \text{при } (x,t) \in \mathcal{D}_1$$

и заметим, что

$$w_\varepsilon(x,t) \geqslant \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{2p}\right)^{-1}\left[2^{1-\frac{1}{p}-\frac{\lambda}{2p}} - 1\right] = C_{52} > 0$$
$$\text{при } \ (x,t) \in \mathcal{D}_1 \cap \{u > \bar{l} + 2\varepsilon\}. \qquad (6.6)$$

Мы предполагаем, что при некотором $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{D}\cap\{u > \bar{l}+2\varepsilon\}$ имеет положительную меру, ибо, в противном случае, неравенство (6.5) тривиально.

Далее $\{R_j\}$ — последовательность, выбранная при доказательстве леммы 5.1, $B_j$, $\xi_j(x)$, $\eta_j(x)$, $\zeta_j(x)$ — множество и функции, определенные в п. 4. Пусть $J$ — такое число, что $4R_j^p \leqslant \min(t_0, T-t_0)$, и предполагаем в дальнейшем $j \geqslant J$. Разделим при каждом $j$ отрезок $[t_0-R_j^p, t_0+R_j^p]$ точками $\tau(j,i)$, $i=1,\ldots,I(\varepsilon)$ на интервалы длины $\frac{4}{9}\varepsilon^{2-p}R_j^p$ и определим функции

$$\overline{\theta}_{ji}(t) = \overline{\theta}\big(\varepsilon^{p-2}R_j^{-p}(t-\tau(j,i))\big),\ j=J(1),\ J(1)+1,\ldots,\ i=1,\ldots,I(\varepsilon),$$

где $\overline{\theta}$ — та же функция, что и в (4.3).

Обозначим $Q_j = B_j\times(t_0-R_j^p, t_0+R_j^p)$, $Q_j' = Q_j\cap\Omega_T$, $Q_j'' = Q_j'\setminus G_j$, $G_j = \{x\in B_j\cap\Omega : g_{j-1}(x) > \frac{1}{3}\}\times(t_0-R_j^p, t_0+R_j^p)$, где $g_{j-1}(x)$ — функция, удовлетворяющая условию (4.1).

Следующие два неравенства получаются из определений $p$-емкости $\Gamma_p$, функции $g_i(x)$ и оценки (6.6):

$$\Gamma_p(G_{j+1}) \leqslant C_{53}\, R_j^p\big[C_p(B_j\setminus\Omega) + R_j^N\big], \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_p\big(Q_{j+1}''\cap\{u > \bar{l}+2\varepsilon\}\big) &\leqslant \\ \leqslant C_{52}^{-p}\sum_{i=1}^{I(\varepsilon)}&\Bigg\{\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\int\limits_{B_j} w_\varepsilon^p(x,t)\,\omega_j^k(x)\,\overline{\theta}_{ji}^k(t)\,dx + \\ &+ \iint\limits_{Q_{ji}}\Big|\frac{\partial}{\partial x}\big(w_\varepsilon(x,t)\,[\omega_j(x)\,\overline{\theta}_{ji}(t)]^{\frac{k}{p}}\big)\Big|^p dx\,dt\Bigg\}.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Для оценки второго интеграла в (6.8) воспользуемся теоремой 3.1 и оценкой (4.12). Получаем

$$\begin{aligned}\iint\limits_{L_{ji}(\varepsilon)}\Big|\frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial x}\Big|^p\omega_j^k(x)\,\overline{\theta}_{ji}^k(t)\,dx\,dt \leqslant x \\ \leqslant C_{54}\Bigg\{R_j^{-p}\iint\limits_{E_{ji}(\varepsilon)}\Big[\frac{u(x,t)-\bar{l}}{\varepsilon}\Big]^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)}\omega_j^{k-p}(x)\,\overline{\theta}_{ji}^{k-1}(t)\,dx\,dt + \\ + \varepsilon^{3-2p}\,R_j^pC_p(B_{j-1}\setminus\Omega) + \varepsilon^{1-p}\,\Big[R_j^{p+N(p-2)}C_p(B_{j-1}\setminus\Omega)\Big]^{\frac{1}{p-1}} + \\ + \varepsilon^{\beta_4}R_j^{N+\alpha}\Bigg\}\end{aligned} \tag{6.9}$$

с тем же числом $\beta_4$, что и в неравенстве (5.15). Здесь

$$\begin{aligned}
&L_{ji}(\varepsilon)=\{Q_{ji}(\varepsilon)\cap\Omega_T\}\cap\{u>\bar l+\varepsilon\},\\
&Q_{ji}(\varepsilon)=B_j\times\big(\tau(j,i)-\varepsilon^{2-p}R_j^p,\ \tau(j,i)+\varepsilon^{2-p}R_j^p\big),\\
&E_{ji}(\varepsilon)=L_{ji}(\varepsilon)\cap\{\eta_j(x)<1\},\ F_{ji}(\varepsilon)=L_{ji}(\varepsilon)\cap\{\eta_j(x)=1\}.
\end{aligned}$$

Используя (4.4), можем выбрать подпоследовательность $\theta_{j,n(i,m)}(t)$, $m=1,\dots,M(j,i)$, последовательности $\theta_{jn}(t)$, $n=1,\dots,M(j)$, определенной в п. 4, так, чтобы

$$\overline{\theta}_{ji}(t)\leqslant\sum_{m=1}^{M(j,i)}\theta_{j,n(i,m)}(t),\quad M(j,i)\leqslant C_{55}\delta_j^{p-2}. \tag{6.10}$$

Оценивая $\overline{\theta}_{ji}(t)$ в силу неравенства (6.10) и применяя лемму 4.1, имеем

$$\begin{aligned}
&R_j^{-p}\iint\limits_{E_{ji}(\varepsilon)}\Big[\frac{u(x,t)-\bar l}{\varepsilon}\Big]^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)}\omega_j^{k-p}(x)\,\overline{\theta}_{ji}^{k-1}(t)\,dx\,dt\leqslant\\
&\leqslant C_{56}(\varepsilon)\sum_{m=1}^{M(j,i)}\iint\limits_{L_{j,n(i,m)}}[u(x,t)-l_j]^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)}\omega_j^{k-p}(x)\,\theta_{j,n(i,m)}^{k-1}(t)\,dx\,dt\leqslant\\
&\leqslant C_{56}(\varepsilon)\,M(j,i)\,\delta_j^{3-p+\frac{\lambda}{2}(p-1)}R_j^N\,A_j(l_{j+1})\leqslant C_{57}(\varepsilon)\,\delta_j\,R_j^N.
\end{aligned}\tag{6.11}$$

Для получения двух следующих оценок заметим, что $u(x,t)-$ $-l_j\geqslant\varepsilon$ при $(x,t)\in L_{ji}(\varepsilon)$, $w_\varepsilon(x,t)\leqslant C_{58}(\varepsilon)$. Используя (6.10), оценку $A_j(l_{j+1})\leqslant a$, а во втором неравенстве и оценку (4.1), имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{B_j}w_\varepsilon^p(x,t)\,\omega_j^k(x)\,\overline{\theta}_{ji}^k(t)\,dx\leqslant\\
&\leqslant C_{59}(\varepsilon)\max_{1\leqslant n\leqslant M(j)}\int\limits_{L_{ji}(\varepsilon,t)}(u(x,t)-l_j)\omega_j^k(x)\,\theta_{jn}^k(t)\,dx\leqslant\\
&\leqslant C_{59}(\varepsilon)\,\delta_j\,R_j^N,
\end{aligned}\tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{Q_{ji}}w_\varepsilon^p(x,t)\,\omega_j^{k-p}(x)\,\overline{\theta}_{ji}^k(t)\Big|\frac{\partial\omega_j}{\partial x}\Big|^p dx\,dt\leqslant\\
&\leqslant C_{60}(\varepsilon)\Bigg\{\sum_{m=1}^{M(j,i)}\iint\limits_{L_{ji}}[u(x,t)-l_j]^{1+\frac{\lambda}{2}(p-1)}\omega_j^{k-p}(x)\,\theta_{j,n(i,m)}^k(t)\Big|\frac{\partial\xi_j}{\partial x}\Big|^p dx\,dt+
\end{aligned}$$

$$+ R_i^p \int\limits_{B_i} \Big|\frac{\partial \zeta_j}{\partial x}\Big|^p dx \Bigg\} \leqslant C_{61}(\varepsilon)\big\{\delta_j R_j^N + R_j^p[C_p(B_{j-1}\setminus\Omega) + R_j^N]\big\}. \quad (6.13)$$

Неравенства $C_p(B_{j-1}\setminus\Omega) \leqslant C_{62} R_j^{N-p}$, (6.8), (6.9)–(6.13) приводят к оценке

$$\Gamma_p\big(Q''_{j+1}\cap\{u>\bar l+2\varepsilon\}\big) \leqslant C_{62}(\varepsilon)\Big\{\delta_j R_j^N + R_j^p\, C_p(B_{j-1}\setminus\Omega) + R_j^{N+\alpha}\Big\}. \quad (6.14)$$

Из определения $\Gamma_p$ и из (6.7), (6.14) следует

$$\Gamma_p\big(Q'_{j+1}\cap\{u>\bar l+2\varepsilon\}\big) \leqslant C_{63}(\varepsilon)\Big\{\delta_j R_j^N + R_j^p\, C_p(B_{j-1}\setminus\Omega) + R_j^{N+\alpha}\Big\}. \quad (6.15)$$

Отсюда, из (5.29) и ограниченности последовательности $\{\delta_j\}$ получаем

$$\int\limits_0^{R_J}\Big\{\frac{\Gamma_p(\{u>\bar l+2\varepsilon\}\cap Q_r)}{r^N}\Big\}^{\frac{1}{p-1}}\,\frac{dr}{r} \leqslant C_{64}(\varepsilon)\Bigg\{\sum_{i=J}^{\infty}\delta_j + {}$$
$$+\int\limits_0^{R_J}\Big[\frac{C_p(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{N-p}}\Big]^{\frac{1}{p-1}}\,\frac{dr}{r} + \sum_{i=J}^{\infty} R_j^{\frac{\alpha}{p-1}}\Bigg\}. \quad (6.16)$$

Правая часть последнего неравенства конечна в силу условия (3.1) и теоремы 5.2. Тем самым доказано неравенство (6.5) и доказательство теоремы 6.1 завершено. □

*Доказательство теоремы* 2.1. Пусть $f(x)\in C_0^\infty(R^N)$, $f(x)\equiv 1$ в некоторой окрестности точки $x_0$, $0\leqslant f(x)\leqslant 1$,

$$\int\limits_{R^N} f^2(x)\,dx + \int\limits_{R^N}\Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big|^p dx < \gamma^2, \quad (6.17)$$

где $\gamma$ — некоторое число из интервала (0,1). Будем предполагать, что носитель функции $f(x)$ содержится в множестве $\mathcal{D}$ достаточно малой меры, так чтобы

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\mathcal{D}} |F(x,t)|dxdt < \gamma^2, \quad (6.18)$$

где $F(x,t)$ — функция, определенная в условии $A_2$.

Найдем решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,t) = f(x)\,\theta_0(t), \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \quad (6.19)$$

$$u(x,0)=0, \quad x\in\Omega. \tag{6.20}$$

Разрешимость задачи можно доказать методами теории монотонных операторов.

Подставим в интегральное тождество (2.4) пробную функцию $\varphi(x,t)=[u(x,t)]_h - f(x)\,\theta_0(t)$ и после стандартных преобразований получим оценку

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^p dx\,dt\leqslant C_{65}(t_0)\bigg\{\int\limits_\Omega f^2(x)\,dx+ \\ +\int\limits_\Omega\Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big|^p dx+\int\limits_0^T\int\limits_{\mathcal{D}} F(x,t)\,dx\,dt\bigg\}\leqslant C_{66}(t_0)\,\gamma^2. \tag{6.21}$$

Отсюда, в частности, получаем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\int\limits_\Omega [u(x,t)]_+\,dx\leqslant C_{67}(t_0)\,\gamma. \tag{6.22}$$

Выбирая $\gamma$ достаточно малым числом, обеспечиваем выполнение неравенства (5.30), и, следовательно, теорема 5.2 дает оценку

$$\bar l\leqslant C_{68}(t_0)\bigg\{\Big[\frac{\gamma}{R_0^N}\Big]^{\alpha_2}+R_0^{\alpha_1}+\int\limits_0^{2R_0}\Big[\frac{C_p(B(x_0,r)\setminus\Omega)}{r^{N-p}}\Big]^{\frac{1}{p-1}}\frac{dr}{r}\bigg\}. \tag{6.23}$$

Уменьшением $R_0$, а затем $\gamma$, можем обеспечить выполнение неравенства $\bar l\leqslant\frac12$.

Из теоремы 6.1 получаем

$$\int\limits_0^{r_0}\Big[\frac{\Gamma_p(\overline{Q}'_r\cap\{u>l\})}{r^N}\Big]^{\frac{1}{p-1}}\frac{dr}{r}<\infty \tag{6.24}$$

при $l>\frac12$. Используя неравенство (6.2), имеем из (6.24)

$$\int\limits_0^{r_0}\Big[\frac{\operatorname{mes}(Q'_r\cap\{u>l\})}{r^{N+p}}\Big]^{\frac{1}{p-1}}\frac{dr}{r}<\infty. \tag{6.25}$$

Отсюда, в частности, следует

$$\lim_{r\to0}\big\{r^{-N-p}\operatorname{mes}(Q'_r\cap\{u>l\})\big\}=0. \tag{6.26}$$

Аналогичные рассуждения и (3.1) приводят к равенству

$$\lim_{r\to 0}\left\{r^{-N}\operatorname{mes}[B(x_0,r)\setminus\Omega]\right\}=0.$$

Отсюда и из (6.26) следует

$$\lim_{r\to 0}\left\{[\operatorname{mes}Q_r]^{-1}\operatorname{mes}[Q'_r\cap\{u\leqslant l\}]\right\}=1 \tag{6.27}$$

при произвольном $l>\frac{1}{2}$. Равенство (6.27) обеспечивает оценку

$$\lim_{r\to 0}\left\{\operatorname{ess\,inf}[u(x,t):(x,t)\in Q'_r]\right\}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Таким образом, доказано, что равенство (2.6) не выполнено и, следовательно, точка $(x_0,t_0)$ — нерегулярная. Этим закончено доказательство теоремы 2.1. □

## Литература


[1] E. Di Benedetto, *Degenerate parabolic equations.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] T. Kilpeläinen, J. Malý, *The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations* // Acta Math. **172** (1994), 137–161.

[3] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Наука, 1967.

[4] И. В. Скрыпник, *Необходимое условие регулярности граничной точки для квазилинейного параболического уравнения* // Матем. сб. **183** (1992), №7, 3–22

[5] И. И. Скрыпник, *Регулярность граничной точки для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с измеримыми коэффициентами* // Укр. Мат. Ж. **52** (2000), №11, 1550–1565.

[6] И. И. Скрыпник, *Необходимое условие регулярности граничной точки для вырождающихся параболических уравнений с измеримыми коэффициентами* // Труды ИПММ НАН Украины. Вып. **8** (2003), 147–167.

[7] И. И. Скрыпник, *Регулярность граничной точки для сингулярных параболических уравнений с измеримыми коэффициентами* // Укр. Мат. Ж. **56** (2004), №6,

[8] И. В. Скрыпник, *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач.* Наука, 1991.

[9] W. Zeimer, *Behavior at the boundary of solutions of quasilinear parabolic equations* // J. Diff. Equat. **35** (1980), №3, 291–305.



Сведения об авторах

**И. И. Скрыпник** Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург 74,
Донецк 83114,
Украина