Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 3, 349 – 372

Светлой памяти Учителя —
Георгия Дмитриевича Суворова

Относительное расстояние М. А. Лаврентьева и простые концы на непараметрических поверхностях

В. М. Миклюков

Представлена В. Я. Гутлянским

Аннотация. Вводятся простые концы на двумерных, односвязных, липшицевых, непараметрических поверхностях в $\mathbf{R}^m$, аналогичные простым концам Каратеодори областей плоскости. Даются оценки искажения относительного расстояния М. А. Лаврентьева при конформных отображениях таких поверхностей и их обобщениях.

2000 MSC. 35J70, 30C55, 30C60.

Ключевые слова и фразы. Относительное расстояние, квазиконформные отображения с вырождением, уравнение Бельтрами, конформные отображения поверхностей, простые концы, теорема Каратеодори.

1. Основные результаты

1.1. Условимся в терминологии. Пусть X — метрическое пространство, расстояние между точками p и q которого обозначается символом $d_X(p,q)$. Отображение $f : X \to Y$ называется липшицевым, если найдется постоянная $C > 0$, такая, что для любых $p, q \in X$ выполнено

$$d_Y\,(fp, fq) \leq C\, d_X(p,q)\,.$$

Пусть $\Delta \subset \mathbf{R}^2$ — область и F — двумерная непараметрическая поверхность в $\mathbf{R}^m$, $m \geq 3$, заданная посредством вектор-функции

$$y = f(x) = (x_1, x_2, f_1(x_1,x_2), \ldots, f_{m-2}(x_1,x_2)) : \Delta \to \mathbf{R}^m\,, \qquad (1.1)$$

Статья поступила в редакцию 5.05.2004

ISSN 1810 – 3200.

реализующей гомеоморфное липшицево отображение области Δ на поверхность $F = f(\Delta)$ с метрикой, индуцированной из $\mathbf{R}^m$.

Согласно теореме Радемахера вектор-функция (1.1) дифференцируема почти всюду в области Δ (см., например, [1, теорема 3.1.6]). Если воспользоваться стандартными обозначениями

$$g_{11} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2 = 1 + \sum_{i=1}^{m-2} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x)\right|^2,$$

$$g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle = \sum_{i=1}^{m-2} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x)\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x), \tag{1.2}$$

$$g_{22} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|^2 = 1 + \sum_{i=1}^{m-2} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x)\right|^2,$$

то квадрат линейного элемента F имеет вид

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\, dx_i\, dx_j. \tag{1.3}$$

Далее находим

$$g = g_{11}(x)g_{22}(x) - g_{12}^2(x) = 1 + \sum_{i=1}^{m-2} |\nabla f_i(x)|^2 + \\ + \sum_{i=1}^{m-2} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x)\right|^2 \sum_{i=1}^{m-2} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x)\right|^2 - \left(\sum_{i=1}^{m-2} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x)\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x)\right)^2.$$

1.2. Пусть $D \subset F$ — односвязная область и $O \in D$ — фиксированная точка. Если точки $a, b \in D$, то пусть

$$\rho(a, b; O, D) = \min\{\rho_1(a, b),\ \rho_2(a, b)\}, \tag{1.4}$$

где ρ_1 есть точная нижняя грань длин (в метрике $\mathbf{R}^m$) замкнутых кривых $\gamma \subset D \setminus \{O\}$, отделяющих a и b от точки O и границы ∂D; ρ_2 есть точная нижняя грань длин дуг, лежащих в $D \setminus \{O\}$ и отделяющих a и b от O на поверхности D. Величина ρ называется *относительным расстоянием* между точками $a, b \in D \setminus \{O\}$. Относительное расстояния от точки $a \in D \setminus \{O\}$ до точки O вводится соотношением

$$\rho(a, O; O, D) = \lim_{\substack{b \to O \\ b \neq O}} \rho(a, b; O, D).$$

(Существование предела в правой части легко следует из аксиомы треугольника для метрики ρ.)

Для плоской поверхности $F \subset \mathbf{R}^m$, очевидно, имеем

$$\rho(a, b; O, D) = \min\{2\rho_1^*(a, b), \rho_2(a, b)\}, \tag{1.5}$$

где ρ_1^* — точная нижняя грань длин дуг $\gamma \subset D \setminus \{O\}$, соединяющих точки a и b в D.

Относительное расстояние (1.5) (без множителя 2 перед ρ_1^*) было введено М. А. Лаврентьевым в [2]. Г. Д. Суворов [3] нашел контрпример, показывающий, что расстояние М. А. Лаврентьева не удовлетворяет аксиоме треугольника и предложил заменить длины диаметрами (для относительного расстояния на графиках монотонных вектор-функций[1] см. в [4]). Ниже предлагается другое исправление расстояния М. А. Лаврентьева.

Теорема 1.1. *Если F — поверхность, заданная вектор-функцией* (1.1)*, то функция* (1.4) *определяет метрику в области $D \subset F$, удовлетворяющую аксиомам симметрии, тождества и треугольника.*

Данное утверждение позволяет рассматривать метрическое пространство (D, ρ) и по известной схеме [8]) определять простые концы области D на поверхности F, аналогичные простым концам Каратеодори [5], как элементы пополнения $\tilde{D}$ области D по относительной метрике (1.4).

1.3. Пусть $D \subset F$ — область и U, $V \subset D$ — непересекающиеся подмножества, замкнутые относительно D. Тройка $(U, V; D)$ определяет *конденсатор* на поверхности F. Рассмотрим множество $\mathcal{F}(U, V; D)$ всевозможных липшицевых функций $\varphi : D \to \mathbf{R}$, таких, что $\varphi|_U = 0$, $\varphi|_V = 1$ и

$$|\nabla_F \varphi(x)| > 0 \quad \text{почти всюду в} \quad D \setminus (U \cup V)\,. \tag{1.6}$$

(Здесь градиент $\nabla_F \varphi$ берется в метрике (1.3).)

Величину

$$\operatorname{cap}_1(U, V; D) = \inf_{\varphi \in \mathcal{F}(U, V; D)} \int_D |\nabla_F \varphi| \, dF. \tag{1.7}$$

будем назывть 1-*емкостью* (или, просто, емкостью) конденсатора $(U, V; D)$.

[1] вектор-функция вида (1.1) является монотонной, если для любой подобласти $U \subset\subset \Delta$ выполнено $\operatorname{osc}(f, U) \le \operatorname{osc}(f, \partial U)$.

Здесь символом $\nabla_F \varphi$ обозначен градиент функции φ в метрике поверхности F.

Пусть $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1}$ — обратная матрица. Так как

$$g \geq 1 + \sum_{i=1}^{m-2} |\nabla f_i(x)|^2 \,,$$

то обратная матрица определена для почти всех $x \in \Delta$.

Почти всюду в $\Delta \cap f^{-1}(D)$ мы имеем

$$|\nabla_F \varphi|^2 = \sum_{i,j}^{2} g^{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} \tag{1.8}$$

и элемент площади поверхности F дается выражением

$$dF = \sqrt{g}\, dx_1 dx_2 \,. \tag{1.9}$$

1.4. Пусть $F_1 \subset \mathbf{R}^m$, $F_2 \subset \mathbf{R}^n$ — липшицевы поверхности вида (1.1). Пусть $D_1 \subset F_1$, $D_2 \subset F_2$ — области и пусть $h : D_1 \to D_2$ — гомеоморфное отображение D_1 на D_2. Зададим измеримую функцию $Q : D_1 \to (0, \infty)$. Гомеоморфное отображение h будем называть Q^*-*гомеоморфизмом*, если для всякого конденсатора $(U, V; D_1)$ выполнено

$$\mathrm{cap}_1^2\,(hU,\, hV; D_2) \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{F}(U,V;D_1)} \int\limits_{D_1} Q\, |\nabla_{F_1} \varphi|^2\, dF_1 \,. \tag{1.10}$$

При $Q \equiv \mathrm{area}\, D_2$ *соотношение* (1.10) *следует из условия конформности отображения* h. Действительно, пусть $z = x_1 + i x_2$, $w = u_1 + i u_2$ и отображение $w = h(z) : D_1 \to D_2$ является однолистным конформным соответствием между областями $D_1,\ D_2 \in \mathbf{C}$. Конформное отображение h оставляет инвариантным интеграл Дирихле в том смысле, что

$$\int\limits_{D_2} |\nabla \varphi(w)|^2 du_1 du_2 = \int\limits_{D_1} |\nabla \varphi^*(z)|^2\, dx_1 dx_2 \,, \tag{1.11}$$

где $\varphi^* = \varphi \circ h$. Поэтому для произвольного конденсатора $(U, V; D_2)$ и произвольной функции $\varphi \in \mathcal{F}(U, V; D_2)$ выполнено

$$\mathrm{cap}_1^2(U, V; D_2) \leq \left(\int\limits_{D_2} |\nabla \varphi(w)|\, du_1 du_2 \right)^2 \leq$$

$$\leq \mathrm{area}\, D_2 \int\limits_{D_2} |\nabla \varphi(w)|^2\, du_1 du_2 =$$

$$= \operatorname{area} D_2 \int\limits_{D_1} |\nabla\varphi^*(z)|^2\, dx_1 dx_2\,.$$

Переходя здесь к точной нижней грани по всем функциям $\varphi^* \in \mathcal{F}(h^{-1}U, h^{-1}V; D_1)$, приходим к соотношению (1.10).

В точности так же проверяется, что при $Q \equiv \mathrm{const} \geq 0$ класс Q^*-гомеоморфизмов $h : D_1 \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, содержит квазиконформные отображения.

В общем случае неравенство (1.10) может быть истолковано как специальный вариант принципа длины и площади для отображения h (см., например, [7, теорема 1.4.b], [9, глава X, теорема 1], [10], [11]). В случае областей D_1, D_2 из $\mathbf{R}^2$ данный класс тесно связан с, так называемыми, Q-гомеоморфными отображениями, активно изучаемыми О. Мартио, В. И. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым в [12]–[14], а также радиальными Q-гомеоморфизмами [22], [23]. Мы не будем здесь останавливаться на указанных связях более детально.

Вместе с тем следует отметить, что конформные отображения нерегулярных поверхностей изучены лишь в весьма специальных случаях. Х. А. Шварцем показано, что всякий тетраэдр и куб могут быть отображены конформно на сферу (К. Каратеодори [6, глава VII]). Относительно конформных отображений общих многогранных поверхностей, как примере отображений общего объекта — многообразий ограниченной кривизны — см. Ю. Г. Решетняк [15], а также Т. Торо [16] и С. Мюллер, В. Шверяк [17]. Обобщенная формула Кристоффеля-Шварца для кусочно-конформных изоморфизмов и близкие вопросы рассматривались И. М. Грудским [18], [19].

В рассматриваемом здесь случае липшицевых поверхностей мы, строго говоря, вправе требовать конформность отображения h только лишь в точках его дифференцируемости или конформность отображения $h : D_1 \to D_2$ почти всюду. С другой стороны, достаточно эффективное определение конформности h мы получаем из условия (1.11) инвариантности интеграла Дирихле. Как и выше, непосредственно проверяется, что такие отображения принадлежат классу Q^*-гомеоморфизмов с $Q \equiv \mathrm{const} > 0$.

Вопросы существования конформных отображений между достаточно общими нерегулярными поверхностями изучались автором в [20].

1.5. Рассмотрим еще один пример. Пусть $F_1 = F_2 = \mathbf{C}$ и пусть $\sigma : D_1 \to \mathbf{R}$ — положительная измеримая функция. Рассмотрим систему

$$u_{x_1} = \sigma\, v_{x_2}, \quad u_{x_2} = -\sigma\, v_{x_1}. \tag{1.12}$$

Каждое гомеоморфное отображение $h : D_1 \to D_2$, $h \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$, является Q_1^*-гомеоморфизмом с $Q_1 = Q(x)\,\mathrm{area}\,D_2$, где

$$Q(x) = \max\left(\sigma(x), \frac{1}{\sigma(x)}\right).$$

Действительно, пусть $(U, V; D_2)$ — произвольный конденсатор и $\varphi \in \mathcal{F}(U, V; D_2)$. Мы имеем

$$\mathrm{cap}_1^2\,(U, V; D_2) \le \mathrm{area}\,D_2 \int\limits_{D_2} |\nabla\varphi|^2\,du_1\,du_2.$$

Согласно теореме Радемахера, функция φ дифференцируема почти всюду в области D_2, а в соответствии с теоремой Геринга-Лехто [25] отображение h также дифференцируемо почти всюду в D_1. Поэтому мы вправе записать

$$\int\limits_{D_2} |\nabla\varphi|^2 du_1 du_2 = \int\limits_{D_1} (\varphi_{u_1}^2 + \varphi_{u_2}^2)(u_{1x_1}u_{2x_2} - u_{1x_2}u_{2x_1})\,dx_1\,dx_2\,.$$

Пользуясь (1.12), получаем

$$\mathrm{cap}_1^2\,(U, V; D_2) \le \mathrm{area}\,D_2 \int\limits_{D_1} \sigma\,(\varphi_{u_1}^2 + \varphi_{u_2}^2)\,|\nabla u_2|^2\,dx_1\,dx_2.$$

На основании формулы замены переменных (см. [24, теорема 11]) заключаем, что функция $\varphi^* = \varphi \circ h$ имеет почти всюду полный дифференциал. Таким образом,

$$(\varphi^*)^2_{x_1} + (\varphi^*)^2_{x_2} = (\sigma\varphi_{u_1}u_{2x_2} + \varphi_{u_2}u_{2x_1})^2 + \\ + (-\sigma\varphi_{u_1}u_{2x_1} + \varphi_{u_2}u_{2x_2})^2 = (\sigma^2\varphi^2_{u_1} + \varphi^2_{u_2})|\nabla u_2|^2\,.$$

Однако, почти всюду в D_1 выполнено

$$(\sigma^2\varphi^2_{u_1} + \varphi^2_{u_2}) \le \sigma\,Q\,(\varphi^2_{u_1} + \varphi^2_{u_2})$$

и, таким образом,

$$\mathrm{cap}_1^2\,(U, V; D_2) \le \mathrm{area}\,D_2 \int\limits_{D_1} Q\ \left((\varphi^*)^2_{x_1} + (\varphi^*)^2_{x_2}\right)\,dx_1\,dx_2\,,$$

что доказывает (1.10).

Решения уравнения (1.12) называются *σ-гармоническими отображениями* и изучаются в значительном числе новейших работ (см. статью [26] и ссылки в ней).

1.6. Пусть $F_1 \subset \mathbf{R}^m$ — липшицева поверхность вида (1.1). Обозначим через $d_{F_1}(a,b) = d(a,b)$ геодезическое расстояние между точками a, $b \in F_1$, другими словами, точную нижнюю грань длин дуг $\gamma \subset F_1$, соединяющих точки a и b. Так как поверхность F_1 липшицева, то $d_{F_1}(a,b) < \infty$ для любых $a, b \in F_1$. Дальнейшие обозначения:

$$S(y_0, r) = \{y \in F_1 : d_{F_1}(y_0, y) = r\} \text{ —}$$

геодезическая окружность радиуса $r > 0$,

$$B(y_0, r) = \{y \in F_1 : d_{F_1}(y_0, y) < r\} \text{ —}$$

геодезический круг, и

$$K(y_0, r, R) = \{y \in F_1 : r < d_{F_1}(y_0, y) < R\} \text{ —}$$

геодезическое кольцо.

Зафиксируем односвязную область $D \subset F_1$ и точку $y_0 \in \overline{D}$. Выберем r и R так, чтобы

$$0 < r < R < \sup_{y \in D} d_{F_1}(y_0, y)\,, \tag{1.13}$$

и выберем произвольно компоненту связности $K = K_D(y_0, r, R)$ множества $K(y_0, r, R) \cap D$. Положим

$$U = U(y_0, r) = D \cap B(y_0, r), \quad V = V(y_0, R) = D \setminus B(y_0, R).$$

Так как $y_0 \in \overline{D}$, то из соотношения (1.13) следует, что множества U и V непусты.

Теорема 1.2. *Пусть $F_1 \subset \mathbf{R}^m$, $F_2 \subset \mathbf{R}^n$ — липшицевы поверхности вида* (1.1). *Если*

$$h : K_D(y_0, r, R) \subset F_1 \to F_2$$

есть Q^*-гомеоморфизм, то

$$L^2 \le \left(\int_r^R dt \Bigg/ \int_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy| \right)^{-1}. \tag{1.14}$$

Здесь L — точная нижняя грань длин дуг или кривых, разделяющих множества hU, hV в hK, и $S_D(y_0,t) = S(y_0,t) \cap D$.

1.7. Наряду с Q^*-гомеоморфизмами мы рассматриваем их обобщения. Именно, зафиксируем односвязную область $D_1 \subset F_1$ и точку $O_1 \in D_1$. Пусть

$$0 < \mu < d(O_1) = d(O_1, \partial D_1) - \tag{1.15}$$

некоторое число. Будем говорить, что гомеоморфное отображение

$$h : D_1 \subset F_1 \to D_2 \subset F_2$$

является *$Q^*(\mu))$-гомеоморфизмом,* если для всякой точки $y_0 \in \overline{D}_1$ и любых $0 < r < R < \mu$ найдется измеримая функция $Q = Q(y;\, y_0, r, R)$, для которой

$$\operatorname{cap}_1^2(hU(y_0, r),\, hV(y_0, R); D_2) \le \inf_{\varphi} \int\limits_{K_{D_1}(y_0,r,R)} Q\, |\nabla_{F_1}\varphi|^2\, dF_1, \tag{1.16}$$

где точная нижняя грань берется по всем функциям

$$\varphi \in \mathcal{F}(U(y_0, r),\, V(y_0, R);\, K_{D_1}(y_0, r, R)).$$

Теорема 1.3. *Пусть $F_1 \subset \mathbf{R}^m$, $F_2 \subset \mathbf{R}^n$ — липшицевы поверхности вида* (1.1). *Пусть $D_1 \subset F_1$, $D_2 \subset F_2$ — односвязные области и $O_1 \in D_1$, $O_2 \in D_2$ — фиксированные точки. Пусть $h : D_1 \to D_2$ — $Q^*(\mu))$-гомеоморфизм, $h(O_1) = O_2$, такой, что для некоторой монотонной функции $\omega(t) = \omega(t; \mu) : (0, \mu) \to (0, \infty)$, $\omega(+0) = 0$, произвольной точки $y_0 \in \overline{D}_1$, и любых $0 < t < \mu$, выполнено*

$$\left(\int\limits_t^{\mu} d\tau \Bigg/ \int\limits_{S_{D_1}(y_0,\tau)} Q(y)\, |dy| \right)^{-1} \le \omega(t). \tag{1.17}$$

Тогда, если $\operatorname{area} D_2 < \infty$, *то для произвольной пары точек $a, b \in \tilde{D}_1$, удовлетворяющей условию*

$$2\max\{d(a, \partial D_1), d(b, \partial D_1), \rho(a, b; O_1, D_1)\} < \\ < \min\{d(O_1, \partial D_1) - \mu, 2\mu\} \tag{1.18}$$

справедливо неравенство

$$\rho(ha,\, hb; O_2, D_2) \le [\operatorname{area} D_2\, \omega(\rho(a, b; O_1, D_1))]^{1/2}\ . \tag{1.19}$$

В частности, всякий $Q^*(\mu))$-гомеоморфизм $h : D_1 \to D_2$, обладающий свойством (1.17), продолжим по непрерывности до гомеоморфного отображения $\tilde{h} : \tilde{D}_1 \to \tilde{D}_2$ и мы имеем обобщение известной теоремы Каратеодори о конформных отображениях плоских областей [5] на случай отображений поверхностей.

Следствие 1.1. *Если $Q^*(\mu)$-гомеоморфизм $h : D_1 \to D_2$ удовлетворяет* (1.17) *и все простые концы поверхности D_2 первого рода, то отображение h продолжимо по непрерывности до гомеоморфного отображения $\tilde{h} : \tilde{D}_1 \to \overline{D}_2$.*

Если, кроме того, поверхность D_1 имеет простые концы только первого рода, то h продолжимо до гомеоморфизма $\tilde{h} : \overline{D}_1 \to \overline{D}_2$.

Классификацию простых концов поверхности см. ниже, в разделе 3.

Частично данная работа была выполнена во время пребывания автора в г. Хайфе по приглашению Математического факультета Института технологий Израиля (Технион). Автор признателен декану факультета, профессору Даниэлю Гершковичу за представленную возможность.

Автор хотел бы поблагодарить также профессора Ури Сребро (Технион) и профессора Эдуарда Якубова (Холон) за исключительную гостеприимность.

Автор глубоко благодарен своим коллегам — Владимиру Александровичу Клячину, Борису Павловичу Куфареву и Юрию Вячеславовичу Помельникову — прочитавшим работу в рукописи и сделавшим ряд важных замечаний, способствующих улучшению текста.

2. Доказательство теоремы 1.1

2.1. Так как поверхность F липшицева, то для произвольной пары точек $a, b \in D$ выполняется $\rho(a, b; O, D) < \infty$. Аксиома симметрии тривиальна. Докажем, что $\rho(a, b; O, D) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

Действительно, предположим, что $a \neq b$. Пусть $x' = f^{-1}(a)$, $x'' = f^{-1}(b)$ — прообразы этих точек в односвязной области $\Delta^* = f^{-1}(D)$, и пусть $O^* = f^{-1}(O)$. Отображение $f : \Delta^* \to D$ гомеоморфно, а потому $x' \neq x''$. Для плоских областей выполнение аксиомы тождества очевидно. Тем самым, $\rho(x', x''; O^*, \Delta^*) > 0$.

Предположения о гомеоморфности f и односвязности D влекут тогда, что и $\rho(a, b; O, D) > 0$.

2.2. Нам достаточно теперь проверить неравенство треугольника. Фиксируем произвольно точки $a, b, c \in F \backslash \{O\}$. Естественным образом выделяются три случая.

В *первом случае* мы имеем

$$\rho(a, b; O, D) = \rho_1(a, b), \quad \rho(b, c; O, D) = \rho_1(b, c).$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Выберем замкнутые кривые γ_1, отделяющую a, b от O, ∂D, и γ_2, отделяющую b, c от O, ∂D так, что

$$\text{length}(\gamma_1) \le \rho_1(a,b) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{length}(\gamma_2) \le \rho_1(b,c) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$, то хотя бы одна из кривых отделяет другую, а, значит, и точки a, c от O и ∂D. Тем самым,

$$\begin{aligned}\rho_1(a,c) \le \max\{\text{length}(\gamma_1), \text{length}(\gamma_2)\} \le \\ \le \rho_1(a,b) + \rho_1(b,c) + \varepsilon \le \\ \le \rho(a,b;O,D) + \rho(b,c;O,D) + \varepsilon\end{aligned}$$

для произвольного $\varepsilon > 0$.

Если $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$, то множество $\gamma_3 = \gamma_1 \cup \gamma_2$ является связной замкнутой кривой, отделяющей a, c от O и ∂D. Таким образом,

$$\rho_1(a,c) \le \rho_1(a,b) + \rho_1(b,c) + \varepsilon \le \rho(a,b;O,D) + \rho(b,c;O,D) + \varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon \to 0$, приходим к нужному неравенству.

Во *втором случае* пусть

$$\rho(a,b;O,D) = \rho_2(a,b), \quad \rho(b,c;O,D) = \rho_2(b,c).$$

Выберем открытые дуги γ_1, γ_2, отделяющие a, b и b, c от O, соответственно, в D, причем так, чтобы для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнялось

$$\text{length}(\gamma_1) \le \rho_2(a,b) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{length}(\gamma_2) \le \rho_2(b,c) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Здесь возможны в точности те же самые два подслучая, что и выше. В обоих вариантах мы получаем нужные неравенства.

В *третьем случае* достаточно рассмотреть ситуацию, в которой

$$\rho(a,b;O,D) = \rho_1(a,b), \quad \rho(b,c;O,D) = \rho_2(b,c)\,,$$

и выбрать

$$\text{length}(\gamma_1) \le \rho_1(a,b) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{length}(\gamma_2) \le \rho_2(b,c) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Дальнейшие аргументы те же, что и выше.

3. Простые концы

Мы воспользуемся известной схемой [3] введения простых концов Каратеодори [5] в плоских односвязных областях. Пусть F — поверхность, заданная вектор-функцией вида (1.1). Рассмотрим произвольную односвязную подобласть $D \subset F$ с фиксированной в ней точкой $O \in D$.

Пусть ρ — относительное расстояние в D, определенное выражением (1.4). Метрическое пространство (D, ρ) может быть пополнено классами эквивалентности фундаментальных последовательностей $\{a_k\}$, $a_k \in D$, не имеющих точек накопления в D. Классы эквивалентности $e^\rho = \{a_k\}$ таких последовательностей называются *простыми концами* области D (относительно метрики ρ). Область D вместе с присоединенными к ней простыми концами e^ρ будем обозначать через $\tilde{D}^\rho$.

Пусть $e_1^\rho = \{a_k'\}$, $e_2^\rho = \{a_k''\}$ — точки из $\tilde{D}^\rho$. Относительное расстояние между ними определяется выражением

$$\rho(e_1^\rho, e_2^\rho; O, \tilde{D}^\rho) = \lim_{k \to \infty} \rho(a_k', a_k''; O, D).$$

Фиксируя вместо точки $O \in D$ другие внутренние точки области D, мы получаем различные метрики ρ в D и различные метрические пространства D^ρ. Пополнения $\tilde{D}^\rho \setminus D$ этих пространств совпадают. Чтобы убедиться в этом достаточно заметить, что всякая последовательность $\{a_k\}$ точек поверхности D, не имеющая предельных точек в D и фундаментальная в метрике $\rho(a, b; O', D)$, является фундаментальной также в метрике $\rho(a, b; O'', D)$.

Если область D односвязная подобласть $\mathbf{R}^2$, то метрика ρ определена выражением (1.5). Легко видеть, что в этом случае простые концы e^ρ области D суть простые концы Каратеодори [5], [3].

При изложении понятия тела простого конца мы следуем оригинальной статье В. П. Луференко и Г. Д. Суворова [21], где данное понятие исследуется в произвольных метрических пространствах.

Пусть $e_0 \in \tilde{D}$ — простой конец и $y_0 \in \mathbf{R}^m$ — точка. Если существует последовательность точек $a_k \in D$, $\rho(a_k, e_0; O, D) \to 0$, для которой $|a_k - y_0| \to 0$, то мы пишем $y_0 | e_0 \neq \emptyset$.

Телом $|e_0|$ простого конца $e_0 \in \tilde{D}$ в пространстве $\mathbf{R}^m$ называется множество всевозможных точек $y \in \mathbf{R}^m$, таких, что $y | e_0 \neq \emptyset$. Как показано в [21, лемма 1], мы имеем

$$|e_0| = \cap_{\delta > 0} \overline{\{y \in D : \rho(y, e_0) < \delta\}}$$

(здесь замыкания берутся относительно $\mathbf{R}^m$) и введенное определение является прямым обобщением понятия тела простого конца Каратеодори [5].

Классификация простых концов односвязной поверхности D в $\mathbf{R}^m$ возможна в точности та же, что и в теории Каратеодори. Именно, мы называем сечением поверхности D произвольную жорданову дугу $\gamma \subset D$ с концами на (евклидовой) границе ∂D. Сечение γ разделяет точки $a, b \in D$, если всякий путь $l \subset D$, ведущий из a в b, пересекает сечение γ. Сечение $\gamma \subset D$ отделяет простой конец $e \in \tilde{D} \setminus D$ от фиксированной точки $O \in D$, если оно разделяет точку O и все, достаточно близкие по относительному расстоянию, к e точки поверхности D.

Будем говорить, что последовательность сечений $\gamma_k \subset D$, отделяющих простой конец e от фиксированной точки $O \in D$, стягивается к e, если

$$r(\gamma_k, e; D) = \inf_{y \in \gamma_k} \overline{\lim_{y_l \to e}} |y - y_k| \to 0$$

при $k \to \infty$.

Главная точка тела простого конца $e \in \tilde{D} \setminus D$ — это такая точка $y \in |e|$, для которой найдется последовательность сечений γ_k, стягивающаяся к e и обладающая свойством

$$\sup_{a \in \gamma_k} |a - y| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty\,.$$

Смежная точка тела простого конца — это произвольная его точка, не являющаяся главной.

Всякий простой конец односвязной поверхости принадлежит к одному из следующих четырех типов:
простой конец I-го типа содержит единственную главную точку и не содержит смежных точек;
простой конец II-го типа содержит единственную главную точку и бесконечное множество смежных точек;
простой конец III-го типа содержит континуум главных точек и не содержит смежных точек;
простой конец IV-го типа содержит континуум главных точек и бесконечное множество смежных точек.

Примеры поверхностей с концами указанных типов легко строятся. В частности, здесь оказываются пригодными и соответствующие примеры плоских областей.

Будем говорить, что точка $e \in \tilde{D}$, $|e| \neq \emptyset$, является простой в $\mathbf{R}^m$, если ее тело[2] в $\mathbf{R}^m$ состоит ровно из одной точки. Заметим, что e есть простой конец первого рода тогда и только тогда, когда точка $e \in \tilde{D} \setminus D$ является простой в $\mathbf{R}^m$.

[2]как тело простого конца e

Обозначим через I естественную проекцию поверхности D в пространство $\mathbf{R}^m$. Имеет место следующее общее утверждение.

Теорема 3.1. *Предположим, что множества D и $I(D)$ предкомпактны в $\tilde{D}$ и $\mathbf{R}^m$, соответственно. Для того, чтобы все точки границы $\tilde{D}\setminus D$ были простыми в $\mathbf{R}^m$ необходимо и достаточно, чтобы естественная проекция $I : D \to \mathbf{R}^m$ была равномерно непрерывна по относительному расстоянию ρ на поверхности D.*

См. доказательство в [21].

4. Доказательство теоремы 1.2

4.1. Вначале мы покажем, что

$$L \le \mathrm{cap}_1\,(hU, hV; hK). \tag{4.1}$$

Пусть φ — произвольная функция, допустимая при вычислении 1-емкости конденсатора $(hU, hV; hK)$. Предположим, что поверхность $F_2 \subset \mathbf{R}^n$ задана посредством липшицева отображения $f_2 : \Delta^* \to \mathbf{R}^n$. Пусть $K^* = f_2^{-1}(hK)$. Тогда на основании (1.8) и (1.9) мы вправе записать

$$\int\limits_{hK} |\nabla_{F_2}\varphi|\, dF_2 = \int\limits_{K^*} \left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\varphi^*_{x_i}\varphi^*_{x_j}\right)^{1/2} \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2, \tag{4.2}$$

где $\varphi^* = \varphi\circ f_2$ и коэффициенты g_{ij}, g^{ij}, g определены соотношениями (1.2), (1.8), (1.9), записанными для вектор-функции $f_2 : \Delta^* \to F_2$.

Так как отображение f_2 липшицево, то

$$\mathrm{ess\ sup}_{K^*} \max\{g_{11}(x), g_{12}(x), g_{22}(x)\} = M < \infty\,.$$

Положим

$$p(x) = \left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\frac{\varphi^*_{x_i}}{|\nabla\varphi^*|}\frac{\varphi^*_{x_j}}{|\nabla\varphi^*|}\right)^{1/2}\sqrt{g}\,.$$

Тогда имеем

$$\int\limits_{hK} |\nabla_{F_2}\varphi|\, dF_2 = \int\limits_{K^*} p(x)\,|\nabla\varphi^*(x)|\, dx_1\, dx_2\,.$$

Так как матрицы (g_{ij}) и (g^{ij}) взаимно обратны, то

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}. \tag{4.3}$$

Отсюда, почти всюду в K^* выполнено

$$p(x) \le M^{1/2}\left(\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\varphi^*_{x_i}}{|\nabla\varphi^*|}\frac{\varphi^*_{x_j}}{|\nabla\varphi^*|}\right)^{1/2} \le 2\,M^{1/2}\,.$$

По теореме 3.2.15 из [1] почти все линии уровня

$$E_t = \{x \in K^* : \varphi^*(x) = t\}$$

счетно спрямляемы. Тем самым, мы вправе воспользоваться известной формулой для ко-площади [1, теорема 3.2.22]. Мы имеем

$$\int\limits_{K^*}\left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\varphi^*_{x_i}\varphi^*_{x_j}\right)^{1/2}\sqrt{g}\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \int\limits_0^1 dt \int\limits_{E_t}\left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\frac{\varphi^*_{x_i}}{|\nabla\varphi^*|}\frac{\varphi^*_{x_j}}{|\nabla\varphi^*|}\right)^{1/2}\sqrt{g}\,|dx|. \quad (4.4)$$

Вектор-функция f_2 абсолютно непрерывна вдоль почти всех E_t. Векторы

$$\overline{\tau} = \left(-\frac{\varphi^*_{x_2}}{|\nabla\varphi^*|}, \frac{\varphi^*_{x_1}}{|\nabla\varphi^*|}\right)$$

суть единичные касательные к E_t векторы. Таким образом, пользуясь (1.3), для почти всех $t \in (0,1)$ находим

$$\operatorname{length}(f_2E_t) = \int\limits_{E_t} ds = \int\limits_{E_t}\left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,dx_i\,dx_j\right)^{1/2} =$$

$$= \int\limits_{E_t}\left(g_{11}\frac{(\varphi^*_{x_2})^2}{|\nabla\varphi^*|^2} - 2g_{12}\frac{\varphi^*_{x_1}}{|\nabla\varphi^*|}\frac{\varphi^*_{x_2}}{|\nabla\varphi^*|} + g_{22}\frac{(\varphi^*_{x_1})^2}{|\nabla\varphi^*|^2}\right)^{1/2}|dx|.$$

Подставляя выражения для g^{ij} из (4.3) в последний интеграл, получаем

$$\operatorname{length}(f_2E_t) = \int\limits_{E_t}\left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\frac{\varphi^*_{x_i}}{|\nabla\varphi^*|}\frac{\varphi^*_{x_j}}{|\nabla\varphi^*|}\right)^{1/2}\sqrt{g}\,|dx|, \quad (4.5)$$

и (4.4) влечет

$$\int\limits_0^1 \operatorname{length}(f_2E_t)\,dt = \int\limits_{K^*}\left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\varphi^*_{x_i}\varphi^*_{x_j}\right)^{1/2}\sqrt{g}\,dx_1\,dx_2.$$

Таким образом,

$$\inf_{0<t<1} \mathrm{length}(f_2 E_t) \le \int\limits_{K^*} \left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \varphi^*_{x_i} \varphi^*_{x_j} \right)^{1/2} \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2.$$

Пользуясь (4.2), приходим к неравенству (4.1).

4.2. В качестве второго шага мы докажем, что

$$\inf_{\varphi\in\mathcal{F}(U,V,D)} \int\limits_{K} Q\, |\nabla_{F_1}\varphi|^2 dF_1 \le \left(\int\limits_{r}^{R} dt \Bigg/ \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\, |dy| \right)^{-1}. \qquad (4.6)$$

Предположим, что поверхность $F_1 \subset \mathbf{R}^m$ задается липшицевым отображением f_1. Как и выше, пусть $K^* = f_1^{-1}(K)$, $\varphi^* = \varphi \circ f_1$ и $d^*(x) = d_{F_1}(y_0, f_1(x))$. На основании (1.6) и (1.8), (1.9) можно записать

$$\inf_{\varphi\in\mathcal{F}(U,V;D)} \int\limits_{K} Q\, |\nabla_{F_1}\varphi|^2 dF_1 =$$

$$= \inf_{\varphi^*} \int\limits_{K^*} Q^* \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \varphi^*_{x_i} \varphi^*_{x_j} \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2, \qquad (4.7)$$

где $Q^* = Q \circ f_1$ и коэффициенты g^{ij}, g определены выражениями (1.2), (1.9).

Выберем φ^* в виде $\varphi^* = \psi \circ d^*(x)$ с некоторой липшицевой функцией $\psi : [r, R] \to [0, 1]$, для которой $\psi(r) = 0$, $\psi(R) = 1$. Нам потребуется следующая оценка для градиента функции расстояния, которая будет доказана ниже, в разделе 4.3:

$$|\nabla_{F_1} d^*(x)| = \sum_{ij=1}^{2} g^{ij} d^*_{x_i} d^*_{x_j} \le 1 \quad \text{почти всюду в } \Delta. \qquad (4.8)$$

Таким образом, пользуясь еще раз формулой для ко-площади, в силу (4.8) получаем

$$\int\limits_{K^*} Q^* \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \varphi^*_{x_i} \varphi^*_{x_j} \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int\limits_{K^*} Q^* \psi'^2(d^*(x)) \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} d^*_{x_i} d^*_{x_j} \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2 \le$$

$$\le \int\limits_{r}^{R} \psi'^2(t)\, dt \int\limits_{S^*_D(y_0,t)} Q^* \sqrt{g}\, |dx|, \qquad (4.9)$$

где $S_D^*(y_0,t) = f_1^{-1} S_D(y_0,t)$.

Легко проверяется, что

$$\int\limits_{S_D^*(y_0,t)} Q^* \sqrt{g}\,|dx| = \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|. \tag{4.10}$$

Действительно, пользуясь (1.3), имеем

$$\int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy| = \int\limits_{S_D^*(y_0,t)} Q^* \left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,dx_i\,dx_j\right)^{1/2}.$$

Поскольку $d^*|_{S_D^*(y_0,t)} = t$, как и в (4.5), мы устанавливаем, что для почти всех $t \in (0,1)$ выполнено

$$\int\limits_{S_D^*(y_0,t)} Q^* \left(\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,dx_i\,dx_j\right)^{1/2} =$$

$$= \int\limits_{S_D^*(y_0,t)} Q^* \left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\,d^*_{x_i}\,d^*_{x_j}\right)^{1/2} \sqrt{g}\,|dx| =$$

$$= \int\limits_{S_D^*(y_0,t)} Q^* \sqrt{g}\,|dx|,$$

и соотношение (4.10) доказано.

Из (4.9) и (4.10) следует

$$\int\limits_{K^*} Q^* \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \varphi^*_{x_i} \varphi^*_{x_j} \sqrt{g}\,dx_1\,dx_2 \le \int\limits_{r}^{R} \psi'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|.$$

Таким образом, соотношение (4.7) влечет

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{F}(U,V;D)} \int\limits_{K} Q\,|\nabla_{F_1}\varphi|^2\,dF_1 \le \inf_{\psi} \int\limits_{r}^{R} \psi'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|. \tag{4.11}$$

Найдем точную нижнюю грань интегралов в правой части (4.11). Так как $\psi(r) = 0$, $\psi(R) = 1$, то для произвольной функции ψ мы имеем

$$1 \le \left(\int\limits_{r}^{R} \psi'(t)\,dt\right)^2 \le$$

$$\leq \left(\int\limits_r^R \frac{dt}{\int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|}\right)\left(\int\limits_r^R \psi'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|\right),$$

то есть, для любой допустимой функции ψ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_r^R dt \Big/ \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|\right)^{-1} \leq \int\limits_r^R \psi'^2(t)\,dt \Big/ \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy| \,. \tag{4.12}$$

Выбирая

$$\psi_0(t) = \int\limits_r^t \frac{d\tau}{\int\limits_{S_D(y_0,\tau)} Q(y)\,|dy|} \Big/ \int\limits_r^R \frac{d\tau}{\int\limits_{S_D(y_0,\tau)} Q(y)\,|dy|}$$

при $t \in (r, R)$ и замечая, что $\psi_0(r+0) = 0$, $\psi_0(R-0) = 1$, мы заключаем:

$$\int\limits_r^R \psi_0'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy| = \left(\int\limits_r^R dt \Big/ \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|\right)^{-1}.$$

Таким образом, на основании (4.12) выводим

$$\inf_{\psi} \int\limits_r^R \psi'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy| = \left(\int\limits_r^R dt \Big/ \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|\right)^{-1}. \tag{4.13}$$

Данные аргументы пригодны для произвольной локально ограниченной на (r, R) функции

$$q(\tau) \equiv \int\limits_{S_D(y_0,\tau)} Q(y)\,|dy|,$$

при которой ψ_0 локально липшицева. Простые аппроксимационные аргументы влекут справедливость (4.13) в общем случае.

Действительно, для произвольного $n = 1, 2, \ldots$ положим

$$Q_n(y) = \begin{cases} Q(y) & \text{при} \quad Q(y) \leq n, \\ n & \text{при} \quad Q(y) > n. \end{cases}$$

Тогда, для произвольной функции ψ по теореме Фату имеем

$$\int\limits_r^R \psi'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy| \leq \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_r^R \psi'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q_n(y)\,|dy|\,.$$

Отсюда, по доказанному,

$$\int\limits_r^R \psi'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy| \leq \int\limits_r^R \psi'^2(t)\,dt \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q_n(y)\,|dy| \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_r^R dt \Bigg/ \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q_n(y)\,|dy|\right)^{-1} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_r^R dt \Bigg/ \int\limits_{S_D(y_0,t)} Q(y)\,|dy|\right)^{-1}.$$

Переходя в левой части соотношения к точной нижней грани по допустимым функциям ψ, убеждаемся в справедливости соотношения (4.13) в общем случае.

Комбинируя (4.13) с (4.11) приходим к (4.6). На основании (4.6), (4.1) и (1.10) приходим к (1.14).

4.3. Чтобы завершить доказательство теоремы, необходимо проверить справедливость неравенства (4.8), уже использованного нами выше. Если поверхность F_1 принадлежит классу C^2, то это неравенство хорошо известно (и, даже, в более сильном виде). Для липшицевой поверхности оно нуждается в доказательстве.

Пусть $a \in \Delta$ — произвольная точка, в которой дифференциал $df_1(a)$ вектор-функции $y = f_1(x)$ вида (1.1) существует. Пусть $\gamma(a,\theta)$ — отрезок длины $h > 0$, выходящий из точки a в направлении, задаваемом единичным касательным вектором $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Тогда

$$\left|\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial d^*}{\partial x_i}(a)\,\theta_i\right| \leq \varliminf_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{\gamma(a,\theta)} ds_{F_1}\,,$$

где

$$d^*(x) = d(a, f_1(x)) = \inf_{\gamma} \int\limits_{\gamma} ds_{F_1}$$

и точная нижняя грань берется по всевозможным дугам γ, соединяющим точки a и x.

Однако,

$$\int\limits_{\gamma(a,\theta)} ds_{F_1} = \int\limits_0^h \left[\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(a + r\,\theta)\,\theta_i\theta_j\right]^{1/2} dr$$

и для почти всех касательных направлений θ имеем

$$\varlimsup_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{\gamma(a,\theta)} ds_{F_1} \le \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(a)\,\theta_i\theta_j\,.$$

Тем самым, в точке a выполняется соотношение

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial d^*}{\partial x_i}(a)\frac{\partial d^*}{\partial x_j}(a)\,\theta_i\theta_j \le \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(a)\,\theta_i\theta_j\,. \tag{4.14}$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что

$$\max_{|\theta|=1} \frac{\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial d^*}{\partial x_i}\frac{\partial d^*}{\partial x_j}\,\theta_i\theta_j}{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,\theta_i\theta_j} = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\frac{\partial d^*}{\partial x_i}\frac{\partial d^*}{\partial x_j}\,. \tag{4.15}$$

Действительно, на основании известных свойств квадратичных форм (см., например, [27, стр. 289–290]), наибольшее значение отношения двух квадратичных форм, стоящего в левой части (4.15), равно максимальному из корней λ уравнения

$$\det\left(\frac{\partial d^*}{\partial x_i}\frac{\partial d^*}{\partial x_j} - \lambda\, g_{ij}\right) = 0\,.$$

Умножая обе части равенства на $\det(g^{ij})$, получаем

$$\det(a_{ij} - \lambda\,\delta_{ij}) = 0\,,$$

где

$$a_{ij} = \frac{\partial d^*}{\partial x_j}\sum_{k=1}^{2} g^{ik}\frac{\partial d^*}{\partial x_k}$$

и δ_{ij} — символ Кронекера.

Отсюда находим

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} g^{ik}\frac{\partial d^*}{\partial x_j}\sum_{k=1}^{2} g^{ik}\frac{\partial d^*}{\partial x_k}\,,$$

что и требовалось.

В силу (4.15), справедливость соотношения (4.14) при всех единичных векторах θ влечет (4.8).

Таким образом, теорема 1.2 доказана полностью.

5. Локальные оценки

Теорема 1.2 приводит к некоторым локальным оценкам при Q^*-гомеоморфных отображениях. Пусть $c \in [1, \infty)$ — постоянная. Вектор-функция $f : \Delta \to \mathbf{R}^m$ называется *c-монотонной*, если для всякой подобласти Δ', $\Delta' \subset\subset \Delta$, выполнено неравенство

$$\operatorname{osc}(f, \Delta') \le c \operatorname{osc}(f, \partial\Delta'). \tag{5.1}$$

Заметим, к примеру, что C^2-вектор-функция f, задающая поверхность F неположительной гауссовой кривизны является c-монотонной при $c = 1$. Если поверхность F имеет выпуклый график в $\mathbf{R}^3$, то она c-монотонна с некоторой постоянной $c = c(\Delta') \ge 1$ на всякой подобласти $\Delta' \subset\subset \Delta$.

Следствие 5.1. *Пусть $F_1 \subset \mathbf{R}^m$, $F_2 \subset \mathbf{R}^n$ — поверхности, заданные вектор-функциями $f_1 : \Delta_1 \to \mathbf{R}^m$, $f_2 : \Delta_2 \to \mathbf{R}^n$, соответственно. Предположим, что f_2 является c_2-монотонной.*

Тогда для произвольного Q^*-гомеоморфного отображения $h : F_1 \to F_2$, произвольной точки $y_0 \in F_1$ и всякого r, $c_2 r < d_0 = d_{F_1}(y_0, \partial F_1)$, выполняется

$$osc^2(h,\ B(y_0, r)) \le c_2^2 \left(\int\limits_r^{d_0} dt \Bigg/ \int\limits_{S(y_0,t)} Q(y)\,|dy| \right)^{-1}. \tag{5.2}$$

Для *доказательства* достаточно воспользоваться оценкой (1.14) и заметить, что

$$\operatorname{osc}^2(h, B(y_0, r)) \le c_2^2 L^2.$$

Оценка (5.2) влечет серию уже известных. Мы ограничимся здесь следующим рассмотрением. Пусть $\xi(t)$ — неотрицательная борелева функция на $(0, d_0)$, такая, что

$$I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{d_0} \xi(t)\,dt < \infty, \quad \varepsilon \in (0, d_0). \tag{5.3}$$

Согласно формуле для ко-площади имеем

$$\int\limits_{\varepsilon < d_{F_1}(y_0,y) < d_0} Q(y)\,\xi^2(d_{F_1}(y_0, y))\,dF_1 = \int\limits_{\varepsilon}^{d_0} \xi^2(\tau)\,d\tau \int\limits_{S(y_0,\tau)} Q(y)\,|dy|.$$

Отсюда, на основании неравенства Коши, получаем

$$I^2(\varepsilon) \le \left(\int\limits_{\varepsilon}^{d_0} d\tau \Big/ \int\limits_{S(y_0,\tau)} Q(y)\,|dy| \right) \left(\int\limits_{\varepsilon}^{d_0} \xi^2(\tau)\,d\tau \int\limits_{S(y_0,\tau)} Q(y)\,|dy| \right)$$

и

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{d_0} d\tau \Big/ \int\limits_{S(y_0,\tau)} Q(y)\,|dy| \right)^{-1} \le$$

$$\le \frac{1}{I^2(\varepsilon)} \int\limits_{\varepsilon < d_{F_1}(y_0,y) < d_0} Q(y)\,\xi^2(d_{F_1}(y_0,y))\,dF_1.$$

Таким образом, оценка (5.2) приводит к неравенству

$$\operatorname{osc}^2(h, B(y_0,r)) \le c_2^2\, I^{-2}(r) \int\limits_{K(r,d_0;F_1)} Q(y)\,\xi^2(d_{F_1}(y_0,y))\,dF_1\,, \qquad (5.4)$$

справедливому для всякой функции ξ со свойством (5.3).

Для отображений плоских областей в единичную сферу, близкое неравенство установлено В. И. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым [23].

6. Доказательство теоремы 1.3

Пусть $a, b \in D_1 \setminus \{O_1\}$ — пара точек, удовлетворяющая (1.18). Фиксируем дугу или кривую $\gamma \subset D_1 \setminus \{O_1\}$, отделяющую a, b от O_1 и такую, что

$$\operatorname{length}(\gamma) < \rho(a,b;O_1,D_1) + \delta < \frac{1}{2}(d(O_1) - \mu),$$

где $d(O_1) = d(O_1, \partial D_1)$ и $\delta > 0$ — достаточно малое число.

Выберем точку $p \in \gamma$ и рассмотрим семейство геодезических окружностей

$$S(p,\tau) = \{y \in F_1 : d(p,y) = \tau\}, \quad \rho < \tau < \mu,$$

где $\rho = \rho(a,b;O_1,D_1)$.

Предположения (1.15) и (1.18) влекут, что всякое множество $S(p,\tau)$ $\cap D_1$ содержит компоненту связности $S_D(p,\tau)$, отделяющую a, b от O_1.

Действительно, пусть $S(p,\tau)\cap\partial D_1\neq\emptyset$. Так как $p\in\gamma$, то

$$d(p,\partial D_1)\leq \mathrm{length}(\gamma)<\frac{1}{2}(d(O_1)-\mu).$$

Далее мы замечаем, что

$$\begin{aligned}d(O_1)\leq d(p,\partial D_1)+d(p,O_1)\leq\\ \leq \mathrm{length}(\gamma)+d(p,O_1)\leq\\ \leq (d(O_1)-\mu)/2+d(p,O_1)\,.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}d(O_1)+\frac{1}{2}\mu\leq d(p,O_1)$$

и, следовательно,

$$d(p,\partial D_1)+\mu\leq d(p,O_1)\,.$$

Отсюда, $\mu\leq d(p,O_1)$, то есть, $\tau<d(p,O_1)$ и каждая из дуг $S_{D_1}(p,\tau)\neq\emptyset$.

Пусть $S(p,\tau)\cap\partial D_1=\emptyset$. Зафиксируем произвольно $\delta_1>0$. Пусть $l\subset F_1$ — дуга, связывающая точку a с границей ∂D_1 так, что

$$\mathrm{length}(l)<d(a,\partial D_1)+\delta_1.$$

Но γ разделяет a и ∂D_1, а потому $\gamma\cap l\neq\emptyset$.

Пусть $\xi\in\gamma\cap l$ — произвольная точка. Мы имеем

$$\begin{aligned}d(O_1)\leq d(\xi,\partial D_1)+d(\xi,p)+d(p,O_1)\leq\\ \leq d(a,\partial D_1)+\delta_1+\mathrm{length}(\gamma)+d(p,O_1)\leq\\ \leq d(O_1)-\mu+d(p,O_1)+\delta_1.\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\mu\leq d(p,O_1)+\delta_1\,.$$

Поскольку $\delta>0$ произвольно, мы получаем $\mu\leq d(p,O_1)$, и нужное доказано.

Итак, каждая из геодезических окружностей $S(p,\tau)$ отделяет точку p от O_1 при $\tau\in(\rho,\mu)$. Тем самым, мы вправе воспользоваться теоремой 1.2 с $K=K(p,\rho,\mu)$. Каждая из дуг (или кривых) $S_{D_1}(p,\tau)$ отделяет точки a,b от ∂D_1 и O_1. Ее образ $hS_{D_1}(p,\tau)$ отделяет ha, hb от ∂D_2 и O_2. Тем самым,

$$\rho\left(ha,hb;O_2,D_2\right)\leq \mathrm{length}\left(hS_{D_1}(p,\tau)\right).$$

Согласно (1.14), мы находим

$$\rho^2(ha, hb; O_2, D_2) \leq \left(\int\limits_{\rho}^{\mu} dt \Bigg/ \int\limits_{S_D(p,t)} Q(y)\,|dy|\right)^{-1} \leq \omega(\rho)$$

и (1.19) действительно имеет место.

Завершая доказательство, предположим, что $a_n, b_n \in D_1$ — точки, сходящиеся к $a, b \in \tilde{D}_1 \setminus D_1$ и удовлетворяющие (1.18). Мы вправе записать

$$\rho(ha_n, hb_n; O_2, D_2) \leq \omega^{1/2}(\rho(a_n, b_n; O_1, D_1))\,.$$

Полагая теперь $n \to \infty$, мы доказываем (1.19) в общем случае.

Литература

[1] H. Federer, *Geometric Measure Theory.* Springer-Ferlag, Berlin, 1969.

[2] М. А. Лаврентьев, *О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях* // ДАН СССР, **4** (1936), 207–210.

[3] Г. Д. Суворов, *Замечания к одной теореме М. А. Лаврентьева* // Уч. зап. Томск. гос. ун-та, **25** (1956), 3–8.

[4] O. Martio, V. M. Miklyukov, M. Vuorinen, *Relative distance and boundary properties of nonparametric surfaces with finite area* // Journal of Mathematical Analysis and Applications, **286**, №2, 524–539.

[5] C. Caratheodory, *Über die Begrenzung einfach zusammenhangender Gebiete* // Math. Ann., **73** (1913), 323–370.

[6] К. Каратеодори, *Конформное отображение, Современная математика.* Книга пятая, ОНТИ, Государственное технико - теоретическое издательство, Москва — Ленинград, 1934.

[7] J. Lelong-Ferrand, *Représentation conforme et transformations a intégrale de Dirichlet bornée.* Gauthier–Villars, Paris, 1955.

[8] Г. Д. Суворов, *Семейства плоских топологических отображений.* СО АН СССР, Новосибирск, 1965.

[9] Г. Д. Суворов, *Обобщенный "принцип длины и площади" в теории отображений.* Киев: Наукова Думка, 1985.

[10] Б. П. Куфарев, *Потенциалы и соответствие границ* // Изв. АН СССР, сер. матем., **41** (1977) №2, 438–461.

[11] В. И. Кругликов, *Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем* // Матем. сб., **130 (172)** (1986), №2, 185–206.

[12] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *BMO-quasiconformal mappings and Q-homeomorphisms in space.* Prep. 288, Dept. Math. of Helsinki Univ., 2001, 24 pp.

[13] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *To the theory of Q-homeomorphisms* // Dokl. Akad. Nauk, Russia, **381** (2001), №1, 20–22.

[14] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On the boundary behavior of Q-homeomorphisms.* Prep. 318, Dept. Math. of Helsinki Univ., 2002, 12 pp.

[15] Ю. Г. Решетняк, *Двумерные многообразия ограниченной кривизны, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления* Итоги науки и техники, ВИНИТИ, М.: **70** (1989), 8–189.

[16] T. Toro, *Surfaces with generalized second fundamental form in L^2 are Lipschitz manifolds* // J. Differential Geometry, **39** (1994), 65–101.

[17] S. Müller, V. Sverák, *On surfaces of finite total curvature* // J. Differential Geometry, **42** (1995), 229–258.

[18] И. М. Грудский, *Построение внутренних координат на составных римановых поверхностях.* В сб. : "Дифференциальные, интегральные уравнения и комплексный анализ", изд-во Калмыцкого ун-та, Элиста, 1986, 30–45.

[19] И. М. Грудский, *Формула Кристоффеля - Шварца для полиэдральных поверхностей* // ДАН СССР, **307** (1989) №1, 15–17.

[20] В. М. Миклюков, *Изотермические координаты на поверхностях с особенностями* // Матем. сб., **195** (2004), №1, 69–88.

[21] В. П. Луференко, Г. Д. Суворов, *О понятии тела простого конца в теории Каратеодори, Метр. вопр. теории функций и отображений*, III, Наукова Думка, Киев, 1971, 71–79.

[22] V. Gutlyanskii, O. Martio, T. Sugava, M. Vuorinen, *On the Degenerate Beltrami Equation* // Reports of the Department of Mathematics, University of Helsinki, Preprint **282** (2001), 1–32.

[23] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Degenerate Beltrami equation and radial Q-homeomorphisms*, Preprint 369, August 2003, Department of Mathematics, University of Helsinki.

[24] P. Hajlasz, *Sobolev Mappings, Co-area Formula and Related Topics.* In book "Proceedings on Analysis and Geometry", editor S. K. Vodop'yanov, Sobolev Institute Press, Novosibirsk, 2000, 227–254.

[25] F. W. Gehring, O. Lehto, *On the total differentiability of functions of a complex variable* // Ann. Acad. Sci. Fenn. A I, **272** (1959), 9 pp.

[26] G. Alessandrini and V. Nessi, *Univalent σ-harmonic mappings* // Arch. Ration. Mech. and Anal., **158** (2001), 155–171.

[27] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Наука, М.: 1967.

Сведения об авторах

В. М. Миклюков Волгоградский государственный университет, 2-я Продольная 30,
Волгоград 400062,
Россия
E-Mail: `miklyuk@mail.ru`