Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 2, 244 – 258

Сохранение сходимости решений стохастических уравнений при возмущении их коэффициентов

С. Я. Махно

Аннотация. Рассматриваются решения стохастических уравнений Ито, коэффициенты которых зависят нерегулярным образом от малого параметра при стремлении его к нулю. Приводятся условия для сходимости этих решений в смысле распределений к решению стохастического уравнения Ито. Затем коэффициенты исходных уравнений возмущаются функциями, также зависящими от малого параметра. Установлены условия слабой сходимости решений стохастических уравнений с возмущенными коэффициентами к тому же самому предельному процессу.

1991 MSC. 60H10, 60F17.

Ключевые слова и фразы. Стохастические уравнения, предельные теоремы, достаточные условия сходимости.

1. Введение

Рассмотрим решения стохастических уравнений Ито с коэффициентами, зависящими от малого параметра $\epsilon > 0$. Исследуем их сходимость при $\epsilon \to 0$, не предполагая при этом сходимости самих коэффициентов. Известны [6, 7] условия, при которых эти решения сходятся при $\epsilon \to 0$ в слабом смысле (смысле распределений) к решению стохастического уравнения Ито. Возмутим теперь исходные коэффициенты функциями, так же зависящими от параметра ϵ, "малыми" в некотором смысле, и рассмотрим решения стохастических уравнений с возмущенными коэффициентами. Что можно сказать о сходимости их решений? При достаточной гладкости коэффициентов и равномерной сходимости к нулю возмущающих функций ответ на этот вопрос

Статья поступила в редакцию 27.01.2004
Работа выполнена при поддержке гранта INTAS 99-0059.

следует из теоремы об интегральной непрерывности решений по параметру [8, теорема 5, стр. 100] — предельный процесс будет удовлетворять тому же уравнению, что и для процесса с невозмущенными коэффициентами. В статье рассматривается аналогичная задача без предположений о гладкости коэффициентов и при нерегулярной их зависимости от малого параметра. Более того, возмущающие функции в отдельных точках могут быть совсем не малыми, а стремится к бесконечности при $\epsilon \to 0$ или не иметь предела вообще.

Работа построена по следующему плану. В этом параграфе вводятся предположения. Доказательство теоремы проводится в параграфе 1. Вспомогательные результаты доказываются в параграфе 2, а в параграфе 3 рассмотрен класс случайных процессов с возмущенными периодическими коэффициентами и исследуется их поведение, основываясь на полученных результатах.

Пусть ϵ — малый параметр, E_d —d-мерное евклидово пространство и $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в нем. Будем считать, что заданы d-мерная вектор функция $b^\epsilon(t,x)$ и симметричная невырожденная d $\times$ d-матричная функция $a^\epsilon(t,x)$, $t \in [0,T], x \in E_d$. Обозначения $L_p([0,T] \times D)$, $W_p^{1,2}[0,T] \times D)$ (пространство Соболева), $L_{p,loc}$, $W_{p,loc}^{1,2}$ имеют обычный смысл [5], $||\cdot||_{p,loc}$ — норма в пространстве $L_{p,loc}$. Для слабой сходимости в $L_{2,loc}$ используем символ $\rightharpoonup$. Через C будут обозначатся различные постоянные, с указанием зависимости, если это необходимо. Далее, $(\mathcal{C}[0,T], \mathcal{C}_t)$, $t \in [0,T]$ — пространство функций $f(t)$ непрерывных на интервале $[0,T]$, $C_0^\infty(A)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на множестве A. Для слабой сходимости мер используется обозначение $\Longrightarrow$. Слабая сходимость случайных процессов понимается как слабая сходимость соответствующим им мер. Обозначим $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)$ основное вероятностное пространство с потоком σ-алгебр $\mathfrak{F}_t, t \geq 0$, $(w(t), \mathfrak{F}_t)$ d-мерный стандартный винеровский процесс, E — символ математического ожидания. Определим случайный процесс $\xi^\epsilon(t)$ как решение уравнения

$$\xi^\epsilon(t) = x^\epsilon + \int\limits_0^t b^\epsilon(s,\xi^\epsilon(s))ds + \int\limits_0^t (a^\epsilon(s,\xi^\epsilon(s)))^{\frac{1}{2}}\, dw(s), \quad t \in [0,T]. \quad (1.1)$$

Пусть λ, Λ постоянные такие, что $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. Будем говорить, что пара измеримых функций $(f(x), g(x))$ принадлежит классу $\mathcal{L}(\lambda,\Lambda)$, если $f(t,x)$ — d-мерная вектор функция, $g(t,x)$ — d$\times$d-симметричная непрерывная (при $d = 1$ — лишь измеримая) матричная функция и выполнены неравенства

$$|f_i(t,x)| + |g_{ij}(t,x)| \le \Lambda, \qquad i,j \in 1,\dots,d,$$

$$(g(t,x)\theta,\theta) \ge \lambda|\theta|^2, \qquad \theta \in E_d.$$

Введем условия (I), (V), (N).

Условие (I). При любом $\epsilon > 0$ пара $(b^\epsilon, a^\epsilon) \in \mathcal{L}(\lambda,\Lambda)$.

Условие (V). Существует последовательность функций $V_k^\epsilon(t,x) \in \in W^{1,2}_{d+1,loc}, k = 1,\dots,d$, такая, что

$V_1)$ $\hat{b}_k^e \stackrel{def}{=}: b_k^\epsilon + \frac{1}{2}(a_{kl}^\epsilon\nabla,\nabla)V_k^\epsilon \rightharpoonup 0;$

$V_2)$ $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \sup\limits_{t\in[0,T],x\in D} |V_k^\epsilon(t,x)| = 0,$ для любой ограниченной области $D \in E_d$;

$V_3)$ $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\left|\left|\frac{\partial V_k^e}{\partial t} + (b^\epsilon, \nabla V_k^\epsilon) + \hat{b}_k^\epsilon - b_k\right|\right|_{d+1,loc} = 0.$

Условие (N). Существует последовательность функций $N_{kl}^\epsilon(t,x) \in \in W^{1,2}_{d+1,loc}, k,l = 1,\dots,d$, такая, что $N_{kl}^\epsilon = N_{lk}^\epsilon$ и :

$N_1)$ $\hat{a}_{kl}^e \stackrel{def}{=}: a_{kl}^\epsilon + (a_{kl}^\epsilon\nabla,\nabla)N_{kl}^\epsilon \rightharpoonup 0;$

$N_2)$ $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \sup\limits_{t\in[0,T],x\in D} |N_{kl}^\epsilon(t,x)| = 0,$ для любой ограниченной области $D \in E_d$;

$N_3)$ $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\left|\left|\frac{\partial N_{kl}^e}{\partial t} + (b^\epsilon, \nabla N_{kl}^\epsilon) + \hat{a}_{kl}^\epsilon - a_{kl}\right|\right|_{d+1,loc} = 0.$

Если $x^\epsilon \to x$, выполнены условия (I), (V), (N) и пара $(b,a) \in \in \mathcal{L}(\lambda,\Lambda)$, в работе [6, теорема 2] доказано, случайный процесс ξ^ϵ слабо сходится к процессу ξ, являющимся решением стохастического уравнения

$$\xi(t) = x + \int\limits_0^t b(s,\xi(s))ds + \int_0^t (a(s,\xi(s)))^{\frac{1}{2}}dw(s). \quad t \in [0,T]. \tag{1.2}$$

Коэффициенты в (1.2) определяются условиями (V) и (N) однозначно. В статьях [6, 7] имеются примеры применения этого результата, в которых для конкретных классов процессов определяются вспомогательные функции V_k^ϵ, N_{kl}^ϵ и устанавливается вид коэффициентов предельного процесса. Отметим, что в некоторых случаях, в частности, при $d = 1, 2$, условия (N) и (V) являются также и необходимыми условиями слабой сходимости решений стохастических уравнений [6, теорема 3].

2. Возмущенные уравнения

Рассмотрим поставленную во введении задачу о возмущении. Пусть при каждом $\epsilon > 0$, $t \in [0, T]$, $x \in E_d$ заданы измеримые d-вектор функция $B^\epsilon(t, x)$ и $d \times d$-симметричная матричная функция $A^\epsilon(t, x)$. Определим случайный процесс $\eta^\epsilon(t)$ как решение стохастического уравнения, $t \in [0, T]$,

$$\eta^\epsilon(t) = x^\epsilon + \int_0^t (b^\epsilon(s, \eta^\epsilon(s)) + B^\epsilon(s, \eta^\epsilon(s)))ds +$$

$$+ \int_0^t (a^\epsilon(s, \eta^\epsilon(s) + A^\epsilon(s, \eta^\epsilon(s)))^{\frac{1}{2}} dw(s). \quad (2.1)$$

Для коэффициентов уравнения (2.1) введем условие (II).
Условие (II).

- II_1. При любом $\epsilon > 0$ решение уравнения (2.1) существует в слабом смысле.
- II_2. Пара $(b^\epsilon, a^\epsilon) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$.
- II_3. Матрица $A^\epsilon(t, x)$ неотрицательно определена.
- II_4. Существуют функции $\alpha^\epsilon(t)$, $h^\epsilon(t, x)$ такие, что

$$|B_k^\epsilon(t, x)| + |A_{kl}^\epsilon(t, x)| \le \alpha^\epsilon(t) + h^\epsilon(t, x) \qquad \text{и}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(||h^\epsilon||_{d+1} + \int_0^T \alpha^\epsilon(t) dt \right) = 0.$$

Теорема 2.1. *Пусть $x^\epsilon \to x$, выполнено условие* (II). *Для функций $b^e(t, x)$, $a^e(t, x)$ справедливы условия* (V), (N), *пара* $(b, a) \in \mathcal{L}(\lambda, \Lambda)$. *Кроме того, предположим, что для любой ограниченной области $D \in E_d$, $i, j, k, l = 1, \ldots, d$ выполняются условия:*

$$V_4) \quad \lim_{\epsilon \to 0} \sup_{t \in [0,T], x \in D} |\nabla V_k^\epsilon| = 0;$$

$$V_5) \sup_{t \in [0,T], x \in D} \left| \frac{\partial V_k^\epsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right| \le \Lambda;$$

$$N_4)\quad \lim_{\epsilon\to 0}\sup_{t\in[0,T],x\in D}|\nabla N^\epsilon_{kl}|=0;$$

$$N_5)\sup_{t\in[0,T],x\in D}\left|\frac{\partial N^\epsilon_{kl}}{\partial x_i\partial x_j}\right|\leq \Lambda.$$

Тогда $\eta^\epsilon \implies \xi$ *- решению уравнения* (1.2).

Доказательство. Из леммы 3.3 следует, что семейство мер μ^ϵ_η, порожденное процессами η^ϵ на пространстве $(\mathcal{C}[0,T],\mathcal{C}_t)$ слабо компактно. Обозначим μ одну из ее предельных точек. Докажем, что для произвольного непрерывного ограниченного $\mathcal{C}_s$-измеримого функционала $\phi_s(x)$ и любой функции $\Phi(x)\in C^\infty_0(E_d)$

$$E^\mu\phi_s(x)\Bigg[\Phi(x(t))-\Phi(x(s))-\int\limits_s^t[(b(v,x(v))),\nabla\Phi(x(v)))+ \\ +\frac{1}{2}(a(v,x(v))\nabla,\nabla)\Phi(x(v))]\Bigg]dv=0 \quad (2.2)$$

Отсюда и [9] будет следовать утверждение теоремы. Применим к функции $\Phi(x)\in C^\infty_0(E_d)$ и процессу (2.1) формулу Ито:

$$E\phi_s(\eta^\epsilon)\Bigg\{\Phi(\eta^\epsilon(t))-\Phi(\eta^\epsilon(s))- \\ -\int\limits_s^t\Bigg[\Bigg(b^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v))+B^\epsilon(v,\eta^\epsilon),\nabla\Phi(\eta^\epsilon(v))\Bigg)+ \\ +\frac{1}{2}\Bigg((a^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v))+A^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)))\nabla,\nabla\Bigg)\Phi(\eta^\epsilon(v))\Bigg]dv\Bigg\}=0.$$

Перепишем это соотношение следующим образом

$$E\phi_s(\eta^\epsilon)\Bigg\{\Phi(\eta^\epsilon(t))-\Phi(\eta^\epsilon(s))-\int\limits_s^t\Bigg[(b(v,\eta^\epsilon(v)),\nabla\Phi(\eta^\epsilon(v))+ \\ +\frac{1}{2}(a(v,\eta^\epsilon(v))\nabla,\nabla)\Phi(\eta^\epsilon(v))\Bigg]\Bigg\}=I^\epsilon_1+I^\epsilon_2+I^\epsilon_3. \quad (2.3)$$

В равенстве (2.3)

$$I_1^\epsilon = E\phi_s(\eta^\epsilon)\int\limits_s^t\Big[(B^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)),\nabla\Phi(\eta^\epsilon(v))+$$
$$+\frac{1}{2}(A^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v))\nabla,\nabla)\Phi(\eta^\epsilon(v))\Big]dv$$

$$I_2^\epsilon = E\phi_s(\eta^\epsilon)\int\limits_s^t\Big(b(v,\eta^\epsilon(v))-b^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)),\nabla\Phi(\eta^\epsilon(v))\Big)dv$$

$$I_3^\epsilon = \frac{1}{2}E\phi_s(\eta^\epsilon)\int\limits_s^t\Big((a(v,\eta^\epsilon(v))-a^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)))\nabla,\nabla\Big)\Phi(\eta^\epsilon(v))dv.$$

Оценим I_1^ϵ. Используя условие II_4 и оценку леммы 2, получим

$$|I_1^\epsilon|\le CE\int\limits_0^T\alpha^\epsilon(v)dv+CE\int\limits_0^T h^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v))dv$$
$$\le CE\int\limits_0^T\alpha^\epsilon(v)dv+C||h^\epsilon||_{d+1}.$$

Поэтому

$$\lim_{\epsilon\to 0} I_1^\epsilon = 0. \tag{2.4}$$

Согласно леммам 4, 5,

$$\lim_{\epsilon\to 0} I_2^\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0} I_3^\epsilon = 0. \tag{2.5}$$

Таким образом, из (2.3), (2.4), (2.5) имеем,

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\phi_s(\eta^\epsilon)\Big\{\Phi(\eta^\epsilon(t))-\Phi(\eta^\epsilon(s))-\int\limits_s^t\Big[(b(v,\eta^\epsilon(v)),\nabla\Phi(\eta^\epsilon(v)))+$$
$$+\frac{1}{2}(a(v,\eta^\epsilon(v))\nabla,\nabla)\Phi(\eta^\epsilon(v))\Big]dv\Big\}=0 \tag{2.6}$$

Если функции $b(t,x), a(t,x)$ непрерывны по x, то обоснование предельного перехода в (2.6) при $\epsilon\to 0$ не вызывает трудностей. Для лишь измеримых этих функций предельный переход обосновывается как в [3, стр.127] , используя оценку Крылова (лемма 3.2). Таким образом (2.2) установлено и теорема доказана. □

3. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе доказываются результаты, использованные ранее для доказательства теоремы. Начнем с доказательства оценки Крылова для решений стохастических уравнений. Для удобства ссылок сформулируем лемму 5.1 из работы [4] полностью. Для этого обозначим через $m(t)$ непрерывный локальный мартингал согласованный с потоком $\mathfrak{F}_t$ со значениями в E_d, $A(t)$ — непрерывный возрастающий $\mathfrak{F}_t$ — измеримый процесс, $B(t)$ — непрерывный $\mathfrak{F}_t$ — измеримый процесс со значениями в E_d, имеющий п. н. ограниченную вариацию на всяком ограниченном отрезке времени. Предположим, что $A(0) = m(0) = B(0) = 0$, $d\langle m\rangle_t \ll dA(t)$, где $\langle m\rangle_t$ — характеристика мартингала $m(t)$. Пусть заданы прогрессивно измеримые относительно $\mathfrak{F}_t$ неотрицательные процессы $r(t)$, $c(t)$. Положим $x(t) = B(t) + m(t)$, $t \in [0, T]$ и

$$y(t) = \int_0^t r(s)dA(s), \quad \phi(t) = \int_0^t c(s)dA(s), \quad g_{ij}(t) = \frac{1}{2}\frac{d\langle m_i, m_j\rangle_t}{dA(t)} \tag{3.1}$$

Обозначим через $S_R = \{x : x < R\}$, $C_R = \{(t, x) : t \in [0, T],\ x < < R\}$ и τ_R — момент первого выхода процесса $x(t)$ из множества S_R, γ — произвольный Марковский момент относительно $\mathfrak{F}_t$.

Лемма 3.1. [4, лемма 5.1] *Обозначим*

$$A = E\int_0^{\gamma\wedge\tau_R} e^{-\phi(t)} tr\ g(t)\, dA(t), \quad B = E\int_0^{\gamma\wedge\tau_R} e^{-\phi(t)}|dB(t)|.$$

Тогда для любой неотрицательной борелевской функции $f(t, x)$ и $p \ge d$

$$E\int_0^{\gamma\wedge\tau_R} e^{-\phi(t)} c(t)^{\frac{p-d}{p+1}} (r(t) det\ g(t))^{\frac{1}{p+1}} f(y(t), x(t))\, dA(t) \le$$

$$\le C(d)(B^2 + A)^{\frac{d}{2(p+1)}} ||f||_{p+1, C_R},$$

где $c^0(t) = 1$.

Лемма 3.2. (Оценка Крылова) *Пусть процесс $z(t)$ является решением стохастического уравнения*

$$z(t) = z_0 + \int_0^t b(s, z(s))\, ds + \int_0^t (\delta(s, z(s)))^{\frac{1}{2}}\, dw,$$

где $b(t,x)$ — вектор функция размерности d, а $\delta(t,x)$ — симметричная матричная $d\times d$ функция. Предположим, что при $i,j=1,\ldots,d$ выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned}
&1) \qquad |b_i(t,x)|+|\delta_{ij}(t,x)|\le \Lambda+\alpha(t)+H(t,x),\\
&2) \qquad (\delta(t,x)\theta,\theta)\ge\lambda|\theta|^2, \lambda>0,\\
&3) \qquad L=\int_0^T\alpha(t)dt+||H||_{d+1}<\infty.
\end{aligned}$$

Тогда существует постоянная $C(d,T,\lambda,\Lambda,L)$ такая, что

$$E\int_0^T|f(t,z(t))|\,dt\le C||f||_{d+1}$$

Доказательство. Обозначим

$$x(t)=z(t)-z_0,\quad B(t)=\int_0^t b(s,z(s))\,ds,\quad m(t)=\int_0^t\delta(s,z(s))\,dw$$

и в (3.1) положим $A(t)=t,\ c(t)=\lambda,\ r(t)=1$. Пусть, кроме того, $\tilde f(t,x)=f(t,x+z_0)$. Из Леммы 1 при $p=d$ имеем,

$$E\int_0^{\gamma\wedge\tau_R}e^{-\lambda t}(det\,\delta(t,z(t)))^{\frac{1}{d+1}}|\tilde f(t,x(t))|dt\le C(d)(B^2+A)^{\frac{d}{2(d+1)}}||\tilde f||_{d+1,C_R}$$

$$\le C(d)(B^{\frac{d}{(d+1)}}+A^{\frac{d}{2(d+1)}})||f||_{d+1},$$

где

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\gamma\wedge\tau_R}e^{-\lambda t}tr\ \delta(t,z(t))\,dt,\quad B=\int_0^{\gamma\wedge\tau_R}e^{-\lambda t}|b(t,z(t)|\,dt$$

Оценим каждую из этих величин. При предположении 1)

$$B\le\frac{\Lambda}{\lambda}+\int_0^T\alpha(t)\,dt+$$

$$+E\int_0^{\gamma\wedge\tau_R}e^{-\lambda t}(det\ \delta(t,z(t))^{\frac{1}{d+1}}(det\ \delta(t,z(t)))^{-\frac{1}{d+1}}|\tilde H(t,x(t))|\,dt$$

Применяя к последнему слагаемому в правой части этого неравенства оценку леммы 3.1 и учитывая предположение 2), получим

$$B \le \frac{\Lambda}{\lambda} + \int\limits_0^T \alpha(t)\,dt + \frac{C(d)}{\lambda^d}(B^{\frac{d}{(d+1)}} + A^{\frac{d}{2(d+1}})||H||_{d+1} \qquad (3.2)$$

Аналогичная оценка имеет место и для A:

$$2A \le \frac{\Lambda}{\lambda} + \int\limits_0^T \alpha(t)\,dt + \frac{C(d)}{\lambda^d}(B^{\frac{d}{(d+1)}} + A^{\frac{d}{2(d+1}})||H||_{d+1} \qquad (3.3)$$

Применяя неравенство Юнга $ab \le \frac{\alpha^r a^r}{r} + \frac{b^q}{q\alpha^q}$, где a, b, $\alpha > 0$, $r > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$, с $\alpha = (\frac{2(d+1)}{d})^{\frac{d}{2(d+1)}}$, $r = \frac{2(d+1)}{d}$, получим (напомним, что через C(...) обозначаются различные постоянные)

$$A^{\frac{d}{2(d+1)}} C(d,\lambda)||H||_{d+1} \le A + C(d,\lambda,L)$$

Отсюда и (3.3) имеем,

$$A \le C(d,\lambda,\Lambda,L) + C(d,\lambda)B^{\frac{d}{(d+1)}}||H||_{d+1} \qquad (3.4)$$

Перепишем последнее соотношение следующим образом:

$$A \le C(d,\lambda,\Lambda,L)(1 + B^{\frac{d}{(d+1)}}) \qquad (3.5)$$

и подставим эту оценку в неравенство (3.2):

$$B \le C(d,\lambda,\Lambda,L)(1 + B^{\frac{d}{d+1}}). \qquad (3.6)$$

Вновь применяя неравенство Юнга с $\alpha = (\frac{d+1}{d})^{\frac{d}{d+1}}$, $r = \frac{d+1}{d}$, получим

$$C(d,\lambda,\Lambda,L)B^{\frac{d}{d+1}} \le \frac{B}{2} + C(d,\lambda,\Lambda,L). \qquad (3.7)$$

Из (3.7) и (3.6) следует ограниченность B константой, зависящей от постоянных d, λ, Λ, L. Из неравенства (3.5) следует и ограниченность A постоянной, зависящей от тех же величин.

Таким образом, доказано следующее неравенство

$$E \int\limits_0^{\gamma\wedge\tau_R} e^{-\lambda t}(det\ \delta(t,z(t)))^{\frac{1}{d+1}}|f(t,z(t))|dt \le C(d,\lambda,\Lambda,L)||f||_{d+1}. \quad (3.8)$$

Используя оценку (3.8), имеем

$$E\int_0^T |f(t,z(t))|\,dt =$$

$$= \int_0^T e^{-\lambda t} e^{\lambda t} (det\ \delta(t,z(t)))^{\frac{1}{d+1}} (det\ \delta(t,z(t)))^{\frac{-1}{d+1}} |f(t,z(t))|\,dt \le$$

$$\le \frac{e^{\lambda T}}{\lambda^d} C(d,\lambda,\Lambda,L)||f||_{d+1}$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.3. *Пусть* $|x^\epsilon| \le C$ *и выполнено условие* (II). *Тогда, семейство мер, порожденное процессами* η^ϵ *на пространстве* $\mathcal{C}[0,T]$ *слабо компактною*

Доказательство. Представим процесс $\eta^\epsilon(t)$ в виде $\eta^\epsilon(t) = \gamma^e(t) + \kappa^\epsilon(t)$, где

$$\gamma^e(t) = x^\epsilon + \int_0^t b^\epsilon(s,\eta^\epsilon(s))\,ds + \int_0^t (a^\epsilon(s,\eta^\epsilon(s)))^{\frac{1}{2}}\,dw(s).$$

$$\kappa^\epsilon(t) = \int_0^t B^\epsilon(s,\eta^\epsilon(s))\,ds +$$

$$+ \int_0^t \Big[(a^\epsilon(s,\eta^\epsilon(s) + A^\epsilon(s,\eta^\epsilon(s)))^{\frac{1}{2}} - (a^\epsilon(s,\eta^\epsilon(s)))^{\frac{1}{2}}\Big]\,dw(s).$$

Т. к. функции (b^ϵ, a^ϵ) равномерно ограничены, то для процессов $\gamma^e(t)$ справедливы неравенства [3, стр. 120],

$$E|\gamma^e(t)|^2 \le C(1+|x^\epsilon|^2), \qquad E|\gamma^e(t)-\gamma^e(s)|^4 \le C|t-s|^2$$

и, следовательно, семейство мер, порожденное ими на пространстве $\mathcal{C}[0,T]$ слабо компактно [2, стр 355]. Используя свойство стохастических интегралов (оценку супремума его второго момента), получим

$$E\sup_{t\in[0,T]} |\kappa^\epsilon(t)| \le\ E\int_0^T |B^\epsilon(t,\eta^\epsilon(t))|\,dt + \left(E\int_0^T tr A^\epsilon(t,\eta^\epsilon(t))\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

Пусть L — константа, ограничивающая сумму функций $\int_0^T \alpha_\epsilon(t)dt+$ $+||h_\epsilon||_{d+1}$, которая существует в силу условия II_4. Далее, при сделанных предположениях и в силу леммы 3.2, имеем

$$E\int_0^T |B^\epsilon(t,\eta^\epsilon(t))|\,dt \le \int_0^T \alpha_\epsilon(t)\,dt + E\int_0^T h_\epsilon(t,\eta^\epsilon(t))\,dt \le$$

$$\le \int_0^T \alpha_\epsilon(t)\,dt + C(d,T,\lambda,\Lambda,L)||h_\epsilon||_{d+1}$$

Отсюда и условия II_4,

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\int_0^T |B^\epsilon(t,\eta^\epsilon(t))|\,dt = 0. \tag{3.10}$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\int_0^T trA^\epsilon(t,\eta^\epsilon(t))dt = 0. \tag{3.11}$$

Из (3.9)–(3.11) вытекает равенство

$$\lim_{\epsilon\to 0} E \sup_{t\in[0,T]} |\kappa^\epsilon(t)| = 0. \tag{3.12}$$

Из (3.12), слабой компактности мер, соответствующих процессам γ^e, следует утверждение леммы. Лемма доказана. □

Лемма 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для любой функции* $\Psi(x)\in C_0^\infty(E_d)$ *и любого* $\mathcal{C}_s$*-измеримого функционала* $\phi_s(x)$

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\phi_s(\eta^\epsilon)\int_s^t \Psi(\eta^\epsilon(v))[b_k^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)) - b_k(v,\eta^\epsilon(v))]dv = 0.$$

Доказательство. Пусть $V_k^\epsilon(t,x)$ — последовательность функций, удовлетворяющая условию (V). Применим к функции $\Psi(x)V_k^\epsilon(t,x)$ и процессу $\eta^\epsilon(t)$ формулу Ито. Имеем

$$E\phi_s(\eta^\epsilon)\int_s^t \Psi(\eta^\epsilon(v))[b_k^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)) - b_k(v,\eta^\epsilon(v))]dv = J_1^\epsilon + J_2^\epsilon + J_3^\epsilon + J_4^\epsilon + J_5^\epsilon, \tag{3.13}$$

где

$$J_1^\epsilon = E\phi_s(\eta^\epsilon)\Big[\Psi(\eta^\epsilon(t))V_k^\epsilon(t,\eta^\epsilon(t)) - \Psi(\eta^\epsilon(s))V_k^\epsilon(s,\eta^\epsilon(s))\Big],$$

$$J_2^\epsilon = E\phi_s(\eta^\epsilon)\int_s^t V_k^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v))\Bigg[\Big(b^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)) + B^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)), \nabla\Phi(\eta^\epsilon(v))\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}\Big((a^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)) + A^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)))\nabla,\nabla\Big)\Phi(\eta^\epsilon(v))\Bigg]dv,$$

$$J_3^\epsilon = E\phi_s(\eta^\epsilon)\int_s^t \Bigg[\Big(\Psi(\eta^\epsilon(v))B^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)+$$
$$+ (a^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)) + A^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v))\nabla\Psi(\eta^\epsilon(v)), \nabla V_k^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v))\Big)\Bigg]dv,$$

$$J_4^\epsilon = \frac{1}{2}E\phi_s(\eta^\epsilon)\int_s^t \Psi(\eta^\epsilon(v))\Big(A^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v))\nabla,\nabla\Big)V_k^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v))dv,$$

$$J_5^\epsilon = E\phi_s(\eta^\epsilon)\int_s^t \Psi(\eta^\epsilon(v))\Bigg[\frac{\partial V_k^e(v,\eta^\epsilon(v)}{\partial t} + (b^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)), \nabla V_k^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)))+$$
$$+\hat{b}_k^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)) - b_k(v,\eta^\epsilon(v))\Bigg]dv.$$

Из свойства (V_1) следует, что

$$\lim_{\epsilon\to 0} J_1^\epsilon = 0. \tag{3.14}$$

Из предположений (V_1), (II_4) и леммы 3.2 вытекает равенство

$$\lim_{\epsilon\to 0} J_2^\epsilon = 0. \tag{3.15}$$

Соотношение

$$\lim_{\epsilon\to 0} J_3^\epsilon = 0 \tag{3.16}$$

есть следствие свойств (V_4) и $II_4)$ и леммы 3.2. Аналогично, из свойств (V_5) и (II_4) следует, что

$$\lim_{\epsilon\to 0} J_4^\epsilon = 0. \tag{3.17}$$

На основании свойства (V_3) и оценки леммы 3.2 заключаем, что

$$\lim_{\epsilon\to 0} J_5^\epsilon = 0. \tag{3.18}$$

Из (3.13)–(3.18) следует утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

Аналогично доказывается лемма 3.5. Формулу Ито необходимо применить к функции $\Psi(x)N_{kl}^\epsilon(t,x)$.

Лемма 3.5. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для любой функции* $\Psi(x) \in C_0^\infty(E_d)$ *и любого* $\mathcal{C}_s$*-измеримого функционала* $\phi_s(x)$

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\phi_s(\eta^\epsilon)\int\limits_s^t \Psi(\eta^\epsilon(v))[a_{lk}^\epsilon(v,\eta^\epsilon(v)) - a_{kl}(v,\eta^\epsilon(v))]\,dv = 0.$$

4. Возмущение уравнений с периодическими коэффициентами

Рассмотрим стохастическое уравнение

$$\eta^\epsilon(t) = x + \int\limits_0^t (b^\epsilon(s,\eta^\epsilon(s)) + B^\epsilon(s,\eta^\epsilon(s)))ds + \\ + \int\limits_0^t (a^\epsilon(s,\eta^\epsilon(s)) + A^\epsilon(s,\eta^\epsilon(s)))^{\frac{1}{2}} dw(s) \tag{4.1}$$

Здесь $b^\epsilon(t,x) = b\biggl(t, \frac{t}{\epsilon^2}, x, \frac{x}{\epsilon}\biggr)$, $a^\epsilon(t,x) = a\biggl(t, \frac{t}{\epsilon^2}, x, \frac{x}{\epsilon}\biggr)$. Предположим, что

$$|B^\epsilon(t,x)| + |A^\epsilon(t,x)| \le C\biggl(\frac{\epsilon^3|2t-1|}{[t(t-1)+\epsilon^2]^2} + n_\epsilon(x)\biggr),$$

где функция $n_\epsilon(x)$ имеет вид:

$$n_\epsilon(x) = \frac{\epsilon^{\frac{d}{4(d+1)}}}{(2\pi\epsilon)^{\frac{d}{2(d+1)}}} \exp\biggl\{-\frac{|x|^2}{2\epsilon(d+1)}\biggr\}.$$

Т. е. в точках $t=0,\ t=1,\ x=0$, функции $B^\epsilon(t,x)$, $A^\epsilon(t,x)$, могут неограниченно возрастать при стремлении ϵ к нулю. При этом, условие (II_4) выполнено. Функции $b_i(t,s,x,y)$, $a_{ij}(t,s,x,y)$ периодичны с периодом 1 по аргументам (s,y), ограниченны, достаточно гладкие с ограниченными производными по всем аргументам. Существование, единственность, гладкость, ограниченность производных, рассматриваемых ниже уравнений для функций $p(t,s,x,y)$, $V_k(t,s,x,y)$, $N_{kl}(t,s,x,y)$, имеется в [1].

Далее, пусть $p(t,s,x,y)$ - единственное периодическое по (s,y) решение уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial s}p + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(a_{ij}(t,s,x,y)p) = 0, \qquad \langle p\rangle_{s,y} = 1,$$

зависящее от (t,x) как от параметров. Скобки $\langle\cdot\rangle_{s,y}$ означают усреднение периодической функции по периоду. Положим

$$\tilde{b}_i(t,x) = \langle (b_i p)(t,s,x,y)\rangle_{s,y}, \qquad \tilde{a}_{ij}(t,x) = \langle (a_{ij}p)(t,s,x,y)\rangle_{s,y}$$

и определим функции $V_k(t,s,x,y)$, $N_{kl}(t,s,x,y)$, как решения уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial s}V_k + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(t,s,x,y)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}V_k = \tilde{b}_k(t,x) - b_k(t,s,x,y), \ \langle V_k\rangle_{s,y} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}N_{kl} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(t,s,x,y)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}N_{kl} = \tilde{a}_{kl}(t,x) - a_{kl}(t,s,x,y),$$

$$\langle N_{kl}\rangle_{s,y} = 0.$$

Легко проверяется, что функции

$$V_k^{\epsilon}(t,x) = \epsilon^2 V_k\left(t, \frac{t}{\epsilon^2}, x, \frac{x}{\epsilon}\right), N_{kl}^{\epsilon}(t,x) = \epsilon^2 N_{kl}\left(t, \frac{t}{\epsilon^2}, x, \frac{x}{\epsilon}\right),$$

удовлетворяют условиям (V) и (N) с функциями $b(t,x) = \tilde{b}(t,x)$, $a(t,x) = \tilde{a}(t,x)$ и при этом выполнены условия V_4, V_5, N_4, N_5. Из теоремы следует, что предельный процесс для уравнения (3.1) есть решение уравнения

$$\xi(t) = x + \int_0^t \tilde{b}(s,\xi(s))ds + \int_0^t (\tilde{a}(s,\xi(s)))^{\frac{1}{2}}dw.$$

Литература

[1] Bensoussan A., Lions P. L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis periodic structures.* Amsterdam etc. North–Holland, 1978, 700 p.

[2] Гихман И. И., Скороход А. В. *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.* Киев, Наукова думка, 1982, 612 с.

[3] Крылов Н. В. *Управляемые процессы диффузионного типа.* Москва, Наука, 1982, 400 с.

[4] Крылов Н. В. *Об оценках максимума решения параболического уравнения и оценках распределения семимартингала* // Матем. сборник **130 (172)** (1986), №2, 207–221.

[5] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Москва, Наука, 1967, 736 с.

[6] Махно С. Я. *Сходимость диффузионных процессов* // Украинский матем. ж. **44** (1992), №2, 284–289.

[7] Махно С. Я. *Сходимость диффузионных процессов II* // Украинский матем. ж. **44** (1992), №10, 1389–1395.

[8] Скороход А. В. *Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.* Киев, Наукова думка, 1987, 228 с.

[9] D. V.Strook, S. R. S Varadhan *Multidimensional Diffusion Processes.* — Springer–Verlag, New–York, 1979, 700 p.

Сведения об авторах

С. Я. Махно

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург, 74,
83114, Донецк Украина
E-Mail: makhno@iamm.ac.donetsk.ua