Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 2, 230 – 243

Гармонические функции предписанного роста на квазимодельных римановых многообразиях

А. Г. Лосев

(*Представлена Гутлянским В. Я.*)

Аннотация. В работе изучается асимптотическое поведение решений весового уравнения Лапласа-Бельтрами на некомпактных римановых многообразиях, обобщающих как модельные многообразия, так и искривленные римановы произведения. На основе спектральных свойств рассматриваемых многообразий получены оценки размерностей пространств гармонических функций предписанного роста в терминах внутренних характеристик данных многообразий.

2000 MSC. 30F15, 31A05.

Ключевые слова и фразы. Оператор Лапласа-Бельтрами, риманово многообразие, теорема Лиувилля.

1. Введение

В данной работе изучается поведение решений уравнения Лапласа-Бельтрами на некомпактных римановых многообразиях некоторого специального вида, обобщающих сферически-симметричные. Классическая формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbf{R}^n$ функция является тождественной постоянной. Хорошо известна справедливость следующих утверждений, носящих название теорем типа Лиувилля.

1. Если гармоническая функция u в $\mathbf{R}^n$ имеет конечный интеграл Дирихле, то $u \equiv \mathrm{const}$.
2. Если $u \in L^p(\mathbf{R}^n)$ является гармонической функцией и $1 \leq p < \infty$, то $u \equiv 0$.
3. Если функция u — гармоническая в $\mathbf{R}^n$ и удовлетворяет неравенству $|u(x)| \leq C(1+|x|)^m$, то u — гармонический полином степени, не превышающей m.

Статья поступила в редакцию 5.01.2004
Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 03-01-00304)

В последнее время осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Будем говорить, что на M выполнено обобщенное (A, L)-лиувиллево свойство, если любое решение уравнения $Lu = 0$, принадлежащее функциональному классу A, имеет конечную размерность. Оценки размерностей различных пространств гармонических функций на некомпактных римановых многообразиях были получены в работах ряда математиков (см., например, [2]–[8], [12], [13], [18], [19]).

Ряд работ был посвящен изучению гармонических функций на модельных, или сферически-симметричных многообразиях. В частности, были получены точные условия разрешимости задачи Дирихле с непрерывными граничными данными на "бесконечности", условия выполнения теорем типа Лиувилля для ограниченных и положительных гармонических функций, а также найдены точные оценки размерности пространств гармонических функций, некоторого предписанного роста (см., например, [8], [9], [12], [14]). Опишем данные многообразия подробнее.

Фиксируем начало координат $O \in \mathbf{R}^n$ и некоторую гладкую функцию q на интервале $[0, R_0)$ (R_0 может быть ∞) такую, что $q(0) = 0$ и $q'(0) = 1$. Определим модельное риманово многообразие M_q следующим образом:

1) множество точек M_q является открытым шаром в $\mathbf{R}^n$ радиуса R_0 с центром в O (если $R_0 = \infty$ то все $\mathbf{R}^n$);

2) в полярных координатах (r, θ) (где $r \in (0, R_0)$ и $\theta \in S^{n-1}$) риманова метрика на $M_q \setminus \{O\}$ определяется как

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r)d\theta^2, \tag{1.1}$$

где $d\theta$ — стандартная риманова метрика на сфере S^{n-1};

3) риманова метрика в O является гладким продолжением (1.1).

Примерами таких многообразий могут служить евклидово пространство $\mathbf{R}^n$, гиперболическое пространство $\mathbf{H}^n$, поверхности вращения и т. д.

В данной работе изучаются несколько более общие многообразия. А именно, рассмотрим тройки $(S_i, d\theta_i^2, f_i)$, где $i = 1, \cdots, k$, S_i — компактное риманово многообразие без края, $d\theta_i^2$ — метрика на S_i, f_i — положительная гладкая функция на S_i.

Многообразие D будем называть *скрещенным произведением порядка* k, если D изометрично прямому произведению $[r_0, \infty) \times S_1\times$

$\times \dots \times S_k$ с метрикой

$$ds^2 = \prod_{i=1}^{k} f_i^2(\theta_i) dr^2 + \sum_{i=1}^{k} q_i^2(r) \prod_{j \neq i} f_j^2(\theta_j) d\theta_i^2.$$

Здесь $q_i(r)$ — положительные гладкие на $[r_0, \infty)$ функции.

Многообразия, представимые в виде $M = B \cup D$, где B — компакт, а D — скрещенное произведение, будем называть *квазимодельными многообразиями.*

Заметим, что в поведении решений эллиптических уравнений на данных многообразиях и на модельных, есть отличия. Например, на модельных многообразиях из выполнения теоремы Лиувилля для ограниченных гармонических функций следует стохастическая полнота (см. [10]), или, что тоже самое, справедливость теоремы Лиувилля для ограниченных решений уравнения

$$\Delta u - u = 0.$$

На произвольных квазимодельных многообразиях данное свойство не выполняется (см. [11]).

Поведению гармонических функций на различных квазимодельных многообразиях посвящен ряд работ (см., например, [4], [11], [13], [17]). Данная работа посвящена изучению неограниченных гармонических функций на данных многообразиях.

2. Гармонические функции на квазимодельных многообразиях

В данном параграфе изучается поведение гармонических функций на квазимодельных многообразиях. Рассмотрим весовой оператор Лапласа-Бельтрами

$$\Delta_\sigma = \sigma^{-1} \mathrm{div}(\sigma \nabla),$$

где σ — положительная гладкая функция, на квазимодельных многообразиях. Здесь ∇ и div, соответственно, градиент и дивергенция в римановой метрике на M.

Будем предполагать, что на скрещенном произведении D выполнено

$$\sigma(r, \theta) = \delta(r) \prod_{i=1}^{k} h_i(\theta_i).$$

Здесь $\delta(r)$ и $h_i(\theta_i)$ — положительные гладкие на $[r_0,\infty)$ и S_i функции. Решения уравнения

$$\Delta_\sigma u = 0 \tag{2.2}$$

являются гармоническими функциями на соответствующем весовом многообразии. В дальнейшем будем называть их *σ-гармоническими.*

Пусть λ_j^i - j-е собственное число, заданного на S_i оператора $-L_i$, где

$$L_i = \operatorname{div}(f_i^{\frac{2n-4}{n_i}}(\theta)h_i^{\frac{2}{n_i}}(\theta)\nabla),$$

а $\dim\, S_i = n_i$, $\dim\, D = n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k + 1$. Будем считать, что собственные числа пронумерованы в порядке возрастания, т.е. выполнено $0 = \lambda_0^i < \lambda_1^i \le \lambda_2^i \le \ldots$.

Обозначим $A_j^i(r)$ — решение уравнения

$$\frac{d^2v(r)}{dr^2} \quad + \quad \left[\sum_{i=1}^k n_i\frac{q_i'(r)}{q_i(r)} + \frac{\delta'(r)}{\delta(r)}\right]\frac{dv(r)}{dr} - \frac{\lambda_j^i}{q_i^2(r)}v(r) = 0 \tag{2.3}$$

с краевыми условиями $v(r_0) = 0, \quad v^{'}(r_0) = 1$.

Введем обозначения: $s(t) = q_1^{n_1}(t)\cdots q_k^{n_k}(t)$,

$$J_i = \int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{1}{\delta(t)s(t)}\left(\int\limits_{r_0}^{t}\delta(z)\frac{s(t)}{q_i^2(t)}(z)dz\right)dt, \quad K = \int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{dt}{\delta(t)s(t)},$$

где $r_0 > 0$, $i = 1,\ldots,k$. Тогда, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть M — квазимодельное многообразие, такое, что выполнены следующие условия:*
1. $K < \infty$;
2. для всех i выполнено $J_i = \infty$.
Тогда размерность пространства σ-гармонических функций на M, удовлетворяющих условию $u(r,\theta) = \overline{o}(A_l^i(r))$ для некоторого i при $r \to \infty$, не менее l.

Замечание 2.1. *Выполнение первого условия теоремы эквивалентно непараболичности типа многообразия M (см.* [13]*). Некоторые свойства многообразий непараболического типа описаны в Приложении (см. предложение* 3.6.*).*

Замечание 2.2. *Если хотя бы для одного i выполнено $J_i < \infty$, то на M существует континуум линейно-независимых ограниченных гармонических функций (см.* [13]*).*

Замечание 2.3. *Аналогичные утверждения для гармонических и σ-гармонических функций на модельных многообразиях доказаны в* [8] *и* [12].

Доказательство теоремы. Введем новую метрику на S_i. Пусть

$$d\tilde{\theta}_i^2 = h_i^{\frac{2}{n_i}}(\theta) f_i^{\frac{2(n-n_i-2)}{n_i}}(\theta) d\theta_i^2.$$

Компакт S_i с вновь введенной метрикой будем обозначать $\tilde{S}_i$. В таком случае, метрика на D представляется следующим образом

$$ds^2 = \prod_{i=1}^{k} f_i^2(\theta_i) dr^2 + \sum_{i=1}^{k} q_i^2(r) h_i^{\frac{-2}{n_i}}(\theta) f_i^{\frac{2(2+n_i-n)}{n_i}}(\theta) \prod_{j\neq i} f_j^2(\theta_j) d\tilde{\theta}_i^2.$$

Непосредственно по определению оператора Лапласа-Бельтрами (см., например, [15], стр. 357) получаем, что оператор Δ_σ на D в координатах (r,θ) имеет вид

$$\Delta_\sigma = \frac{1}{f^2(\theta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(n_1 \frac{q_1'(r)}{q_1(r)} + \dots + n_k \frac{q_k'(r)}{q_k(r)} + \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \right) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \\ + \frac{1}{f^2(\theta)} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{q_i^2(r)} L_i, \qquad (2.4)$$

где оператор L_i определен выше, а

$$f^2(\theta) = \prod_{i=1}^{k} f_i^2(\theta_i).$$

Обозначим $\{\Phi_j^i(\theta_i)\}$ — ортонормированный базис в $L^2(\tilde{S}_i)$ из собственных функций оператора $-L_i$, а λ_j^i — соответствующие собственные числа.

Пусть $u(r,\theta)$ — σ-гармоническая на D функция. Тогда для любого r справедливо следующее равенство

$$u(r,\theta) = \sum_{l_k=0}^{\infty} \left(\dots \left(\sum_{l_1=0}^{\infty} V_{l_1\dots l_k}(r) \Phi_{l_1}^1(\theta_1) \right) \dots \right) \Phi_{l_k}^k(\theta_k), \qquad (2.5)$$

где $V_{l_1\cdots l_k}(r)$ является решением следующего уравнения

$$\frac{d^2 v(r)}{dr^2} + \left[\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{q_i'(r)}{q_i(r)} + \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \right] \frac{dv(r)}{dr} - \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{l_i}^i}{q_i^2(r)} \right] v(r) = 0. \qquad (2.6)$$

Замечание 2.4. *Данное уравнение играет существенную роль при изучении гармонических функций на квазимодельных многообразиях (см., например,* [11], [13]*). В дальнейшем будем его называть спектральным. Очевидно, что $A^i_j(r)$ является решением спектрального уравнения в случае, когда $l_m = 0$ для всех $m \neq i$. В дальнейшем уравнение* (2.3) *будем называть (i,j)-спектральным.*

Ясно, что функции вида $A^i_j(r)\Phi^i_j(\theta_i)$ являются σ-гармоническими на D.

В предложении 3.4 (см. Приложение) доказано, что если выполнено $J_i = \infty$ и $\lambda^i_l > \lambda^i_m$, то $\lim_{r\to\infty} \frac{A^i_l(r)}{A^i_m(r)} = \infty$. Построим некоторые базисные функции искомого пространства σ-гармонических функций.

Пусть $\{B_p\}$ является гладким исчерпанием многообразия M. Решим в B_p следующую краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta_\sigma \varphi^j_p = 0 \quad \text{в} \quad B_p, \\ \varphi^j_p\Big|_{\partial B_p} = u_j|_{\partial B_p}, \end{cases}$$

где $u_j = A^i_j(r)\Phi^i_j(\theta_i)$. Пусть φ_0 равна нулю на B и равна 1 вне некоторой окрестности B. Положим

$$U = u_j\varphi_0, \quad F = \Delta_\sigma U.$$

Заметим, что $\operatorname{supp} F$ лежит в окрестности B. Тогда для $\psi^j_p = \varphi^j_p - U$, имеем

$$\Delta_\sigma \psi^j_p = -F, \qquad \psi^j_p|_{\partial B_p} = 0.$$

Следовательно,

$$\psi^j_p(x) = \int\limits_{B_p} G_p(x,y)F(y)dy,$$

где $G_p(x,y)$ есть функция Грина оператора Δ_σ в B_p. Из существования предела функций Грина $\{G_p\}$ при $p \to \infty$ следует, что на M существует $\lim_{p\to\infty} \psi^j_p = \psi_j$ такой, что $\Delta_\sigma \psi_j = -F$. Из существования функции ψ_j следует существование предельной функции $\varphi_j = \lim\limits_{p\to\infty} \varphi^j_p$, причем $\Delta_\sigma \varphi_j = 0$ на M.

На $M \setminus B$ функция $\psi_j(r,\theta)$ является решением уравнения $\Delta_\sigma \psi_j = 0$. Так как ∂B компакт, то в силу непрерывности функции $\psi_j(r,\theta)$ существует $A = \max_{\partial B} |\psi_j(r,\theta)|$. Тогда

$$-A \leq \psi_j|_{\partial B} \leq A$$

и для достаточно больших p

$$-(A+1) \le \psi_p^j\big|_{\partial B} \le A+1.$$

Покажем, что $\lim_{r\to\infty}\psi_j(r,\theta)=0$. Из предложения 3.2 следует, что на $M\setminus B$ существует решение уравнения (2.2) $v(r,\theta)$ такое, что $v|_{\partial B}=1$ и $\lim_{r\to\infty}v(r,\theta)=0$. Рассмотрим на $M\setminus B$ функции

$$\overline{\psi_j}=(A+1)\cdot v \quad \text{и} \quad \underline{\psi_j}=-(A+1)\cdot v.$$

Функции $\overline{\psi_j}$ и $\underline{\psi_j}$ являются решениями уравнения (2.2) и удовлетворяют условиям

$$\overline{\psi_j}\big|_{\partial B}=A+1, \quad 0\le\overline{\psi_j}\le A+1, \quad \lim_{r\to\infty}\overline{\psi_j}(r,\theta)=0,$$

$$\underline{\psi_j}\Big|_{\partial B}=-(A+1), \quad -(A+1)\le\underline{\psi_j}\le 0, \quad \lim_{r\to\infty}\underline{\psi_j}(r,\theta)=0.$$

Тогда на $M\setminus B$ выполнено $\underline{\psi_j}\le\overline{\psi_j}$. Так как на $B_p\setminus B$

$$\Delta_\sigma\underline{\psi_j}=\Delta_\sigma\psi_p^j=\Delta_\sigma\overline{\psi_j}=0,$$

$$\underline{\psi_j}\Big|_{\partial B_p}\le\psi_p^j\big|_{\partial B_p}\le\overline{\psi_j}\big|_{\partial B_p}$$

и

$$\underline{\psi_j}\Big|_{\partial B}\le\psi_p^j\big|_{\partial B}\le\overline{\psi_j}\big|_{\partial B},$$

то с учетом принципа сравнения для достаточно больших p на множестве $B_p\setminus B$

$$\underline{\psi_j}\le\psi_p^j\le\overline{\psi_j}.$$

Переходя к пределу при $p\to\infty$, получаем $\underline{\psi_j}\le\psi_j\le\overline{\psi_j}$. А так как $\lim_{r\to\infty}\underline{\psi_j}(r,\theta)=\lim_{r\to\infty}\overline{\psi_j}(r,\theta)=0$, то и $\lim_{r\to\infty}\psi_j(r,\theta)=0$. Тогда

$$\lim_{r\to\infty}[\varphi_j(r,\theta)-u_j(r,\theta)]=0.$$

Точно так же мы строим l_i σ-гармонических функций для всех $A_j^i(r)\Phi_j^i(\theta_i)$, где $j<l_i$.

Заметим (см. предложение 3.3), что для любого решения (i,j)-спектрального уравнения $v(r)$, удовлетворяющего условию $v(r)\to\infty$ при $r\to\infty$, найдется такая константа a_j^i, что

$$\lim_{r\to\infty}(v(r)-a_j^iA_j^i(r))=0.$$

Линейная независимость построенных функций $\{\varphi_j\}$ следует из линейной независимости систем функций $\{\Phi_j^i(\theta_i)\}$. Теорема доказана.

$\square$

Замечание 2.5. *В зависимости от асимптотического поведения функций $q_i(r)$, размерность исследуемого в работе пространства гармонических функций может быть как в точности равным l, так и бесконечным. Доказательство сразу следует из предложения 3.5 и формулы (2.5).*

3. Приложение

Опишем на множестве $(r_0, +\infty)$ некоторые свойства решений спектрального уравнения (2.6)

$$\frac{\partial^2 V_{l_1\ldots l_k}(r)}{\partial r^2} + \left[\sum_{i=1}^{k} n_i \frac{q_i'(r)}{q_i(r)} + \frac{\delta'(r)}{\delta(r)}\right] \frac{\partial V_{l_1\ldots l_k}(r)}{\partial r} - \phi(r) V_{l_1\ldots l_k}(r) = 0,$$

где

$$\phi(r) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{l_i}^i}{q_i^2(r)},$$

$\delta(r)$, $q_i(r)$ — положительные, гладкие на R_+ функции, а $\lambda_{l_i}^i$ — неотрицательные константы.

Заметим, что доказательство первых трех предложений дословно повторяет доказательство аналогичных утверждений для решений спектрального уравнения для классических гармонических функций (см. [13]), и поэтому приводиться не будут.

Предложение 3.1. *Пусть $J_i = \infty$ при всех i. Тогда если $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_k^2 \neq 0$, то всякое ограниченное решение спектрального уравнения $V_{l_1\ldots l_k}(r)$ стремится к нулю при $r \to \infty$.*

Предложение 3.2. *Пусть $K < \infty$. Тогда на D существует ограниченное решение $u(r, \theta)$ уравнения (2.2) такое, что*

$$u(r_0, \theta) = 1 \quad и \quad \lim_{r \to \infty} u(r, \theta) = 0.$$

Предложение 3.3. *Пусть $J_i = \infty$ при всех i. Тогда, для любого решения спектрального уравнения $V_{l_1\ldots l_k}(r)$ такого, что $\phi(r) > 0$ и $V_{l_1\ldots l_k}(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, существует решение этого же уравнения $V^0_{l_1\ldots l_k}(r)$ с $(V^0_{l_1\ldots l_k})'(r_0) = 0$ такое, что*

$$\lim_{r \to \infty} (V_{l_1\ldots l_k}(r) - V^0_{l_1\ldots l_k}(r)) = 0.$$

Предложение 3.4. *Пусть $K < \infty$, $J_i = \infty$ и $\lambda_l^i > \lambda_m^i$. Тогда выполнено* $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{A_l^i(r)}{A_m^i(r)} = \infty$.

Доказательство. Из уравнения (2.3) получаем

$$\left[q_1^{n_1}(r)\dots q_k^{n_k}(r)\delta(r)\left(A_j^i(r)\right)'\right]' = \frac{\lambda_j^i}{q_i^2(r)} q_1^{n_1}(r)\dots q_k^{n_k}(r)\delta(r)A_j^i(r).$$

Проинтегрируем последнее равенство в пределах от r_0 до r. Получим

$$(A_j^i(r))' = \frac{1}{q_1^{n_1}(r)\dots q_k^{n_k}(r)\delta(r)} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda_j^i}{q_i^2(z)} q_1^{n_1}(z)\dots q_k^{n_k}(z)\delta(z)A_j^i(z)dz, \tag{3.7}$$

откуда

$$A_j^i(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{q_1^{n_1}(t)\dots q_k^{n_k}(t)\delta(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \frac{\lambda_j^i}{q_i^2(z)} q_1^{n_1}(z)\dots q_k^{n_k}(z)\delta(z)A_j^i(z)dz + 1, \tag{3.8}$$

где $r \ge r_0 > 0$ — любые.

Легко доказать, что $A_j^i(r)$ будет монотонно возрастающая и положительная на $(r_0, +\infty)$ функция. Действительно, возьмем максимальный интервал (r_0, r_1), в котором $A_j^i(r) > 0$. Из (3.7) видно, что на этом интервале $A_j^i(r)$ строго возрастает. Значит, необходимо $r_1 = \infty$. Из расходимости интеграла J_i следует, что $A_j^i(r)$ стремится к бесконечности при $r \to \infty$.

Пусть $\lambda_l^i > \lambda_m^i$. Покажем, что для любой константы $c > 0$ и достаточно больших r, справедливо неравенство $A_l^i(r) > cA_m^i(r)$. Последнего достаточно для справедливости утверждения предложения.

Докажем, вначале, что для достаточно больших r выполнено

$$A_l^i(r) > \frac{\lambda_l^i}{\lambda_m^i} A_m^i(r).$$

Предположим противное, т. е. для всех r справедливо неравенство

$$\lambda_m^i A_l^i(r) \le \lambda_l^i A_m^i(r).$$

Тогда из (3.8) получаем

$$\lambda_l^i\lambda_m^i \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{q_1^{n_1}(t)\dots q_k^{n_k}(t)\delta(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \frac{\delta(z)}{q_i^2(z)} q_1^{n_1}(z)\dots q_k^{n_k}(z)A_l^i(z)dz + \lambda_m^i <$$

$$< \lambda_l^i \lambda_m^i \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{q_1^{n_1}(t) \dots q_k^{n_k}(t) \delta(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \frac{\delta(z)}{q_i^2(z)} q_1^{n_1}(z) \dots q_k^{n_k}(z) A_m^i(z) dz + \lambda_l^i.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda_l^i \lambda_m^i dt}{q_1^{n_1}(t) \dots q_k^{n_k}(t) \delta(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \frac{\delta(z)}{q_i^2(z)} q_1^{n_1}(z) \dots q_k^{n_k}(z) (A_l^i(z) - A_m^i(z)) dz < \\ < \lambda_l^i - \lambda_m^i. \quad (3.9)$$

Возьмем некоторое $r^* > r_0$. Для него

$$A_l^i(r^*) - A_m^i(r^*) = c_1 > 0.$$

Так как $J_i = \infty$, то с некоторого r_1 неравенство (3.9) не выполняется, то есть

$$A_l^i(r) > \frac{\lambda_l^i}{\lambda_m^i} A_m^i(r)$$

при $r > r_1$.

Дальнейшее доказательство легко провести, используя метод математической индукции. Пусть

$$A_l^i(r) > \left(\frac{\lambda_l^i}{\lambda_m^i} \right)^k A_m^i(r),$$

начиная с некоторого r_k. Докажем, что

$$A_l^i(r) > \left(\frac{\lambda_l^i}{\lambda_m^i} \right)^{k+1} A_m^i(r),$$

начиная с некоторого r_{k+1}. Предположим противное, то есть для всех r выполнено

$$A_l^i(r) < \left(\frac{\lambda_l^i}{\lambda_m^i} \right)^{k+1} A_m^i(r).$$

Отсюда, как и выше, получаем

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda_l^i \lambda_m^i dt}{q_1^{n_1}(t) \dots q_k^{n_k}(t) \delta(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \frac{\delta(z)}{q_i^2(z)} q_1^{n_1}(z) \dots q_k^{n_k}(z) (A_l^i(z) - \\ - (\frac{\lambda_l^i}{\lambda_m^i})^k A_m^i(z)) dz < \lambda_l^i \left(\frac{\lambda_l^i}{\lambda_m^i} \right)^k - \lambda_m^i. \quad (3.10)$$

Точно также, как и выше, получаем противоречие. Учитывая, что $\lambda_l^i > \lambda_m^i$ получаем утверждение предложения. □

Предложение 3.5. *Пусть $J_i = \infty$ при всех i. Предположим, кроме того, что $\lambda^i_j > \lambda^i_{l_i}$. Тогда любое неограниченное решение спектрального уравнения* (2.6) $V_{l_1\ldots l_k}$ *обладает следующими свойствами.*
1. Пусть $q_i(r) = \overline{o}(q_l(r))$ при $r \to \infty$ для всех $l \neq i$. Тогда $V_{l_1\ldots l_k} = \overline{o}(A^i_j(r))$ при $r \to \infty$.
2. Пусть $q_l(r) = \overline{o}(q_i(r))$ при $r \to \infty$ для всех $l \neq i$. Тогда $A^i_j(r) = \overline{o}(V_{l_1\ldots l_k})$ при $r \to \infty$.

Доказательство. Из уравнения (2.3) получаем

$$\left[q_1^{n_1}(r)\ldots q_k^{n_k}(r)\delta(r)\left(V_{l_1\ldots l_k}(r)\right)'\right]' = \phi(r)q_1^{n_1}(r)\ldots q_k^{n_k}(r)\delta(r)V_{l_1\ldots l_k}(r).$$

Проинтегрируем последнее равенство в пределах от r_0 до r. Получим

$$\begin{aligned}(V_{l_1\ldots l_k}(r))' &= \\ &= \frac{1}{q_1^{n_1}(r)\ldots q_k^{n_k}(r)\delta(r)}\int\limits_{r_0}^{r}\phi(z)q_1^{n_1}(z)\ldots q_k^{n_k}(z)\delta(z)V_{l_1\ldots l_k}(z)\,dz+ \\ &\quad + q_1^{n_1}(r_0)\ldots q_k^{n_k}(r_0)\delta(r_0)\left(V_{l_1\ldots l_k}\right)'(r_0)\frac{1}{q_1^{n_1}(t)\ldots q_k^{n_k}(t)\delta(t)},\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}V_{l_1\ldots l_k}(r) &= \\ &= \int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{q_1^{n_1}(t)\ldots q_k^{n_k}(t)\delta(t)}\int\limits_{r_0}^{t}\phi(z)q_1^{n_1}(z)\ldots q_k^{n_k}(z)\delta(z)V_{l_1\ldots l_k}(z)\,dz+ \\ &\quad + g_1^{n_1}(r_0)\ldots g_k^{n_k}(r_0)\delta(r_0)\left(V_{l_1\ldots l_k}\right)'(r_0)\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{q_1^{n_1}(t)\ldots q_k^{n_k}(t)\delta(t)}+ \\ &\quad + V_{l_1\ldots l_k}(r_0),\end{aligned} \tag{3.11}$$

где $r \geq r_0 > 0$ — любые.

Доказательство предложения легко получается из равенств (3.8) и (3.11), например, с помощью правила Лопиталя. Предложение доказано □

В работах ряда математиков исследовались связи между свойствами функции Грина, емкостью и параболичностью типа римановых многообразий. В частности, доказано следующее утверждение.

Предложение 3.6. *(см.* [1], [3], [16]*) Следующие утверждения эквивалентны:*
1. M — многообразие параболического типа;
2. всякая положительная супергармоническая функция на M является тождественной постоянной;
3. M не имеет положительной функции Грина;
4. емкость любого компакта в M равна нулю.

Обсудим данные понятия несколько подробнее. Пусть M — произвольное риманово многообразие, B — предкомпактное множество в M, а A — компакт в B. Пару (A, B) будем называть конденсатором в M. В этом случае емкостью множества A относительно B называется число

$$\mathrm{cap}(A, B) = \inf \int\limits_M |\nabla \phi|^2 d\mu, \tag{3.12}$$

где точная нижняя грань берется по всем локально-липшецевым функциям ϕ таким, что $0 \leq \phi \leq 1$ и $\phi|_A = 1$, $\phi|_{M \setminus B} = 0$. Функции ϕ, удовлетворяющие названным выше условиям, будем называть допустимыми.

Так как емкость множества A относительно B убывает при возрастании B, то существует величина

$$\mathrm{cap} A = \lim_{k \to \infty} \mathrm{cap}(A, B_k),$$

где предел берется по произвольному исчерпанию многообразия предкомпактными открытыми множествами B_k. Число $\mathrm{cap} A$ будем называть емкостью множества A.

Обозначим через $G_\Omega(x, y)$ функцию Грина оператора Лапласа-Бельтрами в открытой предкомпактной области $\Omega \subset M$. При расширении области Ω, последовательность $\{G_\Omega\}$, как следует из принципа максимума, возрастает. Построим функцию Грина на всем M (см., например, [1]). Пусть $\{B_k\}$ — исчерпание многообразия возрастающей последовательностью предкомпактных открытых подмножеств в M. Обозначим через G_k функцию Грина в области B_k. Возрастающая последовательность $\{G_k\}$ либо при всех x стремится к бесконечности, либо при некотором x ограничена. В последнем случае последовательность $\{G_k\}$ имеет предел $G(x, y)$ при всех $x \neq y$, который называют функцией Грина оператора Лапласа-Бельтрами на многообразии M.

Говорят, что многообразие M имеет *параболический* тип, если для любого компакта $F \subset M$ существует исчерпание M открытыми множествами B_k такое, что

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{cap}(F, B_k) = 0.$$

В противном случае говорят, что многообразие имеет *гиперболический* (или *непараболический*) тип.

Как видно из формулировки предложения, возможны и другие определения многообразий параболического типа.

Литература

[1] Григорьян А. А. *О существовании положительных решений уравнения Лапласа на римановых многообразиях* // Мат. сб. **128** (1985), №3, 354–363.

[2] Григорьян А. А. *О множестве положительных решений уравнения Лапласа-Бельтрами на римановых многообразиях специального вида* // Изв. вузов. Математика. (1987), №2, 30–37.

[3] Grigor'yan A. *Analitic and geometric background of recurence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* // Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 135–249.

[4] Donnelly H. *Harmonic functions on manifolds of nonnegative Ricci curvature* // IMRN. (2001), №8, 429–434.

[5] Colding T. H., Minicozzi II V. P. *Harmonic functions with polynomial growth* // J. Diff. Geom. **461** (1997), 1–77.

[6] Li P., Tam L.-F. *Linear growth harmonic functions on a complete manifold* // J. Differential Geom. **29** (1989), 421–425.

[7] Li P. *Harmonic functions of polinomial growth* // Math. Res. Lect. **4** (1997), 35–44.

[8] Лосев А. Г. *Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида* // Изв. вузов. Математика. (1991), №12, 15–24.

[9] Лосев А. Г. *Об одном критерии гиперболичности некомпактных римановых многообразий специального вида* // Мат. заметки. **59** (1996), №4, 558–564.

[10] Лосев А. Г. *О взаимосвязи некоторых лиувиллевых теорем на римановых многообразиях специального вида* // Изв. вузов. Математика. (1997), №10, 31–37.

[11] Лосев А. Г. *О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях* // Сиб. мат. журн. **39** (1998), №1, 84–90.

[12] Losev A. G. *Elliptic partial differential equation on the warped products of Riemannian manifolds* // Applicable Analysis. **71(1-4)** (1999), 325–339.

[13] Лосев А. Г., Мазепа Е. А. *Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на римановых произведениях* // Алгебра и анализ. **13** (2001), вып. 1, 84–110.

[14] Murata M. *Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds.* Potential Theory. ed. by M. Kishi, 1992, 251–259.

[15] Позняк Э. Г., Шикин Е. В. *Дифференциальная геометрия. Первое знакомство.* М.: Изд-во МГУ, 1990.

[16] Sario L., Nakai M., Wang C., Chung L. O. *Classification theory of Riemannian manifolds* // Lect. Notes Math. **605** (1977).

[17] Светлов А.В. *Критерий дискретности спектра оператора Лапласа-Бельтрами на квазимодельных многообразиях* // Сиб. мат. журн. **43** (2002), №6, 1362–1371.

[18] Cheng S.Y. *Liouville theorem for harmonic maps* // Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc. Providence. **36** (1980), 147–151.

[19] Yau S.T. *Nonlinear analysis in geometry* // L'Enseigenement Mathematique. **33** (1987), 109–158.

Сведения об авторах

Лосев Александр Георгиевич

Математический факультет, Волгоградский государственный университет,
ул. 2-я Продольная 30, Волгоград,
Россия
E-Mail: alexander.losev@volsu.ru