Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 2, 214 – 229

Задача без начальных условий для вырождающейся гиперболической системы первого порядка

С. П. Лавренюк, М. А. Олискевич

(*Представлена Скрыпником И. В.*)

Аннотация. Рассмотрено задачу без начальных условий для гиперболической системы вида

$$u_t - \Lambda(x,t)u_x + A(x,t)u + G(x,t,u) = f(x,t)$$

в области $\{(x,t) : 0 < x < a, -\infty < t < T\}$, где Λ, A — квадратные матрицы, u, G, f – векторы, причем Λ — диагональная с вырождающимися элементами при $x = 0$ либо $x = a$.

Доказано существование и единственность слабого решения этой задачи независимо от поведения данных задачи и решения при $t \to -\infty$.

2000 MSC. 35L50, 35L80.

Ключевые слова и фразы. Гиперболическая система, задача без начальных условий.

Задачи Коши и смешанные задачи для линейных гиперболических систем первого порядка с двумя независимыми переменными, вырождающихся на границе области, исследовано во многих работах [1–7]. Задачи без начальных условий для некоторых линейных и полулинейных гиперболических систем без вырождения рассмотрено в [8, 9]. В предлагаемой работе получены условия существования и единственности обобщенного решения задачи без начальных условий для одной полулинейной системы гиперболических уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными, вырождающейся на границе области. Отметим, что полученные условия разрешимости не требуют ограничений на поведение данных задачи и

Статья поступила в редакцию 17.04.2003

решения при $t \to -\infty$. Для исследования использовано метод Галеркина. Пусть $Q = \{(x,t) : 0 < x < a, -\infty < t < T < +\infty\}$, $Q^a = \{(x,t) : 0 \le x \le a, -\infty < t \le T\}$, $Q_{t_1,t_2} = \{(x,t) : 0 < x < a, t_1 < t < t_2 \le T\}$. Рассмотрим в области Q гиперболическую систему вида

$$U_t - \Lambda(x,t)U_x + A(x,t)U + G(x,t,U) = F(x,t), \tag{1}$$

где Λ, A — квадратные матрицы порядка n,

$$U(x,t) = \mathrm{col}\left(u_1(x,t), \dots, u_n(x,t)\right),$$

$$G(x,t,U) = \mathrm{col}\left(g_1(x,t,U), \dots, g_n(x,t,U)\right),$$

$$F(x,t) = \mathrm{col}\left(f_1(x,t), \dots, f_n(x,t)\right),$$

причем матрица Λ диагональна:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_1 = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}, \quad \Lambda_2 = \mathrm{diag}\{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

С целью упрощения изложения введем обозначения:

$$U = (w, v), \quad w = (u_1, \dots, u_k), \quad v = (u_{k+1}, \dots, u_n).$$

Обозначим через $L^r_{\gamma,loc}(Q^a)$, $1 \le r \le +\infty$, $\gamma(x) \ge 0$, $x \in [0,a]$ пространство функций, принадлежащих $L^r_\gamma(Q_{t_1,T})$ для каждого $t_1 \in (-\infty, T)$, где пространство $L^r_\gamma(Q_{t_1,T})$ получено как замыкание множества функций $C(\overline{Q}_{t_1,T})$ по норме

$$\|\varphi\|_{L^r_\gamma(Q_{t_1,T})} = \left(\int\limits_{Q_{t_1,T}} \gamma(x)|\varphi(x,t)|^r \,dx\,dt \right)^{1/r}, \quad 1 \le r < +\infty,$$

$$\|\varphi\|_{L^\infty_\gamma(Q_{t_1,T})} = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_{t_1,T}} \gamma(x)|\varphi(x,t)|, \quad r = +\infty.$$

Будем предполагать, что функции β, γ удовлетворяет условиям:

(B): $\beta \in C^1([0,a])$; $\beta(x) > 0$, $x \in [0,a)$; $\beta(a) = 0$, $\beta(0) = 1$;

(Г): $\gamma \in C^1([0,a])$; $\gamma(x) > 0$, $x \in (0,a]$; $\gamma(0) = 0$, $\gamma(a) = 1$.

Запишем матрицу $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

где A_{11}, A_{22} квадратные матрицы соответственно порядка k и $n-k$, матрица A_{12} имеет порядок $k\times(n-k)$, а матрица A_{21} — порядок $(n-k)\times k$.

Будем также предполагать, что для коэффициентов системы (1) выполняются соответственно условия **(Л)**, **(G)**, если:

(Л): $\lambda_i\in C\left((-\infty,T];C^1([0,a])\right),\quad i=1,\dots,n,\quad \lambda_j(0,t)=0,$ $t\in(-\infty,T];$
$\lambda_j(x,t)<0,\ (x,t)\in(0,a]\times(-\infty,T];\ (\lambda_j\gamma')/\gamma\in C(Q^a),$ $j=1,\dots,k;$
$\lambda_l(x,t)>0,\ (x,t)\in[0,a)\times(-\infty,T];\ (\lambda_l\beta')/\beta\in C(Q^a),$
$\lambda_l(a,t)=0,\ t\in(-\infty,T];\ l=k+1,\dots,n;$

(G): функция $\tau\to G(x,t,\tau)$ непрерывна по τ в $\mathbf{R}^n$ для почти всех $(x,t)\in Q;$ функция $(x,t)\to G(x,t,\tau)$ измерима в Q для всех $\tau\in R^n;$ существуют число $p>2$ и положительные постоянные $g_0,\ g^0$ такие, что для всех $U^{(1)},U^{(2)}\in\mathbf{R}^n$ и почти всех $(x,t)\in Q:$

$$\langle G^{(1)}(x,t,U^{(1)})-G^{(1)}(x,t,U^{(2)}),w^{(1)}-w^{(2)}\rangle\ge g_0|w^{(1)}-w^{(2)}|^p,$$
$$\langle G^{(2)}(x,t,U^{(1)})-G^{(2)}(x,t,U^{(2)}),v^{(1)}-v^{(2)}\rangle\ge g_0|v^{(1)}-v^{(2)}|^p,$$
$$|g_i(x,t,U)|\le g^0\sum_{j=1}^{k}|u_j|^{p-1},\quad i=1,\dots,k,$$
$$|g_s(x,t,U)|\le g^0\sum_{j=k+1}^{n}|u_j|^{p-1},\quad s=k+1,\dots,n,$$

где $G^{(1)}=(g_1,\dots,g_k),G^{(2)}=(g_{k+1},\dots,g_n),$ а через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначено скалярное произведение в соответствующем евклидовом пространстве.

Обозначим через $\widehat{C}^1_{k,n}(Q^a)$ пространство функций вида

$$\widehat{C}^1_{k,n}(Q^a)=\{\psi(x,t)=(\psi_1(x,t),\dots,\psi_n(x,t)):\psi_i\in C^1(Q^a),$$
$$i=1,\dots,n;\ \psi_j(0,t)\equiv0,\ j=1,\dots,k;\ \psi_l(a,t)\equiv0,$$
$$l=k+1,\dots,n\}.$$

Пусть $\psi^{(\gamma,\beta)}(x,t)$ вектор-функция вида

$$\psi^{(\gamma,\beta)} = \left(\psi^{(\gamma)}, \psi^{(\beta)}\right),\ \psi^{(\gamma)}(x,t) = \gamma(x)\eta(x,t),\ \psi^{(\beta)}(x,t) = \beta(x)\theta(x,t),$$
$$\eta = (\psi_1, \ldots, \psi_k), \quad \theta = (\psi_{k+1}, \ldots, \psi_n).$$

Кроме того, введем функции $\gamma_i(x)$ следующим образом: $\gamma_i(x) = \gamma(x)$, если $i = 1, \ldots, k$ и $\gamma_i(x) = \beta(x)$, если $i = k+1, \ldots, n$.

Определение 1. *Функция U из пространства $V = \prod\limits_{i=1}^{n}\Big(L^\infty_{\gamma_i,loc}((-\infty, T]; L^2(0,a)) \cap L^p_{\gamma_i,loc}(Q^a)\Big)$, такая, что $U(\cdot, T) \in \prod\limits_{i=1}^{n} L^2_{\gamma_i}(0,a)$, $w(a,\cdot) \in \in \prod\limits_{i=1}^{k} L^2_{loc}((-\infty, T]; \mathbf{R})$, $v(0,\cdot) \in \prod\limits_{i=k+1}^{n} L^2_{loc}((-\infty, T]; \mathbf{R})$ называется обобщенным решением системы* (1)*, если она удовлетворяет равенству*

$$\int\limits_0^a \langle U(x,T), \psi^{(\gamma,\beta)}(x,T)\rangle\, dx + \int\limits_{Q_{t_1,T}} [-\langle U, \psi_t^{(\gamma,\beta)} - \Lambda(x,t)\psi_x^{(\gamma,\beta)}\rangle +$$
$$+ \langle \Lambda_x(x,t)U + A(x,t)U + G(x,t,U) - F(x,t), \psi^{(\gamma,\beta)}\rangle] dx\, dt -$$
$$- \int\limits_{t_1}^{T} \langle \Lambda_1(a,t) w(a,t), \eta(a,t)\rangle\, dt + \int\limits_{t_1}^{T} \langle \Lambda_2(0,t) v(0,t), \theta(0,t)\rangle\, dt = 0 \quad (2)$$

для всех $\psi \in \widehat{C}^1_{k,n}(Q^a)$, $\psi(x,t) = 0$, если $(x,t) \in Q_{-\infty,t_1}$, и для всех $t_1 \in (-\infty, T)$.

Рассмотрим сначала задачу для системы (1) с начальным условием

$$U(x, t_0) = u^0(x), \quad t_0 \in (-\infty, T) \quad (3)$$

в области $Q_{t_0,T}$.

Определение 2. *Функция U из пространства $V = \prod\limits_{i=1}^{n}\left(L^\infty_{\gamma_i}((t_0, T]; L^2(0,a)) \cap L^p_{\gamma_i}(Q_{t_0,T})\right)$, такая, что $U(\cdot, T) \in \prod\limits_{i=1}^{n} L^2_{\gamma_i}(0,a)$, $w(a,\cdot) \in \in \prod\limits_{i=1}^{k} L^2((t_0, T]; \mathbf{R})$, $v(0,\cdot) \in \prod\limits_{i=k+1}^{n} L^2((t_0, T]; \mathbf{R})$ называется обобщенным решением задачи* (1), (3)*, если она удовлетворяет равенство*

$$\int_0^a \langle U(x,T), \psi^{(\gamma,\beta)}(x,T)\rangle\, dx + \int_{Q_{t_0,T}} [-\langle U, \psi_t^{(\gamma,\beta)} - \Lambda(x,t)\psi_x^{(\gamma,\beta)}\rangle + \langle \Lambda_x(x,t)U + A(x,t)U + G(x,t,U) - F(x,t), \psi^{(\gamma,\beta)}\rangle]\, dx\, dt - \int_{t_0}^T \langle \Lambda_1(a,t)w(a,t), \eta(a,t)\rangle\, dt + \int_{t_0}^T \langle \Lambda_2(0,t)v(0,t), \theta(0,t)\rangle\, dt = \int_0^a \langle u^0(x), \psi^{(\gamma,\beta)}(x,t_0)\rangle\, dx \quad (4)$$

для всех $\psi \in \widehat{C}^1_{k,n}(\overline{Q}_{t_0,T})$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* **(В)**, **(Г)**, **(Л)**, **(G)** *и, кроме того,* $a_{ij} \in L^\infty_{1,loc}(Q^a)$ *для* $i,j = 1,\dots,k$, *а также для* $i,j = k+1,\dots,n$; $a_{ij} \in L^\infty_{\sqrt{\gamma\beta^{-1}},loc}(Q^a)$ *для* $i = 1,\dots,k$, $j = k+1,\dots,n$; $a_{ij} \in L^\infty_{\sqrt{\beta\gamma^{-1}},loc}(Q^a)$ *для* $i = k+1,\dots,n$, $j = 1,\dots,k$; $f_i \in L^q_{\gamma_i,loc}(Q^a)$ *для* $i = 1,\dots,n$, $1/p + 1/q = 1$; $u_i^0 \in L^2_{\gamma_i}(0,a)$ *для* $i = 1,\dots,n$. *Тогда существует единственное обобщенное решение задачи* (1), (3).

Доказательство. Рассмотрим последовательности функций

$$u_j^{(N)}(x,t) = \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(N)}(t)\omega_i^{(j)}(x), \quad N = 1,2,\dots,\ i = 1,\dots,n,$$

где

$$\omega_i^{(j)}(x) = \begin{cases} \sin\frac{(2j-1)\pi}{2a}x, & i = 1,\dots,k, \\ \cos\frac{(2j-1)\pi}{2a}x, & i = k+1,\dots,n, \end{cases}$$

а функции $c_{ij}^{(N)}$ являются решениями задачи Коши:

$$\int_0^a \Big[u_{it}^{(N)}(x,t) - \lambda_i(x,t)u_{ix}^{(N)}(x,t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t)u_j^{(N)}(x,t) + g_i(x,t,U^{(N)}(x,t)) - f_i(x,t)\Big]\omega_i^{(l)}(x)\gamma_i(x)\, dx = 0, \quad (5)$$

$$c_{ij}^{(N)}(t_0) = u_{ij}^{0,N}, \quad (6)$$

$$u_i^{0,N(x)} = \sum_{j=1}^{N} u_{ij}^{0,N} \omega_i^{(l)}(x), \quad \text{причем}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \|u_j^{0,N} - u_i^0\|_{L^2_{\gamma_i}(0,a)} = 0, \quad i = 1,\dots,n,\ l = 1,\dots,N.$$

Из условий теоремы следует, что система обыкновенных дифференциальных уравнений (5) удовлетворяет условиям теоремы Каратеодори [10], поэтому существует абсолютно непрерывное решение задачи Коши (5), (6), определенное на некотором промежутке $[t_0, t_0+h]$, $h > 0$. Из оценок, полученных ниже, будет следовать, что $h = T - t_0$, т.е. решение этой задачи определено на промежутку $[t_0, T]$. Умножим каждое уравнение системы (5) соответственно на функцию $c_{ij}^{(N)}(t)$, сложим их по индексам l от 1 до N и по i от 1 до n и проинтегрируем по промежутку $[t_0, \tau]$, $\tau \in (t_0, T]$. После выполнения этих операций получим равенство

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \Big[u_{it}^{(N)}(x,t) - \lambda_i(x,t) u_{ix}^{(N)}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_j^{(N)}(x,t) +$$

$$+ g_i(x,t,U^{(N)}(x,t)) - f_i(x,t) \Big] u_i^{(N)}(x,t) \gamma_i(x)\, dx\, dt = 0. \quad (7)$$

В силу условий теоремы о матрицах Λ, A существуют такие положительные постоянные $\lambda_1^0,\ \lambda_2^0,\ \lambda^0,\ a_{11}^0,\ a_{11}^0,\ a_{12}^0,\ a_{21}^0,\ a_{22}^0$, что:

$$\begin{aligned}
&-\langle \Lambda_1(a,t)\xi, \xi\rangle \ge \lambda_1^0 |\xi|^2 \text{ для всех } t \in [t_0, T] \text{ и } \xi \in \mathbf{R}^k;\\
&\langle \Lambda_2(0,t)\xi, \xi\rangle \ge \lambda_2^0 |\xi|^2 \text{ для всех } t \in [t_0, T] \text{ и } \xi \in \mathbf{R}^{n-k};\\
&|\lambda_{ix}(x,t) + \lambda_i(x,t)\gamma_i'(x)\gamma_i^{-1}(x)| \le \lambda^0 \text{ для всех } (x,t) \in Q_{t_0,T},\\
&i = 1,\dots,n;\\
&\langle A_{11}(x,t)\xi, \xi\rangle \ge a_{11}^0 |\xi|^2 \text{ для почти всех } (x,t) \in Q_{t_0,T} \text{ и для всех}\\
&\xi \in \mathbf{R}^k; \qquad\qquad (8)\\
&\langle A_{22}(x,t)\xi, \xi\rangle \ge a_{22}^0 |\xi|^2 \text{ для почти всех } (x,t) \in Q_{t_0,T} \text{ и для всех}\\
&\xi \in \mathbf{R}^{n-k};\\
&\|A_{12}(x,t)\|^2 \gamma(x)\beta^{-1}(x) \le a_{12}^0 \text{ для почти всех } (x,t) \in Q_{t_0,T};\\
&\|A_{21}(x,t)\|^2 \beta(x)\gamma^{-1}(x) \le a_{21}^0 \text{ для почти всех } (x,t) \in Q_{t_0,T},
\end{aligned}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма матрицы. Учитывая условия теоремы и оценки (8), из равенства (7) легко получить неравенство

$$\int\limits_0^a |w^{(N)}(x,\tau)|^2\gamma(x)\,dx + \int\limits_0^a |v^{(N)}(x,\tau)|^2\beta(x)\,dx +$$
$$\lambda_1^0\int\limits_{t_0}^{\tau} |w^{(N)}(a,t)|^2\,dt + \lambda_2^0\int\limits_{t_0}^{\tau} |v^{(N)}(0,t)|^2\,dt +$$
$$+ g_0\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} [|w^{(N)}(x,t)|^p\gamma(x) + |v^{(N)}(x,t)|^p\beta(x)]\,dx\,dt \le$$
$$\le (\lambda^0 + 2 - 2a_{11}^0)\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |w^{(N)}(x,t)|^2\gamma(x)\,dx\,dt +$$
$$+ (\lambda^0 - 2a_{22}^0 + a_{21}^0 + a_{12}^0)\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |v^{(N)}(x,t)|^2\beta(x)\,dx\,dt +$$
$$+ \int\limits_0^a |w^{(N)}(x,t_0)|^2\gamma(x)\,dx + \int\limits_0^a |v^{(N)}(x,t_0)|^2\beta(x)\,dx +$$
$$+ M_1\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left[\sum_{i=1}^{k} |f_i(x,t)|^q\gamma(x) + \sum_{i=k+1}^{n} |f_i(x,t)|^q\beta(x)\right] dx\,dt \quad (9)$$

для всех $\tau \in (t_0, T]$, где постоянная M_1 зависит лишь от g_0 и p. В силу леммы Гронуолла-Беллмана из (9) имеем оценки:

$$\int\limits_0^a |w^{(N)}(x,t)|^2\gamma(x)\,dx \le M_2, \quad t \in [t_0, T];$$
$$\int\limits_0^a |v^{(N)}(x,t)|^2\beta(x)\,dx \le M_2, \quad t \in [t_0, T];$$
$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |w^{(N)}(x,t)|^p\gamma(x)\,dx\,dt \le M_2; \quad (10)$$
$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |v^{(N)}(x,t)|^p\beta(x)\,dx\,dt \le M_2;$$

$$\int\limits_{t_0}^{T} |w^{(N)}(a,t)|^2\,dt \le M_2; \quad \int\limits_{t_0}^{T} |v^{(N)}(0,t)|^2\,dt \le M_2,$$

где постоянная M_2 не зависит от N. Кроме того, из условия **(G)** следуют оценки

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |g_i(x,t,U^{(N)})|\gamma_i(x)\,dx\,dt \le M_2, \quad i=1,\dots,n.$$

Отметим, что

$$M_2 = M_3\Bigg(\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|^q_{L^q_\gamma(Q_{t_0,T})} + \sum_{i=k+1}^{n}\|f_i\|^q_{L^q_\beta(Q_{t_0,T})} + \\ + \sum_{i=1}^{k}\|u_i^0\|^2_{L^2_\gamma(0,a)} + \sum_{i=k+1}^{n}\|u_i^0\|^2_{L^2_\beta(0,a)}\Bigg)$$

и постоянная M_3 вообще говоря зависит от t_0. Следовательно, существует подпоследовательность $\{U^{(s)}(x,t)\}$ последовательности $\{U^{(N)}(x,t)\}$ такая, что

$$\begin{aligned}
&u_i^{(s)} \to u_i \quad *-\text{слабо в } L^\infty((t_0,T);L^2_{\gamma_i}(0,a)), \quad i=1,\dots,n;\\
&u_i^{(s)} \to u_i \quad \text{слабо в } L^p_{\gamma_i}(Q_{t_0,T}), \quad i=1,\dots,n;\\
&u_i^{(s)}(\cdot,T) \to \widehat{u}_i(\cdot,T) \quad \text{слабо в } L^2_{\gamma_i}(0,a), \quad i=1,\dots,n;\\
&u_i^{(s)}(a,\cdot) \to \widehat{w}_i(a,\cdot) \quad \text{слабо в } L^2(t_0,T), \quad i=1,\dots,k;\\
&u_i^{(s)}(0,\cdot) \to \widehat{v}_i(0,\cdot) \quad \text{слабо в } L^2(t_0,T), \quad i=k+1,\dots,n;\\
&g_i(\cdot,\cdot,U^{(s)}(\cdot,\cdot)) \to \theta_i \quad \text{слабо в } L^q_{\gamma_i}(Q_{t_0},T), \quad i=1,\dots,n
\end{aligned}$$

при $s\to\infty$. Поэтому на основании (5), (6) легко получить равенства

$$\int\limits_0^a \widehat{u}_i(x,T)\psi_i^{(\gamma,\beta)}(x,T)\,dx + \\ + \int\limits_{Q_{t_0,T}} \Big[-u_i(x,t)(\psi_{it}^{(\gamma,\beta)}(x,t) - \lambda_i(x,t)\psi_{ix}^{(\gamma,\beta)}(x,t) - \lambda_{ix}(x,t)\psi_i^{(\gamma,\beta)}(x,t)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j(x,t)\psi_i^{(\gamma,\beta)}(x,t)+\theta_i(x,t)\psi_i^{(\gamma,\beta)}(x,t)-$$

$$-f_i(x,t)\psi_i^{(\gamma,\beta)}(x,t)\Big]\,dx\,dt-\alpha_i\int\limits_{t_0}^{T}\lambda_i(a,t)\widehat{w}(a,t)\psi_i^{(\gamma,\beta)}(a,t)\,dt+$$

$$+(1-\alpha_i)\int\limits_{t_0}^{T}\lambda_i(0,t)\widehat{v}(0,t)\psi_i^{(\gamma,\beta)}(0,t)\,dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{a}u_i^0(x)\psi_i^{(\gamma,\beta)}(x,t_0)\,dx,\quad i=1,\ldots,n \quad (11)$$

для произвольной функции $\psi\in\widehat{C}^1_{k,n}(\overline{Q}_{t_0,T})$, где $\alpha_i=1$ для $i=1,\ldots,k$ и $\alpha_i=0$ для $i=k{+}1,\ldots,n$. Выбрав в (11) функции ψ из пространства $C^1_0(\overline{Q}_{t_0,T})$, получим равенства

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}}[\psi_{it}^{(\gamma,\beta)}(x,t)-\lambda_i(x,t)\psi_{ix}^{(\gamma,\beta)}(x,t)]u_i(x,t)\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_{Q_{t_0,T}}e_i(x,t)\psi_i^{(\gamma,\beta)}(x,t)\,dx\,dt,\quad i=1,\ldots,n, \quad (12)$$

где

$$e_i(x,t)=\lambda_{ix}(x,t)u_i(x,t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_j(x,t)+\theta_i(x,t)-f_i(x,t).$$

Пусть $x=\rho_i(t,x_0,\tau)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda_i(x,t),\quad x(\tau)=x_0.$$

Рассмотрим отображение

$$x=\rho_i(\tau,\xi,\tau_0),\quad t=\tau, \quad (13)$$

где $\tau_0=T$, если $i=1,\ldots,k$ и $\tau_0=t_0$, если $i=k+1,\ldots,n$. Якобиан $J_i(\xi,\tau)$ отображения (13) имеет вид

$$J_i(\xi,\tau)=\frac{\partial\rho_i}{\partial\xi}=\exp\Big(\int\limits_{\tau}^{\tau_0}\lambda_{ix}\,d\eta\Big)$$

и $J_{i\tau}(\xi,\tau) = -\lambda_{ix}(\rho_i(\tau,\xi,\tau_0),\tau)J_i(\xi,\tau),\ i = 1,\dots,n$.

Пусть при отображении (13) область D_i переходит в $Q_{t_0,T}$. Тогда из (12) получим равенства

$$\int\limits_{D_i} \frac{d}{d\tau}[\psi_i^{(\gamma,\beta)}(\rho_i(\tau,\xi,\tau_0),\tau)J_i(\xi,\tau)]u_i(\rho_i(\tau,\xi,\tau_0),\tau)\,d\xi\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{D_i} [\lambda_{ix}(\rho_i(\tau,\xi,\tau_0),\tau)u_i(\rho_i(\tau,\xi,\tau_0),\tau)+$$

$$+ e_i(\rho_i(\tau,\xi,\tau_0),\tau)]J_i(\xi,\tau)\psi_i^{(\gamma,\beta)}(\rho_i(\tau,\xi,\tau_0),\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

откуда следует, что

$$\frac{d}{d\tau}u_i(\rho_i(\tau,\xi,\tau_0),\tau) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\rho_i(\tau,\xi,\tau_0),\tau)u_j(\rho_i(\tau,\xi,\tau_0),\tau)-$$

$$- \theta_i(\rho_i(\tau,\xi,\tau_0),\tau) + f_i(\rho_i(\tau,\xi,\tau_0),\tau)$$

в области $D_i,\ i = 1,\dots,n$. Следовательно $\dfrac{du_i}{d\tau} \in L^2_{\gamma_i}(D_i) + L^p_{\gamma_i}(D_i)$, поэтому функция u_i непрерывна вдоль соответствующей характеристики системы (1). Отсюда следует, что функции u_i, $i = 1,\dots,n$ определены почти в каждой точке области $Q_{t_0,T}$. Используя равенство (11) легко доказать, что

$$\widehat{w}(a,t) = w(a,t),\ \widehat{v}(0,t) = v(0,t),\ \widehat{U}(x,T) = U(x,T),\ U(x,t_0) = u^0(x).$$

Отметим также, что равенство (11) имеет смысл и для функции $\psi(x,t) = U(x,t)$. На основанни монотонности G аналогично как в [11] нетрудно доказать, что $\theta(x,t) = G(x,t,U(x,t))$. Следовательно найденная функция U будет обобщенным решением задачи (1), (3).

Докажем теперь единственность решения этой задачи. Пусть существуют два решения $U^{(1)}$, $U^{(2)}$. Тогда для функции $U(x,t) = U^{(1)}(x,t) - U^{(2)}(x,t)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} [-\langle U, \psi_t^{(\gamma,\beta)} - \Lambda(x,t)\psi_x^{(\gamma,\beta)}\rangle + \langle(\Lambda_x(x,t) + A(x,t))U, \psi^{(\gamma,\beta)}\rangle+$$

$$+ \langle G(x,t,U^{(1)}) - G(x,t,U^{(2)}), \psi^{(\gamma,\beta)}\rangle]\,dx\,dt+$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{T} \langle\Lambda_2(0,t)v(0,t), \theta(0,t)\rangle\,dt - \int\limits_{t_0}^{T} \langle\Lambda_1(a,t)w(a,t), \eta(0,t)\rangle\,dt+$$

$$+\int_0^a \langle U(x,T), \psi^{(\gamma,\beta)}(x,T)\rangle\, dx = 0, \quad (14)$$

где ψ — произвольная функция из пространства $\widehat{C}^1_{k,n}(\overline{Q}_{t_0,T})$. Нетрудно убедиться (аналогично как при доказательстве существования), что равенство (14) имеет смысл и для функции $\psi(x,t) = U(x,t)$. Тогда на основании условий теоремы аналогично как (10) получим оценку

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \left[|v(x,t)|^p\gamma(x) + |u(x,t)|^p\beta(x)\right]\, dx\, dt \le 0,$$

откуда и следует равенство $U^{(1)}(x,t) = U^{(2)}(x,t)$ в $Q_{t_0,T}$. Теорема 1 доказана. $\square$

Обозначим через $\Delta(\delta_1,\delta_2)$ множество положительных решений δ_1, δ_2 системы неравенств

$$2a^0_{11} + \inf_Q[\lambda_i(x,t)\gamma_i'(x)\gamma_i^{-1}(x) + \lambda_{ix}(x,t)] - \frac{1}{\delta_1} - \delta_2 a^0_{21} > 0,\ i = 1,\dots,k,$$
$$2a^0_{22} + \inf_Q[\lambda_i(x,t)\gamma_i'(x)\gamma_i^{-1}(x) + \lambda_{jx}(x,t)] - \delta_1 a^0_{12} - \frac{1}{\delta_2} > 0,$$
$$j = k+1,\dots,n.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и, кроме того, $\Delta(\delta_1,\delta_2) \ne \emptyset$. Тогда система* (1) *имеет единственное обобщенное решение.*

Доказательство. Рассмотрим в области $Q_{T-s,T}$, $s \in \mathbf{N}$ систему (1) с начальным условием

$$U(x,-s) = 0 \quad (15)$$

и функцией $F^{(s)}(x,t)$ в правой части системы (1), где

$$F^{(s)}(x,t) = \begin{cases} F(x,t), & (x,t) \in Q_{T-s,T}, \\ 0, & (x,t) \in Q_{-\infty,-s}. \end{cases}$$

На основании теоремы 1 существует обобщенное решение $U^{(s)}(x,t)$ задачи (1), (15). Продолжим нулем функцию $U^{(s)}$ на область $Q_{-\infty,-s}$.

Тогда функция $U^{(s)}$ будет удовлетворять равенство

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} [-\langle U^{(s)}, \psi_t^{(\gamma,\beta)} - \Lambda(x,t)\psi_x^{(\gamma,\beta)}\rangle + \langle \Lambda_x(x,t)U^{(s)} + A(x,t)U^{(s)}+$$

$$+G(x,t,U^{(s)}) - F^{(s)}(x,t), \psi^{(\gamma,\beta)}\rangle]\,dx\,dt + \int\limits_0^a \langle U^{(s)}(x,T), \psi^{(\gamma,\beta)}(x,T)\rangle\,dx -$$

$$-\int\limits_{t_1}^T \langle \Lambda_1(a,t)w^{(s)}(a,t), \eta(a,t)\rangle\,dt + \int\limits_{t_1}^T \langle \Lambda_2(0,t)v^{(s)}(0,t), \theta(0,t)\rangle\,dt = 0 \tag{16}$$

для всех $\psi \in \widehat{C}^1_{k,n}(Q^a)$, $\psi(x,t_1) = 0$ и всех $t_1 \in (-\infty, T]$, $|t_1| < s$. Пусть $l > |t_1|$. Отнимем равенства (16) для $U^{(s)}$, $U^{(l)}$ и выберем $\psi(x,t) = (U^{(s)}(x,t) - U^{(l)}(x,t))\omega^\sigma(t)$, $\sigma > 0$, где

$$\omega(t) = \begin{cases} t - t_1, & t_1 \le t \le T, \\ 0 & t > t_1. \end{cases}$$

Получим равенство

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} [-\langle U^{(s,l)}, \psi_t^{(\gamma,\beta)} - \Lambda(x,t)\psi_x^{(\gamma,\beta)}\rangle + \langle (\Lambda_x(x,t)+$$

$$+ A(x,t))U^{(s,l)}, \psi^{(\gamma,\beta)}\rangle + \langle G(x,t,U^{(s)}) - G(x,t,U^{(l)}), \psi^{(\gamma,\beta)}\rangle]\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_0^a \langle U^{(s,l)}(x,T), \psi^{(\gamma,\beta)}(x,T)\rangle\,dx - \int\limits_{t_1}^T \langle \Lambda_1(a,t)w^{(s,l)}(a,t), \eta(a,t)\rangle\,dt+$$

$$+\int\limits_{t_1}^T \langle \Lambda_2(0,t)v^{(s,l)}(0,t), \theta(0,t)\rangle\,dt = 0, \tag{17}$$

где $U^{(s,l)}(x,t) = U^{(s)}(x,t) - U^{(l)}(x,t)$.

Аналогично как (9) из равенства (17) получаем неравенство

$$\int\limits_0^a \sum_{i=1}^n [u_i^{(s,l)}(x,T)]^2 \omega^\sigma(T)\gamma_i(x)\,dx + \lambda_1^0 \int\limits_{t_1}^T \sum_{i=1}^k [u_i^{(s,l)}(a,t)]^2 \omega^\sigma(T)\,dt +$$
$$+ \lambda_2^0 \int\limits_{t_1}^T \sum_{i=k+1}^n [u_i^{(s,l)}(0,t)]^2 \omega^\sigma(T)\,dt + \int\limits_{Q_{t_1,T}} \sum_{i=1}^k [u_i^{(s,l)}(x,t)]^2 \omega^\sigma(t) \Big[2a_{11}^0 +$$
$$+ \lambda_i(x,t)\gamma'(x)\gamma^{-1}(x) + \lambda_{ix}(x,t)] - \frac{1}{\delta_1} - \delta_2 a_{21}^0 \Big] \gamma(x)\,dx\,dt +$$
$$+ \int\limits_{Q_{t_1,T}} \sum_{i=k+1}^n [u_i^{(s,l)}(x,t)]^2 \omega^\sigma(t) \Big[2a_{22}^0 + \lambda_i(x,t)\beta'(x)\beta^{-1}(x) + \lambda_{ix}(x,t) -$$
$$- \frac{1}{\delta_2} - \delta_1 a_{12}^0 \Big] \beta(x)\,dx\,dt + 2g_0 \int\limits_{Q_{t_1,T}} \sum_{i=1}^n |u_i^{(s,l)}(x,t)|^p \omega^\sigma(t)\gamma_i(x)\,dx\,dt \le$$
$$\le \sigma \int\limits_{Q_{t_1,T}} \sum_{i=1}^n [u_i^{(s,l)}(x,t)]^2 \omega^{\sigma-1}(t)\gamma_i(x)\,dx\,dt. \quad (18)$$

Поскольку

$$\sigma \int\limits_{Q_{t_1}} T \sum_{i=1}^n [u_i^{(s,l)}(x,t)]^2 \omega^{\sigma-1}(t)\gamma_i(x)\,dx\,dt \le I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = g_0 \int\limits_{Q_{t_1,T}} \sum_{i=1}^n |u_i^{(s,l)}(x,t)|^p \omega^\sigma(t)\gamma_i(x)\,dx\,dt,$$
$$I_2 = \frac{p^(p-4)/(p-2)}{p-2} \left(\frac{2\sigma}{g_0}\right)^{2/(p-2)} \int\limits_{Q_{t_1,T}} \sum_{i=1}^n \gamma_i(x)\omega^{\sigma-p/(p-2)}\,dx\,dt \le$$
$$\le M_4(T-t_1)^{\sigma+1-p/(p-2)},$$

то при $0 < \sigma < 2/(p-2)$ число $(T-t_1)^{\sigma+1-p/(p-2)}$ можна сделать как угодно малым, если выбрать $|t_1|$ достаточно большим. Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число

N_0, что для всех $l, s > N_0$ из неравенства (18) следуют оценки

$$\int\limits_0^a \sum_{i=1}^n [u_i^{(s,l)}(x,T)]^2 \gamma_i(x)\,dx < \varepsilon, \quad \int\limits_{t_2}^T \sum_{i=1}^k [u_i^{(s,l)}(a,t)]^2\,dt < \varepsilon$$
$$\int\limits_{t_2}^T \sum_{i=k+1}^n [u_i^{(s,l)}(0,t)]^2\,dt < \varepsilon, \quad \int\limits_{Q_{t_2,T}} \sum_{i=1}^n [u_i^{(s,l)}(x,t)]^2 \gamma_i(x)\,dx\,dt < \varepsilon, \quad (19)$$
$$\int\limits_{Q_{t_2,T}} \sum_{i=1}^n |u_i^{(s,l)}(x,t)|^p \gamma_i(x)\,dx\,dt < \varepsilon,$$

где t_2 произвольное фиксированное число из промежутка (t_1, T).

Тогда

$$\begin{aligned}
&u_i^{(s)}(\cdot,T) \to u_i^{(t_2)}(\cdot,T) \quad \text{в } L^2_{\gamma_i}(0,a), \quad i = 1,\dots,n;\\
&u_i^{(s)}(a,\cdot) \to u_i^{(t_2)}(a,\cdot) \quad \text{в } L^2(t_2,T), \quad i = 1,\dots,k;\\
&u_i^{(s)}(0,\cdot) \to u_i^{(t_2)}(0,\cdot) \quad \text{в } L^2(t_2,T), \quad i = k+1,\dots,n;\\
&u_i^{s} \to u_i^{(t_2)} \quad \text{в } L^2_{\gamma_i}(Q_{t_0,T}), \quad i = 1,\dots,n;\\
&u_i^{s} \to u_i^{(t_2)} \quad \text{в } L^p_{\gamma_i}(Q_{t_0,T}), \quad i = 1,\dots,n
\end{aligned}$$

при $s \to \infty$. Пусть t_2 принимает значения $T-1,\ T-2, \dots$ Тогда можна выбрать диагональную последовательность $\{u^{(m)}(x,t)\}$ такую, что

$$\begin{aligned}
&u_i^{(m)}(\cdot,T) \to u_i(\cdot,T) \quad \text{в } L^2_{\gamma_i}(0,a), \quad i = 1,\dots,n;\\
&u_i^{(m)}(a,\cdot) \to u_i(a,\cdot) \quad \text{в } L^2_{loc}(-\infty,T), \quad i = 1,\dots,k;\\
&u_i^{(m)}(0,\cdot) \to u_i(0,\cdot) \quad \text{в } L^2_{loc}(-\infty,T), \quad i = k+1,\dots,n;\\
&u_i^{(m)} \to u_i \quad \text{в } L^2_{\gamma_i,loc}(Q^a), \quad i = 1,\dots,n;\\
&u_i^{(m)} \to u_i \quad \text{в } L^p_{\gamma_i,loc}(Q^a), \quad i = 1,\dots,n
\end{aligned}$$

при $m \to \infty$, где

$$u_i(x,t) = u_i^{(T-l)}(x,t), \quad (x,t) \in Q_{T-l,T}, \quad i = 1,\dots,n, \quad l = 1,2,\dots$$

Переходя к пределу в (16) при $s \to \infty$ получим, что $U = (u_1,\dots,u_n)$ является обобщенным решением системы (1). Предположив существование двух обобщенных решений $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ системы (1), для разности $U(x,t) = U^{(1)}(x,t) - U^{(2)}(x,t)$ получим равенство

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} [-\langle U, \psi_t^{(\gamma,\beta)} - \Lambda(x,t)\psi_x^{(\gamma,\beta)}\rangle + \langle(\Lambda_x(x,t) + A(x,t))U, \psi^{(\gamma,\beta)}\rangle +$$

$$+\langle G(x,t,U^{(1)}) - G(x,t,U^{(2)}), \psi^{(\gamma,\beta)}\rangle]\, dx\, dt + \int\limits_0^a \langle U(x,T), \psi^{(\gamma,\beta)}(x,T)\rangle\, dx -$$

$$-\int\limits_{t_1}^{T} \langle \Lambda_1(a,t)w(a,t), \eta(a,t)\rangle\, dt + \int\limits_{t_1}^{T} \langle \Lambda_2(0,t)v(0,t), \theta(0,t)\rangle\, dt = 0,$$

справедливое для произвольной функции $\psi \in \widehat{C}^1_{k,n}(Q^a)$, $\psi(x,t) = 0$ для $(x,t) \in Q_{-\infty,t_1}$ и для всех t_1 из промежутка $(-\infty, T)$. В частности это равенство выполняется и для функции $\psi(x,t) = U(x,t)\omega^\sigma(t)$, где функция ω определена ранее. Тогда аналогично как (19) получим, что

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \sum_{i=1}^{n} [u_i(x,t)]^2 \gamma_i(x)\, dx\, dt < \varepsilon$$

для произвольного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и произвольного t_0 из промежутка $(-\infty, T)$. Следовательно, $u_i(x,t) = 0$ в области $Q_{t_0,T}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. В силу произвольности t_0 функция $U(x,t) = 0$ в области Q и теорема полностью доказана. $\square$

Замечание 1. *Отметим, что условие* $(\mathbf{G})$*, в частности, выполняется для функций*

$$g_i(x,t,U) = h_i(x,t)|u_i|^{p-2}u_i,$$

где $h_i \in L^\infty(Q)$, $h_i \geq h_0 = const > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Литература

[1] Терсенов С.А. *К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа* // Сибирский матем. журн. **2** (1961), №6, 913–935.

[2] Терсенов С.А. *О задаче с данными на линии вырождения для систем уравнений гиперболического типа* // Докл. АН СССР. **155** (1946), №2.

[3] Терсенов С.А. *О сингулярной задаче Коши* // Докл. АН СССР. **196** (1971), №5, 1032–1035.

[4] Нерсесян А.Б. *Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости* // Докл. АН СССР. **196** (1971), №2, 289–292.

[5] Терсенов С.А. *О сингулярной задаче Коши для одной системы уравнений гиперболического типа* // Докл. АН СССР. **205** (1972), №5, 1046–1049.

[6] Дерябина А.В. *О растущих решениях сильно вырождающихся гиперболических систем* // Матем. сб. **181** (1990), №4, 447–463.

[7] Lavrenyuk S., Zareba L. *The initial-boundary value problem for the first order degenerated hyperbolic system* // Demonstratio Mathematica. **33** (2000), №1, 75–82.

[8] Кирилич В.М., Мышкис А.Д. *Краевые задачи без начальных условий для линейной однородной системы уравнений гиперболического типа* // Дифференциальные уравнения. **28** (1992), №3, 463–469.

[9] Lavrenyuk S.P., Zareba L. *Nonlocal problem for the nonlinear hyperbolic system of the first order without initial conditions* // Математичні студіїj. **14** (2000), №2, 150–158.

[10] Коддингтон Е. А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Иностр. литература, 1958, 474 с.

[11] Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М.: Мир, 1972, 608 с.

Сведения об авторах

С. П. Лавренюк Краковская политехника имени Тадеуша Костюшко, Польша
E-Mail: `lawreniu@usk.pk.edu.pl`

М. А. Олискевич Львовский национальный университет имени Ивана Франка, 79602, Львов, Украина
E-Mail: `diffeq@mf.franko.lviv.ua`