Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 4, 583 – 599

Про одну дискретну модель магнітного лапласіана

Володимир Н. Сущ

(Представлена Л. А. Пастуром)

Анотація. Побудовано дискретну модель магнітного лапласіана, яка зберігає геометричну структуру відповідного континуального об'єкту. Доведено теорему існування і єдиності розв'язку задачі Діріхле для різницевого рівняння типу Пуассона. В двовимірному евклідовому випадку детально досліджено властивості дискретної моделі, включаючи апроксимацію і граничний перехід.

2000 MSC. 35Q60, 39A12, 39A70.

Ключові слова та фрази. Магнітний лапласіан, дискретні оператори, різницеві рівняння.

1. Вступ

Нехай (M, g) — ріманів многовид з метрикою (g_{ij}) і нехай $\dim M = n$. Позначимо через $\Lambda^p(M)$ множину всіх комплекснозначних диференціальних p-форм на M, де $p = 0, 1, \dots, n$. Зазначимо, що $\Lambda^0(M)$ є $C^\infty(M)$. Позначимо також через $\Lambda^p_{(k)}(M)$ множину всіх k-гладких (класу C^k) комплекснозначних p-форм на M. Означимо *магнітний потенціал* як дійснозначну 1-форму $A \in \Lambda^1_{(1)}(M)$. Тоді в локальних координатах $x_1, \dots, x_n$ він записується у вигляді

$$A = \sum_{j=1}^{n} A_j dx^j,$$

де $A_j = A_j(x)$ — дійснозначні функції класу C^1.

Нехай $*$ — оператор метричного спряження диференціальних форм ("зірочка" Ходжа): $* : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{n-p}(M)$. Введемо інваріантний скалярний добуток для p-форм з компактним носієм так:

$$(\varphi, \psi) = \int_M \varphi \wedge *\overline{\psi}, \tag{1.1}$$

Стаття надійшла в редакцію 15.10.2004

ISSN 1810 – 3200.

де риска над ψ означає комплексне спряження, а $\wedge$ — операція зовнішнього множення диференціальних форм. Розглянемо поповнення лінійних просторів гладких форм за нормою, що породжується скалярним добутком (1.1). Утворені гільбертові простори будемо позначати через $L^2(M)$ для 0-форм (функцій) та через $L^2\Lambda^p(M)$ для p-форм, $p = 1, \dots, n$. Означимо оператор

$$d : L^2\Lambda^{p-1}(M) \to L^2\Lambda^p(M)$$

як замикання в L^2-нормі операції зовнішнього диференціювання, яка задається на гладких формах, тобто як сильне розширення диференціального оператора $d : \Lambda^{p-1}(M) \to \Lambda^p(M)$.

Введемо тепер деформований диференціал d_A за правилом

$$d_A : L^2(M) \to L^2\Lambda^1(M), \qquad \varphi \to d\varphi + i\varphi A, \tag{1.2}$$

де $i = \sqrt{-1}$ та A — магнітний потенціал.

Означення інваріантного скалярного добутку (1.1) негайно індукує оператор, формально спряжений з оператором d_A. Отже, маємо оператор

$$\delta_A : L^2\Lambda^1(M) \to L^2(M),$$

який задається співвідношенням

$$(d_A\varphi, \omega) = (\varphi, \delta_A\omega), \qquad \varphi \in L^2(M), \quad \omega \in L^2\Lambda^1(M).$$

Тут припускається, що одна з форм має компактний носій. Тоді *магнітний лапласіан* можна зобразити у вигляді

$$-\Delta_A \equiv \delta_A d_A : L^2(M) \to L^2(M). \tag{1.3}$$

Ототожнимо магнітний потенціал A з операцією множення (див. [7]) таким чином:

$$A : L^2(M) \to L^2\Lambda^1(M), \qquad \varphi \to \varphi A. \tag{1.4}$$

Тоді формально спряжений оператор δ_A зображається у вигляді

$$\delta_A\omega = (\delta - iA^*)\omega, \tag{1.5}$$

де δ, A^* — оператори формально спряжені з d, A відповідно. Використовуючи (1.2), (1.3), ми можемо переписати магнітний лапласіан Δ_A так:

$$\begin{aligned} -\Delta_A\varphi &= (\delta - iA^*)(d\varphi + iA\varphi) = \\ &= \delta d\varphi - iA^*d\varphi + i\delta(A\varphi) + A^*A\varphi = \\ &= -\Delta\varphi - iA^*d\varphi + i\delta(A\varphi) + A^*A\varphi. \end{aligned}$$

Відзначимо, що оператор (1.3) є суттєво самоспряжений (див. [7, теорема 6.1]).

Головною метою даної праці є побудова такої дискретної моделі магнітного лапласіана, яка б зберігала геометричну структуру вихідного континуального об'єкту. Це означає, що, говорячи про дискретну модель, ми маємо на увазі не просто безпосередню заміну диференціальних операторів різницевими, а дискретний аналог ріманової структури над відповідним чином введеним комбінаторним об'єктом.

Наш підхід базується на формалізмі, який запропонував А. А. Дезін в [3]. Ми розглядаємо дискретні форми як деякі коланцюги і будуємо дискретні аналоги операторів (1.2), (1.5), виходячи з означень дискретних аналогів інваріантних диференціальних операторів d і δ.

Що стосується інших геометричних скінченнорізницевих підходів до теорії Ходжа гармонічних форм, то вони розроблялись у працях [1, 4,6] та ін. Дискретний магнітний лапласіан на графах досліджувався у працях [2, 5].

У даній праці, слідуючи [3,8,9], досліджено самоспряженість магнітного лапласіана і доведено, що задача Діріхле для дискретного рівняння Пуассона (з магнітним лапласіаном (1.3)) має єдиний розв'язок. Також одним з формальних результатів є побудова нестандартної апроксимації узагальненого розв'язку рівняння Пуассона при мінімальних вимогах гладкості правої частини рівняння (належить до L^2).

У цій статті розглядається тільки двовимірний евклідів випадок. Слід відзначити, що схема дискретизації легко поширюється на довільний n-вимірний евклідів простір, однак комбінаторні співвідношення стають дуже громіздкими. Двовимірна дискретна модель дозволяє детально проаналізувати зв'язок між побудованими комбінаторними об'єктами та відповідними континуальними, включаючи апроксимацію і граничний перехід.

Що стосується дискретизації на нетривіальних ріманових многовидах, то в рамках даного підходу в роботі [10] досліджувались дискретні моделі, які породжуються оператором Бельтрамі-Лапласа на двовимірній сфері, зокрема, зроблено детальний аналіз методу ортогонального розкладу. Стаття [8] присвячена вивченню можливостей моделювання дискретного аналога оператора Лапласа у випадку неевклідової метрики.

2. Комбінаторні конструкції

Будемо використовувати схему дискретизації, яка розроблена Дезіним в [3]. Нехай $\{x_k\}$, $\{e_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, є множини базисних елементів дійсних лінійних просторів C^0, C^1. Будемо розглядати лінійні комбінації $a = \sum a^k x_k$, $b = \sum b^k e_k$, $a^k, b^k \in \mathbb{R}$, як нульвимірні та одновимірні ланцюги відповідно.

Для зручності введемо на множині індексів оператори зсуву:

$$\tau k = k + 1, \qquad \sigma k = k - 1.$$

Означимо одновимірний комплекс C як пряму суму $C^0 \oplus C^1$ введених лінійних просторів. Граничний оператор на базисних елементах задається так:

$$\partial x_k = 0, \qquad \partial e_k = x_{\tau k} - x_k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Означення оператора ∂ за лінійністю поширюється на довільні ланцюги. Будемо вважати комплекс C комбінаторною моделлю дійсної прямої. Відзначимо, що базисні елементи x_k, e_k можна геометрично інтерпретувати як точки на прямій та інтервали, що з'єднують ці точки, тобто $e_k = (x_k, x_{\tau k})$.

Комбінаторною моделлю n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ будемо вважати тензорну степінь вище введеного одновимірного комплексу C: $C(n) = \otimes_1^n C$. Оскільки головним об'єктом наших досліджень буде дискретний аналог магнітного лапласіана в найпростішій двовимірній області — прямокутнику, то приведемо означення основних комбінаторних операцій у двовимірному випадку.

Нехай $C(2)$ — двовимірний комплекс. Тоді базисні елементи $C(2)$ записуються у вигляді

$$\begin{aligned} x_k \otimes x_s &= x_{k,s}, \qquad & e_k \otimes x_s &= e^1_{k,s}, \\ e_k \otimes e_s &= V_{k,s}, \qquad & x_k \otimes e_s &= e^2_{k,s}. \end{aligned}$$

Граничний оператор ∂ задається так:

$$\begin{gathered} \partial x_{k,s} = 0, \qquad \partial e^1_{k,s} = x_{\tau k,s} - x_{k,s}, \qquad \partial e^2_{k,s} = x_{k,\tau s} - x_{k,s}, \\ \partial V_{k,s} = e^1_{k,s} + e^2_{\tau k,s} - e^1_{k,\tau s} - e^2_{k,s}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Введемо дуальний об'єкт — спряжений з $C(2)$ комплекс. Позначимо його через $K(2)$ і нехай це буде лінійний простір комплекснозначних функцій над $C(2)$. З іншого боку, спряжений комплекс $K(2)$ можемо розглядати як комплекс комплекснозначних коланцюгів, який має таку саму структуру як $C(2)$, тобто $K(2) = K \otimes K$. Базисні елементи $K(2)$ будемо позначати через $\{x^{k,s},\ e_1^{k,s},\ e_2^{k,s},\ V^{k,s}\}$. Зазначимо, що в [3] розглядається тільки випадок дійснозначних коланцюгів.

Операцію спарення для базисних елементів комплексів $C(2)$ та $K(2)$ означимо за правилом:

$$\langle x_{k,s}, x^{p,q}\rangle = \langle e^1_{k,s}, e_1^{p,q}\rangle = \langle e^2_{k,s}, e_2^{p,q}\rangle = \langle V_{k,s}, V^{p,q}\rangle = \delta^{p,q}_{k,s}, \tag{2.2}$$

де $\delta^{p,q}_{k,s}$ — символ Кронекера. Надалі будемо називати коланцюги формами, підкреслюючи їхню близкість з відповідними континуальними об'єктами — диференціальними формами. Тоді 0-, 1-, 2-форми $\varphi,\ \omega = (u, v),\ \eta$ мають вигляд

$$\varphi = \sum_{k,s} \varphi_{k,s} x^{k,s}, \quad \omega = \sum_{k,s} (u_{k,s} e^{k,s}_1 + v_{k,s} e^{k,s}_2), \quad \eta = \sum_{k,s} \eta_{k,s} V^{k,s}, \tag{2.3}$$

де $\varphi_{k,s},\ u_{k,s},\ v_{k,s},\ \eta_{k,s} \in \mathbb{C}$ для всіх $k, s \in \mathbb{Z}$. Операція (2.2) на довільні форми (2.3) поширюється за лінійністю. Граничний оператор (2.1) індукує в спряженому комплексі $K(2)$ дуальну операцію — кограничний оператор d^c:

$$\langle \partial a, \alpha \rangle = \langle a, d^c \alpha \rangle, \tag{2.4}$$

де $a \in C(2),\ \alpha \in K(2)$. Кограничний оператор d^c будемо вважати дискретним аналогом операції зовнішнього диференціювання d. Нижче нам знадобляться наступні різницеві представлення оператора d^c:

$$\begin{aligned} &\langle e^1_{k,s}, d^c \varphi \rangle = \varphi_{\tau k,s} - \varphi_{k,s} \equiv \Delta_k \varphi_{k,s}, \\ &\langle e^2_{k,s}, d^c \varphi \rangle = \varphi_{k,\tau s} - \varphi_{k,s} \equiv \Delta_s \varphi_{k,s}, \\ &\langle V_{k,s}, d^c \omega \rangle = v_{\tau k,s} - v_{k,s} - u_{k,\tau s} + u_{k,s} \equiv \Delta_k v_{k,s} - \Delta_s u_{k,s}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Введемо в $K(2)$ операцію множення, яку будемо вважати аналогом зовнішнього множення диференціальних форм. Позначимо цю операцію через $\cup$ і означимо за правилом:

$$\begin{gathered} x^{k,s} \cup x^{k,s} = x^{k,s}, \qquad e^{k,s}_2 \cup e^{k,\tau s}_1 = -V^{k,s}, \\ x^{k,s} \cup e^{k,s}_1 = e^{k,s}_1 \cup x^{\tau k,s} = e^{k,s}_1, \quad x^{k,s} \cup e^{k,s}_2 = e^{k,s}_2 \cup x^{k,\tau s} = e^{k,s}_2, \\ x^{k,s} \cup V^{k,s} = V^{k,s} \cup x^{\tau k,\tau s} = e^{k,s}_1 \cup e^{\tau k,s}_2 = V^{k,s}, \end{gathered} \tag{2.6}$$

припускаючи, що добуток рівний нулю у всіх інших випадках. В термінах теорії гомологій це так зване множення Уітні. На форми (2.3) $\cup$-множення поширюється за лінійністю. Відомо (див. [3, с. 150]), що для довільних форм $\alpha, \beta \in K(2)$ має місце співвідношення

$$d^c(\alpha \cup \beta) = d^c \alpha \cup \beta + (-1)^r \alpha \cup d^c \beta, \tag{2.7}$$

де r — порядок форми α. Формула (2.7) є аналогом відповідного континуального співвідношення для диференціальних форм.

Позначимо через $\varepsilon^{k,s}$ довільний базисний елемент $K(2)$. Тоді введемо операцію "зірочка", покладаючи

$$\varepsilon^{k,s} \cup *\varepsilon^{k,s} = V^{k,s}. \tag{2.8}$$

Використовуючи (2.6), отримуємо

$$*x^{k,s} = V^{k,s}, \quad *e_1^{k,s} = e_2^{\tau k,s}, \quad *e_2^{k,s} = -e_1^{k,\tau s}, \quad *V^{k,s} = x^{\tau k,\tau s}.$$

Операція $*$ за лінійністю поширюється на довільні форми.

Тепер нехай

$$V = \sum_{k,s} V_{k,s}, \qquad k = 1, 2, \dots, N, \quad s = 1, 2, \dots, M \tag{2.9}$$

є фіксована область — множина двовимірних базисних елементів $C(2)$. Тоді наступне співвідношення

$$(\alpha, \beta)_V = \langle V, \alpha \cup *\overline{\beta} \rangle \tag{2.10}$$

дає нам коректне означення скалярного добутку для форм однакового порядку (див. (1.1)). Для форм різного порядку добуток (2.10) є рівний нулю за означенням. Використовуючи (2.6), (2.8) та (2.9), можемо (2.10) подати у вигляді

$$(\alpha, \beta)_V = \sum_{k,s} \alpha_{k,s} \overline{\beta_{k,s}}, \tag{2.11}$$

де $\alpha_{k,s}$, $\beta_{k,s}$ — компоненти форм α, $\beta \in K(2)$.

В подальшому, якщо межі сумування в записі сум не вказані, то будемо вважати, що індекси k, s завжди приймають значення, вказане в (2.9).

Враховуючи (2.7), (2.10), отримуємо для $(p-1)$-форми $\alpha \in K(2)$ та p-форми $\beta \in K(2)$ наступне співвідношення

$$(d^c\alpha, \beta)_V = \langle \partial V, \alpha \cup *\overline{\beta} \rangle + (\alpha, \delta^c \beta)_V, \tag{2.12}$$

де

$$\delta^c \beta = (-1)^p *^{-1} d^c * \beta. \tag{2.13}$$

Тут $*^{-1}$ є операцією, оберненою до $*$, тобто $*^{-1}* = 1$. Якщо форма $\alpha \cup *\overline{\beta}$ перетворюється в нуль на границі області V, то співвідношення (2.13) дає нам означення формально спряженого оператора з d^c. Нехай $\omega = (u, v)$ — 1-форма вигляду (2.3). Тоді маємо

$$\delta^c \omega = \sum_{k,s} (-\Delta_k u_{\sigma k,s} - \Delta_s v_{k,\sigma s}) x^{k,s}. \tag{2.14}$$

Очевидно, оператор δ^c можемо вважати дискретним аналогом кодиференціала δ.

Таким чином, дискретний аналог оператора Лапласа має вигляд

$$-\Delta^c = \delta^c d^c + d^c \delta^c. \tag{2.15}$$

З означення (2.13) випливає, що для довільної 0-форми φ виконується рівність $\delta^c\varphi = 0$. Тоді оператор (2.15) на 0-формах діє так:

$$-\Delta^c\varphi = \delta^c d^c\varphi. \tag{2.16}$$

Звідси, використовуючи різницеві записи (2.5), (2.14) операторів d^c та δ^c, рівняння (2.16) "поточково" на елементі $x_{k,s}$ розписуємо таким чином:

$$\langle x_{k,s}, -\Delta^c\varphi\rangle = 4\varphi_{k,s} - \varphi_{\tau k,s} - \varphi_{k,\tau s} - \varphi_{\sigma k,s} - \varphi_{k,\sigma s}.$$

Отже, ми отримали звичайний різницевий оператор Лапласа.

Слід відзначити, що задання області V (2.9) та скалярного добутку (2.10), (2.11) перетворює лінійні простори форм над V в скінченновимірні гільбертові простори, які надалі будемо позначати через H^0, H^1, H^2, з базисами $\{x^{k,s}\}$, $\{e_1^{k,s}, e_2^{k,s}\}$, $\{V^{k,s}\}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $s = 1, 2, \ldots, M$, відповідно. Отже, оператори d^c, δ^c, Δ^c над V діють за правилом:

$$d^c : H^p \to H^{p+1}, \qquad \delta^c : H^p \to H^{p-1}, \qquad \Delta^c : H^p \to H^p,$$

де $p = 0, 1, 2$. Будемо вважати, що $H^{-1} = H^3 = 0$.

3. Дискретна модель магнітного лапласіана

Нехай дійснозначна 1-форма

$$A = \sum_{k,s} (A^1_{k,s} e_1^{k,s} + A^2_{k,s} e_2^{k,s}),$$

де $A^1_{k,s}, A^2_{k,s} \in \mathbb{R}$, є дискретним аналогом *магнітного потенціалу.* Тоді дискретний аналог деформованого диференціала (1.2) означимо так:

$$d^c_A : H^0 \to H^1, \qquad \varphi \to d^c\varphi + i\varphi \cup A. \tag{3.1}$$

Враховуючи (2.5), (2.6), отримуємо

$$d^c_A\varphi = \sum_{k,s} \big((\Delta_k\varphi_{k,s} + i\varphi_{k,s}A^1_{k,s})e_1^{k,s} + (\Delta_s\varphi_{k,s} + i\varphi_{k,s}A^2_{k,s})e_2^{k,s}\big). \tag{3.2}$$

Аналогічно, як це було зроблено вище у континуальному випадку (див. (1.4)), ототожнимо дискретний магнітний потенціал A з операцією множення

$$A : H^0 \to H^1, \qquad \varphi \to \varphi \cup A. \tag{3.3}$$

Тоді отримаємо

$$A\varphi = \sum_{k,s} (\varphi_{k,s}A^1_{k,s} e_1^{k,s} + \varphi_{k,s}A^2_{k,s} e_2^{k,s}).$$

Твердження 3.1. *Формально спряжений з A оператор $A^*: H^1 \to H^0$ діє на довільну 1-форму $\omega = (u, v)$ за правилом*

$$A^*\omega = \sum_{k,s} (A^1_{k,s} u_{k,s} + A^2_{k,s} v_{k,s}) x^{k,s}. \tag{3.4}$$

Доведення. Оскільки 1-форма $A \in H^1$ є дійснозначною за означенням, то маємо

$$\begin{aligned}(A\varphi, \omega)_V = (\varphi \cup A,\ \omega)_V = \langle V, (\varphi \cup A) \cup *\overline{\omega} \rangle = \\ = \sum_{k,s} (\varphi_{k,s} A^1_{k,s}) \overline{u_{k,s}} + (\varphi_{k,s} A^2_{k,s}) \overline{v_{k,s}} = \\ = \sum_{k,s} \varphi_{k,s} (\overline{A^1_{k,s} u_{k,s} + A^2_{k,s} v_{k,s}}) = (\varphi, A^*\omega)_V.\end{aligned}$$

□

Припустимо, що компоненти $\alpha_{k,s}$ довільної r-форми $\alpha \in H^r$, $r = 0, 1, 2$, задовольняють таким "граничним умовам":

$$\alpha_{0,s} = \alpha_{\tau N,s} = 0, \qquad \alpha_{k,0} = \alpha_{k,\tau M} = 0 \tag{3.5}$$

при всіх $k = 1, 2, \ldots, N,\ s = 1, 2, \ldots, M$.

Твердження 3.2. *Нехай компоненти форм $\varphi \in H^0$, $\omega \in H^1$ задовольняють умовам* (3.5)*. Тоді*

$$(d^c_A \varphi, \omega)_V = (\varphi, \delta^c_A \omega)_V,$$

де

$$\delta^c_A \omega = \delta^c \omega - iA^*\omega. \tag{3.6}$$

Доведення. Якщо форми $\varphi \in H^0$, $\omega \in H^1$ задовольняють умовам (3.5), то легко переконатись [3, с. 164], що виконується рівність $\langle \partial V, \varphi \cup *\overline{\omega} \rangle = 0$. Тоді зі співвідношення (2.12) отримуємо

$$(d^c \varphi, \omega)_V = (\varphi, \delta^c \omega)_V.$$

Отже,

$$\begin{aligned}(d^c_A \varphi, \omega)_V = (d^c \varphi + i\varphi \cup A, \omega)_V = (d^c \varphi, \omega)_V + i(\varphi \cup A, \omega)_V = \\ = (\varphi, \delta^c \omega)_V + i(\varphi, A^*\omega)_V = (\varphi, (\delta^c - iA^*)\omega)_V.\end{aligned}$$

□

Таким чином, оператор $\delta^c_A : H^1 \to H^0$ є формально спряжений з оператором d^c_A. Використовуючи (2.14) та (3.4), рівність (3.6) можемо записати в "поточковому" вигляді так:

$$\langle x_{k,s}, \delta^c_A\omega\rangle = -\Delta_k u_{\sigma k,s} - \Delta_s v_{k,\sigma s} - i(A^1_{k,s}u_{k,s} + A^2_{k,s}v_{k,s}).$$

Тоді, враховуючи (2.6), маємо

$$\begin{aligned}\varphi\cup\delta^c\omega &= \sum_{k,s}\varphi_{k,s}(-\Delta_k u_{\sigma k,s} - \Delta_s v_{k,\sigma s})x^{k,s} = \\ &= \sum_{k,s}(\varphi_{\sigma k,s}u_{\sigma k,s} - \varphi_{k,s}u_{k,s} - \varphi_{k,s}v_{k,s} + \varphi_{k,\sigma s}v_{k,\sigma s})x^{k,s} + \\ &+ \sum_{k,s}(\varphi_{k,s}u_{\sigma k,s} - \varphi_{\sigma k,s}u_{\sigma k,s} + \varphi_{k,s}v_{k,\sigma s} - \varphi_{k,\sigma s}v_{k,\sigma s})x^{k,s} = \\ &= \delta^c(\varphi\cup\omega) + \sum_{k,s}\big((\Delta_k\varphi_{\sigma k,s})u_{\sigma k,s} + (\Delta_s\varphi_{k,\sigma s})v_{k,\sigma s}\big)x^{k,s}.\end{aligned}$$

Звідси безпосередньо випливає, що

$$\delta^c(\varphi\cup\omega) = \varphi\cup\delta^c\omega - \sum_{k,s}\big((\Delta_k\varphi_{\sigma k,s})u_{\sigma k,s} + (\Delta_s\varphi_{k,\sigma s})v_{k,\sigma s}\big)x^{k,s}.$$

Отримана рівність дозволяє виписати дискретний аналог правила Лейбніца для оператора δ^c_A:

$$\begin{aligned}\delta^c_A(\varphi\cup\omega) &= (\delta^c - iA^*)(\varphi\cup\omega) = \delta^c(\varphi\cup\omega) - iA^*(\varphi\cup\omega) = \\ &= \varphi\cup\delta^c\omega - \varphi\cup iA^*\omega - \sum_{k,s}\big((\Delta_k\varphi_{\sigma k,s})u_{\sigma k,s} + (\Delta_s\varphi_{k,\sigma s})v_{k,\sigma s}\big)x^{k,s} = \\ &= \varphi\cup\delta^c_A\omega - \sum_{k,s}\big((\Delta_k\varphi_{\sigma k,s})u_{\sigma k,s} + (\Delta_s\varphi_{k,\sigma s})v_{k,\sigma s}\big)x^{k,s}.\end{aligned}$$

Для порівняння див. [7, p. 2], де наведено відповідний континуальний аналог даного правила.

Введемо дискретний магнітний лапласіан так:

$$-\Delta^c_A = \delta^c_A d^c_A : H^0 \to H^0.$$

Зазначимо, що умови (3.5) дають необхідні доозначення форм $\varphi \in H^0$ за межами V. Іншими словами, оскільки в різницевому записі оператора $-\Delta^c_A$ є компоненти вигляду $\varphi_{0,s}$, $\varphi_{k,\tau M}$, $\varphi_{k,0}$, $\varphi_{\tau N,s}$, то умови (3.5) дозволяють коректно означити оператор $-\Delta^c_A$ на довільному елементі $\varphi \in H^0$.

Використовуючи (3.1), (3.6), отримуємо

$$\begin{aligned}-\Delta^c_A\varphi &= \delta^c_A(d^c\varphi + i\varphi\cup A) = \\ &= (\delta^c - iA^*)d^c\varphi + (\delta^c - iA^*)(i\varphi\cup A) = \\ &= -\Delta^c\varphi - iA^*d^c\varphi + i\delta^c(\varphi\cup A) + A^*(\varphi\cup A) = \\ &= -\Delta^c\varphi - iA^*d^c\varphi + i\delta^c A\varphi + A^*A\varphi. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Твердження 3.3. *Оператор* $-\Delta_A^c$ *є самоспряженим, тобто*

$$(\delta_A^c d_A^c \varphi, \psi)_V = (\varphi, \delta_A^c d_A^c \psi)_V.$$

Доведення. Відомо (див. [3, с. 166]), що за умов (3.5) дискретний лапласіан $-\Delta^c = \delta^c d^c : H^0 \to H^0$ є самоспряженим. Використовуючи твердження 3.1, 3.2, отримуємо

$$\begin{aligned}
&(\delta_A^c d_A^c \varphi, \psi)_V = \\
&\quad = (\delta^c d^c \varphi, \psi)_V - (iA^* d^c \varphi, \psi)_V + (i\delta^c A\varphi, \psi)_V + (A^* A\varphi, \psi)_V = \\
&\quad = (\varphi, \delta^c d^c \psi)_V + (d^c \varphi, iA\psi)_V - (A\varphi, id^c\psi)_V + (A\varphi, A\psi)_V = \\
&\quad = (\varphi, -\Delta^c \psi)_V + (\varphi, i\delta^c A\psi)_V - (\varphi, iA^* d^c \psi)_V + (\varphi, A^* A\psi)_V = \\
&\qquad = (\varphi, (-\Delta^c + i\delta^c A - iA^* d^c + A^* A)\psi)_V = (\varphi, -\Delta_A^c \psi)_V.
\end{aligned}$$

□

Використовуючи (3.1), можемо записати

$$(d_A^c \varphi, d_A^c \psi)_V = (d^c \varphi, d^c \psi)_V + (d^c \varphi, iA\psi)_V + (iA\varphi, d^c \psi)_V + (iA\varphi, iA\psi)_V. \tag{3.8}$$

Беручи до уваги (2.5) та (2.11), дістаємо

$$\begin{aligned}
(d^c \varphi, A\psi)_V &= \sum_{k,s} \big(\Delta_k \varphi_{k,s}(\overline{\psi_{k,s}} A^1_{k,s}) + \Delta_s \varphi_{k,s}(\overline{\psi_{k,s}} A^2_{k,s})\big) = \\
&= \sum_{k,s} \varphi_{k,s}\big(- \Delta_k(\overline{\psi_{\sigma k,s}} A^1_{\sigma k,s}) - \Delta_s(\overline{\psi_{k,\sigma s}} A^2_{k,\sigma s})\big) + \\
&+ \sum_s \big(\varphi_{\tau N,s}(\overline{\psi_{N,s}} A^1_{N,s}) - \varphi_{1,s}(\overline{\psi_{0,s}} A^1_{0,s})\big) + \\
&+ \sum_k \big(\varphi_{k,\tau M}(\overline{\psi_{k,M}} A^2_{k,M}) - \varphi_{k,1}(\overline{\psi_{k,0}} A^2_{k,0})\big) = \\
&= \sum_s \big(\varphi_{\tau N,s}(\overline{\psi_{N,s}} A^1_{N,s}) - \varphi_{1,s}(\overline{\psi_{0,s}} A^1_{0,s})\big) + \\
&+ \sum_k \big(\varphi_{k,\tau M}(\overline{\psi_{k,M}} A^2_{k,M}) - \varphi_{k,1}(\overline{\psi_{k,0}} A^2_{k,0})\big) + (\varphi, \delta^c A\psi)_V.
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}
(d_A^c \varphi, d_A^c \psi)_V &= \sum_s \big[\varphi_{\tau N,s}\big(\overline{\psi_{\tau N,s}} - \overline{\psi_{N,s}} - i\overline{\psi_{N,s}} A^1_{N,s}\big)\big] - \\
&- \sum_s \big[\varphi_{1,s}\big(\overline{\psi_{1,s}} - \overline{\psi_{0,s}} + i\overline{\psi_{0,s}} A^1_{0,s}\big)\big] + \\
&+ \sum_k \big[\varphi_{k,\tau M}\big(\overline{\psi_{k,\tau M}} - \overline{\psi_{k,M}} - i\overline{\psi_{k,M}} A^2_{k,M}\big)\big] -
\end{aligned}$$

$$-\sum_k \left[\varphi_{k,1}\big(\overline{\psi_{k,1}} - \overline{\psi_{k,0}} + i\overline{\psi_{k,0}}A^2_{k,0}\big)\right] +$$
$$+ (\varphi, -\Delta^c\psi)_V + (\varphi, i\delta^c A\psi)_V - (\varphi, iA^*(d^c\psi))_V + (\varphi, A^*A\psi)_V.$$

Отже, якщо форми $\varphi, \psi \in H^0$ задовольняють умовам (3.5), то отримуємо співвідношення

$$(d^c_A\varphi, d^c_A\psi)_V = -\sum_s \varphi_{1,s}\overline{\psi_{1,s}} - \sum_k \varphi_{k,1}\overline{\psi_{k,1}} + (\varphi,\ \delta^c_A d^c_A\psi)_V. \tag{3.9}$$

Теорема 3.1. *Для довільної форми $f \in H^0$ розв'язок рівняння*

$$-\Delta^c_A\varphi = f \tag{3.10}$$

існує і є единим.

Доведення. З самоспряженості оператора $-\Delta^c_A$ відразу випливає, що для доведення цієї теореми достатньо встановити єдиність розв'язку. Покладаючи $\varphi = \psi$ в рівнянні (3.9), маємо

$$(d^c_A\varphi, d^c_A\varphi)_V + \sum_s |\varphi_{1,s}|^2 + \sum_k |\varphi_{k,1}|^2 = (\varphi, -\Delta^c_A\varphi)_V. \tag{3.11}$$

Враховуючи (2.5), (2.11), отримуємо

$$(d^c\varphi, d^c\varphi)_V = \sum_{k,s} \big(|\Delta_k\varphi_{k,s}|^2 + |\Delta_s\varphi_{k,s}|^2\big),$$

$$(d^c\varphi, iA\varphi)_V + (iA\varphi, d^c\varphi)_V =$$
$$= i\sum_{k,s}\left[A^1_{k,s}\big(\varphi_{k,s}(\overline{\Delta_k\varphi_{k,s}}) - (\Delta_k\varphi_{k,s})\overline{\varphi_{k,s}}\big)\right] +$$
$$+ i\sum_{k,s}\left[A^2_{k,s}\big(\varphi_{k,s}(\overline{\Delta_s\varphi_{k,s}}) - (\Delta_s\varphi_{k,s})\overline{\varphi_{k,s}}\big)\right],$$

$$(iA\varphi, iA\varphi)_V = \sum_{k,s}\big((A^1_{k,s})^2|\varphi_{k,s}|^2 + (A^2_{k,s})^2|\varphi_{k,s}|^2\big).$$

Легко переконатись, що

$$\varphi_{k,s}(\overline{\Delta_k\varphi_{k,s}}) - (\Delta_k\varphi_{k,s})\overline{\varphi_{k,s}} =$$
$$= 2i\big(\mathrm{Im}\,(\varphi_{k,s})\mathrm{Re}\,(\Delta_k\varphi_{k,s}) - \mathrm{Re}\,(\varphi_{k,s})\mathrm{Im}\,(\Delta_k\varphi_{k,s})\big).$$

Підставивши отримані вирази у формулу (3.8) за умови, що $\varphi = \psi$, дістаємо

$$(d^c_A\varphi, d^c_A\varphi)_V = \sum_{k,s}\Big[|\Delta_k\varphi_{k,s}|^2 + |\Delta_s\varphi_{k,s}|^2 + (A^1_{k,s})^2|\varphi_{k,s}|^2 + (A^2_{k,s})^2|\varphi_{k,s}|^2 +$$

$$+ 2A^1_{k,s}\mathrm{Re}\,(\varphi_{k,s})\mathrm{Im}\,(\Delta_k\varphi_{k,s}) - 2A^1_{k,s}\mathrm{Im}\,(\varphi_{k,s})\mathrm{Re}\,(\Delta_k\varphi_{k,s})+$$
$$+ 2A^2_{k,s}\mathrm{Re}\,(\varphi_{k,s})\mathrm{Im}\,(\Delta_s\varphi_{k,s}) - 2A^2_{k,s}\mathrm{Im}\,(\varphi_{k,s})\mathrm{Re}\,(\Delta_s\varphi_{k,s})\Big] =$$
$$= \sum_{k,s}\Big[\big(\mathrm{Re}\,(\Delta_k\varphi_{k,s}) - A^1_{k,s}\mathrm{Im}\,(\varphi_{k,s})\big)^2 + \big(\mathrm{Im}\,(\Delta_k\varphi_{k,s}) + A^1_{k,s}\mathrm{Re}\,(\varphi_{k,s})\big)^2+$$
$$+ \big(\mathrm{Re}\,(\Delta_s\varphi_{k,s}) - A^2_{k,s}\mathrm{Im}\,(\varphi_{k,s})\big)^2 + \big(\mathrm{Im}\,(\Delta_s\varphi_{k,s}) + A^2_{k,s}\mathrm{Re}\,(\varphi_{k,s})\big)^2\Big].$$

Тепер нехай у рівнянні (3.10) $f = 0$. Тоді, підставивши вище отриманий вираз для $(d^c_A\varphi, d^c_A\varphi)_V$ у (3.11), маємо

$$\sum_{k,s}\Big[\big(\mathrm{Re}\,(\Delta_k\varphi_{k,s}) - A^1_{k,s}\mathrm{Im}\,(\varphi_{k,s})\big)^2+$$
$$+ \big(\mathrm{Im}\,(\Delta_k\varphi_{k,s}) + A^1_{k,s}\mathrm{Re}\,(\varphi_{k,s})\big)^2+$$
$$+ \big(\mathrm{Re}\,(\Delta_s\varphi_{k,s}) - A^2_{k,s}\mathrm{Im}\,(\varphi_{k,s})\big)^2+$$
$$+ \big(\mathrm{Im}\,(\Delta_s\varphi_{k,s}) + A^2_{k,s}\mathrm{Re}\,(\varphi_{k,s})\big)^2\Big]+$$
$$+ \sum_s |\varphi_{1,s}|^2 + \sum_k |\varphi_{k,1}|^2 = 0.$$

Звідси відразу випливає, що $\varphi_{k,s} = 0$ для всіх k, s. Отже, $\varphi \equiv 0$. □

Наслідок 3.1. *Оператор* $-\Delta^c_A$ *є додатним.*

4. Апроксимація та граничний перехід

У цьому розділі розглянемо зв'язок між описаними вище комбінаторними об'єктами та їхніми континуальними аналогами. Зокрема, побудуємо деяку нестандартну апроксимацію узагальненого розв'язку рівняння типу Пуассона (з магнітним лапласіаном $-\Delta_A$). Тобто розглянемо рівняння

$$-\Delta_A\varphi = f, \tag{4.1}$$

де $f \in L^2(\Omega)$. Для даного рівняння зреалізуємо схему дискретизації, наведену в [3, гл. 3, § 3].

Нехай область $\Omega \in \mathbb{R}^2$ — прямокутник з вершинами (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2), де $0 \le a_1 < a_2$, $0 \le b_1 < b_2$. Введемо маштаб h, покладаючи $h = N^{-1}(a_2 - a_1) = M^{-1}(b_2 - b_1)$. Розділимо прямокутник Ω прямими лініями, які мають вигляд

$$x = a_1 + kh, \quad y = b_1 + sh, \quad k = 0, 1, \ldots, N,\ s = 0, 1, \ldots, M.$$

Позначимо через $x_{k,s}$ точки перетину цих ліній. Позначимо також через $V_{k,s}$ відкритий квадрат, який обмежується лініями: $x = a_1 +$

$kh,\ y = b_1 + sh,\ x = a_1 + \tau kh,\ y = b_1 + \tau sh$. Нехай $e^1_{k,s}$ та $e^2_{k,s}$ — горизонтальні та вертикальні сторони $V_{k,s}$, тобто $e^1_{k,s} = (x_{k,s}, x_{\tau k,s})$, $e^2_{k,s} = (x_{k,s}, x_{k,\tau s})$. Введений геометричний об'єкт — прямокутник Ω — ототожнимо з комбінаторним об'єктом V вигляду (2.9).

Тепер зіставимо кожній дискретній формі $\varphi \in H^0$ ступінчасту функцію $\varphi^h(x,y)$ за правилом:

$$\varphi^h(x,y) = \varphi_{k,s} \quad \text{для} \quad x, y \in V_{k,s}.$$

У випадку 1-форми $\omega = (u,v) \in H^1$ будемо мати пару ступінчастих функцій $u^h(x,y) = u_{k,s},\ v^h(x,y) = v_{k,s}$, тобто $\omega^h(,x,y)$ можемо зобразити у вигляді диференціальної форми

$$\omega^h(x,y) = u^h(x,y)\,dx + v^h(x,y)\,dy.$$

Нагадаємо, що $\varphi_{k,s}, u_{k,s}, v_{k,s} \in \mathbb{C}$ для всіх k, s. Звідси φ^h, ω^h — комплекснозначні форми.

Легко перевірити, що

$$\|\varphi^h\|_{L^2(\Omega)} = h\|\varphi\|_{H^0}, \qquad \|\omega^h\|_{L^2\Lambda^1(\Omega)} = h\|\omega\|_{H^1}. \tag{4.2}$$

Введемо різницеві оператори Δ^h_x Δ^h_y, які діють на ступінчасті функції таким чином:

$$\Delta^h_x\varphi^h(x,y) = h^{-1}\big(\varphi^h(x+h,y) - \varphi^h(x,y)\big),$$
$$\Delta^h_y\varphi^h(x,y) = h^{-1}\big(\varphi^h(x,y+h) - \varphi^h(x,y)\big).$$

Якщо замінити часткові похідні $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ в диференціальних операторах $d,\ \delta$ на відповідні різницеві оператори $\Delta^h_x,\ \Delta^h_y$, то отримаємо різницеві оператори, які надалі будемо позначати через $d^h,\ \delta^h$. Рівняння

$$d^h\varphi^h = \omega^h \tag{4.3}$$

є еквівалентне сім'ї різницевих рівнянь вигляду

$$\Delta_k\varphi_{k,s} = hu_{k,s}, \qquad \Delta_s\varphi_{k,s} = hv_{k,s},$$

де $k = 0, 1, \dots, N,\ s = 0, 1, \dots, M$. Отже, рівняння (4.3) ми можемо переписати у вигляді

$$d^c\varphi = h\omega,$$

де $\varphi,\ \omega$ — дискретні форми (2.3) з компонентами $\varphi_{k,s}$ та $u_{k,s},\ v_{k,s}$ відповідно. Аналогічно різницевому рівнянню $\delta^h\omega^h = \varphi^h$ зіставляється дискретне рівняння $\delta^c\omega = h\varphi$.

Введемо також різницевий оператор вигляду

$$d^h_{A^h} = d^h + iA^h, \tag{4.4}$$

де $A^h = A^{1h}dx + A^{2h}dy$ та A^{1h}, A^{2h} — дійснозначні ступінчасті функції, означені як вище. З іншого боку, 1-форму A^h можемо розглядати як оператор множення $A^h : L^2(\Omega) \to L^2\Lambda^1(\Omega)$, який діє за правилом:

$$A^h\varphi^h = \varphi^h A^{1h}dx + \varphi^h A^{2h}dy.$$

Тоді формально спряжений з A^h оператор (див. для порівняння (3.4)) діє на ступінчасту 1-форму $\omega^h = (u^h, v^h)$ так:

$$(A^h)^*\omega^h = u^h A^{1h} + v^h A^{2h}.$$

Отже, різницевий магнітний лапласіан (див. (3.7)) ми можемо означити за формулою

$$-\Delta^h_{A^h} \equiv \delta^h_{A^h} d^h_{A^h} = \delta^h d^h - i(A^h)^* d^h + i\delta^h A^h + (A^h)^* A^h. \tag{4.5}$$

Тепер розглянемо процедуру *дискретизації* — зіставлення континуальному об'єкту дискретного (детальніше див. [3, с. 172]). Нехай $f(x,y)$ — комплекснозначна функція, задана над прямокутником Ω (або над $V = \sum V_{k,s}$), та нехай $f \in L^2(\Omega)$. Зіставимо f ступінчасту функцію f^h, покладаючи

$$f^h(x,y) = h^{-2} \int\limits_{V_{k,s}} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad \text{для} \quad x, y \in V_{k,s}. \tag{4.6}$$

Припишемо значення функції f^h точці $x_{k,s}$. Тобто, як це було зроблено вище, покладемо $f^h(x,y) = f_{k,s}$ для всіх $x, y \in V_{k,s}$. Отже, ми отримали дискрету 0-форму $\widehat{f} = \sum f_{k,s}x^{k,s}$, яка породжується функцією $f \in L^2(\Omega)$. Аналогічно, якщо f — диференціальна 1-форма, тобто $f \in L^2\Lambda^1(\Omega)$, то ми кожній компоненті f зіставляємо ступінчасту функцію вигляду (4.6) і приписуємо значення отриманих ступінчастих функції інтервалам $e^1_{k,s}$, $e^2_{k,s}$ відповідно.

Тепер введемо норму

$$\|\varphi^h\|^2_{W(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left(|\Delta^h_x\varphi^h|^2 + |\Delta^h_y\varphi^h|^2\right) dx\, dy.$$

З огляду на введені вище позначення легко переконатись, що

$$\|\varphi^h\|^2_{W(\Omega)} = \sum_{k=0}^{N}\sum_{s=0}^{M} \left(|\Delta_k\varphi_{k,s}|^2 + |\Delta_s\varphi_{k,s}|^2\right). \tag{4.7}$$

Звідси отримуємо рівність

$$\|\varphi^h\|_{W(\Omega)} = \|\varphi\|_{W(V)},$$

де φ — дискретна форма.

Теорема 4.1. *Нехай ступінчаста функція f^h — дискретизація $f \in L^2(\Omega)$. Тоді задача Діріхле:*

$$-\Delta^h_{A^h}\varphi^h = f^h, \tag{4.8}$$

$$\varphi^h|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4.9}$$

має єдиний розв'язок. Крім того, для розв'язку φ^h виконується нерівність

$$\|\varphi^h\|_{W(\Omega)} < c_1\|\mathrm{Re}\, f\|_{L^2(\Omega)} + c_2\|\mathrm{Im}\, f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.10}$$

Доведення. Використовуючи (4.5), рівняння (4.8) можемо зобразити у вигляді

$$\delta^h d^h\varphi^h - i(A^h)^* d^h\varphi^h + i\delta^h A^h\varphi^h + (A^h)^* A^h\varphi^h = f^h. \tag{4.11}$$

Як було описано вище, зіставимо ступінчастій функції φ^h та 1-формі A^h над Ω дискретні форми φ та A над V. Замінемо різницеві оператори d^h, δ^h на дискретні d^c, δ^c. Тоді рівняння (4.11) можемо переписати у вигляді

$$\delta^c d^c\varphi - ihA^* d^c\varphi + ih\delta^c A\varphi + h^2 A^* A\varphi = h^2\widehat{f}, \tag{4.12}$$

де $\widehat{f}$ — 0-форма, яка породжується ступінчастою функцією f^h (див. (4.6)). Очевидно, якщо φ^h задовольняє умовам (4.9), то відповідна дискретна форма задовольняє умовам (3.5). Таким чином, однозначна розв'язність задачі (4.8), (4.9) безпосередньо випливає з теореми 3.1.

Тепер подамо рівняння (4.8) у вигляді системи двох рівнянь

$$-\Delta^h_{A^h}\mathrm{Re}\,\varphi^h = \mathrm{Re}\, f^h, \qquad -\Delta^h_{A^h}\mathrm{Im}\,\varphi^h = \mathrm{Im}\, f^h. \tag{4.13}$$

Зрозуміло, що аналогічно можемо розщепити рівняння (4.11).

Оскільки згідно (3.7), (3.11) для довільної дійснозначної форми $\alpha \in H^0$ виконується рівність

$$(d^c\alpha,\ iA\alpha)_V + (iA\alpha,\ d^c\alpha)_V = 0,$$

то з першого рівняння (4.13), враховуючи (3.11) та (4.12), отримуємо

$$\|d^c\mathrm{Re}\,\varphi\|^2_{H^1} + \sum_s(\mathrm{Re}\,\varphi_{1,s})^2 + \sum_k(\mathrm{Re}\,\varphi_{k,1})^2 +$$

$$+ h^2\|A\mathrm{Re}\,\varphi\|^2_{H^1} = h^2(\mathrm{Re}\,\varphi,\ \mathrm{Re}\,\widehat{f})_V.$$

Звідси випливає, що

$$\|\mathrm{Re}\,\varphi\|^2_{W(V)} < h^2(\mathrm{Re}\,\varphi,\ \mathrm{Re}\,\widehat{f})_V = h^2\sum_{k,s}\mathrm{Re}\,\varphi_{k,s}\mathrm{Re}\,f_{k,s}.$$

Отже, використовуючи (4.2), маємо

$$\|\mathrm{Re}\,\varphi^h\|^2_{W(\Omega)} < \|\mathrm{Re}\,\varphi^h\|_{L^2(\Omega)}\|\mathrm{Re}\,f^h\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.14}$$

Легко перевірити (див. [3, гл. 3, теорема 5]), що виконуються оцінки

$$\|\mathrm{Re}\,\varphi^h\|_{L^2(\Omega)} \le \|\mathrm{Re}\,\varphi^h\|_{W(\Omega)}, \quad \|\mathrm{Re}\,f^h\|_{L^2(\Omega)} \le c_1\|\mathrm{Re}\,f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.15}$$

Підставляючи (4.15) у (4.14), дістаємо

$$\|\mathrm{Re}\,\varphi^h\|_{W(\Omega)} < c_1\|\mathrm{Re}\,f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.16}$$

Дослівно повторюючи наведені вище міркування, отримуємо аналогічну оцінку для уявної частини φ^h:

$$\|\mathrm{Im}\,\varphi^h\|_{W(\Omega)} < c_2\|\mathrm{Im}\,f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.17}$$

Нарешті, оскільки

$$\|\varphi^h\|_{W(\Omega)} \le \|\mathrm{Re}\,\varphi^h\|_{W(\Omega)} + \|\mathrm{Im}\,\varphi^h\|_{W(\Omega)},$$

то з оцінок (4.16), (4.17) безпосередньо випливає оцінка (4.10). □

Тепер розглянемо граничний перехід. Як в [3, гл. 3], побудуємо за ступінчастими функціями φ^h гладкі (класу C^1) функції $J^h\varphi^h$ наступним чином. Задамо $J^h\varphi^h$ у вигляді

$$J^h\varphi^h(x,y) = h^{-2}\int\limits_x^{x+h}\int\limits_y^{y+h}\varphi^h(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Зазначимо, що це є добре відома функція Стєклова з радіусом усереднення h. Введемо також 1-форму $J^hA^h \in \Lambda^1_{(1)}(\Omega)$ так:

$$J^hA^h(x,y) = J^hA^{1h}(x,y)\,dx + J^hA^{2h}(x,y)\,dy.$$

Позначимо через $\dot{W}^1(\Omega)$ простір Соболєва комплекснозначних функцій, які задовольняють однорідним умовам Діріхле.

Розглянемо деяку послідовність $\{h_n\}$, таку, що $h_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Надалі для зручності будемо писати h замість h_n.

Нехай в операторі $-\Delta_A$ магнітний потенціал $A \in \Lambda^1_{(1)}(\Omega)$. Тоді маємо

Теорема 4.2. *Нехай ступінчаста функція φ^h — розв'язок задачі Діріхле* (4.8), (4.9) *для довільного $f \in L^2(\Omega)$. Тоді послідовність $\{\varphi^h\}$ сильно збігається в $L^2(\Omega)$ до $\varphi \in \dot{W}^1(\Omega)$ при $h \to 0$, де φ — узагальнений розв'язок відповідної задачі Діріхле для рівняння* (4.1)*. Водночас послідовність $\{J^h\varphi^h\}$ збігається до φ в метриці $\dot{W}^1(\Omega)$.*

Доведення. Опираючись на теорему 4.1, доведення є дослівним повторенням міркувань з доведення теореми 6 [3, гл. 3]. □

Література

[1] G. A. Baker, *Combinatorial Laplacians and Sullivan-Whitney forms*, in Differential geometry (Proceeding. Special year. Maryland 1981–1982), Birkhauser, 1983, 1–33.

[2] J. Bellissard, H. Schulz-Baldes, A. van Elst, *The Noncommutative geometry of the quantum hall effect* // J. Math. Phys., **35** (1994), 5373–5471.

[3] А. А. Дезин, *Многомерный анализ и дискретные модели.* М.: Наука, 1990, 238 с.

[4] J. Dodziuk, *Finite-difference approach to Hodge theory of harmonic forms* // Amer. J. Math, **98** (1976), 79–104.

[5] J. Dodziuk, V. Mathai, *Kato's inequality and asymptotic spectral properties for discrete magnetic Laplacians* // preprint math.SP/0312450v1.

[6] J. Komorowski, *On finite-dimensional approximations of the exterior differential, codifferential and Laplacian on a Riemannian manifold* // Bull. Acad. Pol. Sci., Vol. **23** (1975), N 9, 999–1005.

[7] M. Shubin, *Essential self-adjointness for semi-bounded magnetic Schrodinger operators on non-compact manifolds* // preprint math.SP/0007019.

[8] В. Н. Сущ, *Разностное уравнение Пуассона на криволинейной сетке* // Дифференциальные уравнения, **32** (1996), N 5, 684–688.

[9] V. N. Sushch, *The discrete analog of a nonlocal boundary value problem* // Доп. НАН України, (1995), N 1, 38–40.

[10] В. Н. Сущ, *Дискретні моделі на двовимірній сфері* // Доп. НАН України, (2000), N 2, 27–32.

Відомості про авторів

Володимир Н. Сущ

Політехніка Кошалінська,
Снядецкіх 2, 75-453 Кошалін,
Польща;
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, 79000, Львів,
Україна
E-Mail: sushch@tu.koszalin.pl