Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 4, 490 – 501

Про еквівалентність у просторах аналітичних функцій деяких операторів, пов'язаних з узагальненим інтегруванням та диференціюванням Гельфонда–Леонтьєва

Тарас І. Звоздецький

(*Представлена М. Л. Горбачуком*)

Анотація. Отримані умови еквівалентності в просторах аналітичних функцій двох різних операторів узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва, а також двох операторів, які є правими оберненими до різних операторів узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва.

2000 MSC. 47B38.

Ключові слова та фрази. Простір аналітичних функцій, еквівалентність, узагальнене диференціювання Гельфонда–Леонтьєва, узагальнене інтегрування Гельфонда–Леонтьєва.

1. Нехай G — область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, наділений топологією компактної збіжності, а символом $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ — множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. Нехай $\mathcal{H}'(G)$ — сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{H}(G)$.

Нагадаємо, що коли G_1 і G_2 — області в $\mathbb{C}$, то оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1))$ називається еквівалентним до оператора $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_2))$, якщо існує такий ізоморфізм $T : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$, для якого $TA = BT$. У даній роботі розглядаються дві задачі про встановлення умов еквівалентності операторів, які пов'язані з різними операторами узагальненого інтегрування чи диференціювання Гельфонда–Леонтьєва і діють у різних просторах аналітичних функцій.

Нехай для $i = 1, 2$ область G_i — зіркова відносно точки $a_i \in \mathbb{C}$, а $(\mathcal{I}_i f)(z) = \int_{a_i}^{z} f(t)dt$, $f \in \mathcal{H}(G_i)$. В [1] було доведено, що $\mathcal{I}_1$ та $\mathcal{I}_2$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли $G_1 - a_1 = G_2 - a_2$. Там же було отримано, що коли G_i — однозв'язна область в $\mathbb{C}$, $(\mathcal{D}_i f)(z) = f'(z)$, $f \in \mathcal{H}(G_i)$ $(i = 1, 2)$, то оператор $\mathcal{D}_1$ в $\mathcal{H}(G_1)$ еквівалентний до $\mathcal{D}_2$ в $\mathcal{H}(G_2)$ тоді і лише тоді, коли існує таке $a \in \mathbb{C}$, що $G_2 + a = G_1$. У випадку, коли G_i — зіркова відносно нуля область, $(\mathcal{I}f)(z) = \int_0^z f(t)dt$, $f \in \mathcal{H}(G_i)$, $L_i \in \mathcal{H}'(G_i)$ $(i = 1, 2)$, у [2] встановлені деякі необхідні умови еквівалентності операторів $\mathcal{I} + L_1$ в $\mathcal{H}(G_1)$ та $\mathcal{I} + L_2$ в $\mathcal{H}(G_2)$, а також висловлено припущення, що для еквівалентності цих операторів необхідно і досить, щоб при деякому $a \in G_1$ області G_1 і G_2 були пов'язані рівністю $G_2 + a = G_1$, а функціонали L_1 і L_2 — співвідношенням $L_1(f) = \int_a^0 f(t)\,dt + L_2(f(z + a))$, $f \in \mathcal{H}(G_1)$.

Для довільних сталих $\varrho > 0$ і $\mu \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}\,\mu > 0)$ через $E_\varrho(z; \mu)$ позначатимемо функцію Міттаґ–Лефлера, яка визначається рівністю

$$E_\varrho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{\varrho} + \mu)}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

через $\mathcal{I}_{\varrho,\mu}$ — оператор узагальненого інтегрування Гельфонда–Леонтьєва [3], який лінійно й неперервно діє в $\mathcal{H}(G)$ (G — зіркова відносно нуля) за правилом

$$(\mathcal{I}_{\varrho,\mu} f)(z) = \frac{z}{\Gamma(\frac{1}{\varrho})} \int_0^1 (1 - t)^{\frac{1}{\varrho} - 1} t^{\mu - 1} f\big(z t^{\frac{1}{\varrho}}\big)\,dt, \qquad f \in \mathcal{H}(G),$$

а через $\mathcal{D}_{\varrho,\mu}$ — оператор узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва [4], який на функціях із повної в $\mathcal{H}(G)$ системи $\{E_\varrho(\lambda z; \mu) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ визначається співвідношенням

$$\mathcal{D}_{\varrho,\mu} E_\varrho(\lambda z; \mu) = \lambda E_\varrho(\lambda z; \mu), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

У [5] було доведено, що $\mathcal{D}_{\varrho,\mu} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Легко перевірити, що оператор $\mathcal{I}_{\varrho,\mu}$ є правим оберненим до $\mathcal{D}_{\varrho,\mu}$. Загальний вигляд таких операторів дається формулою $\mathcal{I}_{\varrho,\mu} + L$, де $L \in \mathcal{H}'(G)$.

Нехай для $i = 1, 2$ область G_i — ϱ-опукла в $\mathbb{C}$ [6], а $L_i \in \mathcal{H}'(G_i)$. У [7] були встановлені необхідні й достатні умови еквівалентності операторів $\mathcal{I}_{\varrho,\mu} + L_1$ в $\mathcal{H}(G_1)$ та $\mathcal{I}_{\varrho,\mu} + L_2$ в $\mathcal{H}(G_2)$. Якщо G_i — зіркова відносно нуля область, а $\varrho_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}\,\mu_i > 0)$ $(i = 1, 2)$, то у [8] доведено, що $\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}$ в $\mathcal{H}(G_1)$ еквівалентний до $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}$ в $\mathcal{H}(G_2)$ тоді і лише тоді, коли $\varrho_1 = \varrho_2$ і $G_1 = G_2$. Зауважимо, що для випадку $G_1 = G_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ $(0 < R \le +\infty)$ умова $\varrho_1 = \varrho_2$ еквівалентності операторів $\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}$ та $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}$ (а також $\mathcal{D}_{\varrho_1,\mu_1}$ та $\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}$) випливає з результатів роботи [1]. У даній статті отримуються критерії еквівалентності операторів $\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1} + L_1$ в $\mathcal{H}(G_1)$ та $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2} + L_2$ в $\mathcal{H}(G_2)$, а також операторів $\mathcal{D}_{\varrho_1,\mu_1}$ в $\mathcal{H}(G_1)$ та $\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}$ в $\mathcal{H}(G_2)$, у випадку, коли G_i — ϱ_i-опукла область в $\mathbb{C}$ (i=1,2). Відзначимо, що в роботі [9], коли

G_1 і G_2 є ϱ-опуклими областями в $\mathbb{C}$ (причому $G_1 \subseteq G_2$), було описано множину всіх лінійних неперервних операторів $T : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$, для яких $T\mathcal{D}_{\varrho,\mu} = \mathcal{D}_{\varrho,\mu}T$, а в [10] було одержано зображення всіх ізоморфізмів $T : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$, які задовольняють останнє рівняння.

2. Розглянемо для $i = 1, 2$ числа $\varrho_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$ ($\mathrm{Re}\,\mu_i > 0$), ϱ_i-опуклу область G_i в $\mathbb{C}$, функціонал $L_i \in \mathcal{H}'(G_i)$. Припустимо, що оператори $\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1} + L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1))$ та $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2} + L_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_2))$ є еквівалентними, тобто існує такий ізоморфізм $T : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$, що

$$T(\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1} + L_1) = (\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2} + L_2)T. \tag{1}$$

Тоді ці два оператори мають однакові власні значення. Зафіксуємо якесь $i = 1, 2$. Якщо число $\frac{1}{\lambda_0}$ є власним значенням оператора $\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i} + L_i$ в $\mathcal{H}(G_i)$, то існує така функція $f \neq 0$ з $\mathcal{H}(G_i)$, для якої $\lambda_0(\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i} + L_i)f = f$, тобто $(E - \lambda_0\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i})f = L_i(f)$, де E — тотожний оператор в $\mathcal{H}(G_i)$. Тому

$$f(z) = L_i(f)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_0^n\mathcal{I}^n_{\varrho_i,\mu_i}1 = \Gamma(\mu_i)L_i(f)E_{\varrho_i}(\lambda_0 z; \mu_i),$$

тобто $f(z) = CE_{\varrho_i}(\lambda_0 z; \mu_i)$, де $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Крім цього,

$$(\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i} + L_i)E_{\varrho_i}(\lambda_0 z; \mu_i) = \frac{1}{\lambda_0}E_{\varrho_i}(\lambda_0 z; \mu_i)$$

тоді й лише тоді, коли $\frac{1}{\Gamma(\mu_i)} - \lambda_0 l_i(\lambda_0) = 0$, де $l_i(\lambda) = L_i(E_{\varrho_i}(\lambda z; \mu_i))$, $\lambda \in \mathbb{C}$, — характеристична функція функціонала L_i. Отже, число $\frac{1}{\lambda_0}$ є власним значенням оператора $\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i} + L_i$ тоді й лише тоді, коли число λ_0 є нулем функції $\frac{1}{\Gamma(\mu_i)} - \lambda l_i(\lambda)$, причому це власне значення є простим. Таким чином, функції $\frac{1}{\Gamma(\mu_1)} - \lambda l_1(\lambda)$ і $\frac{1}{\Gamma(\mu_2)} - \lambda l_2(\lambda)$ мають однакові нулі.

У [7] було доведено, що кратність нуля λ_0 функції $\frac{1}{\Gamma(\mu_i)} - \lambda l_i(\lambda)$ дорівнює спектральній кратності числа $\frac{1}{\lambda_0}$ для оператора $\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i} + L_i$, тобто розмірності підпростору

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ker}\big(\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i} + L_i - \tfrac{1}{\lambda_0}E\big)^n$$

в просторі $\mathcal{H}(G_i)$ ($i = 1, 2$). В [11] було встановлено, що спектральні кратності одного й того ж числа для еквівалентних операторів збігаються. Тому кратності відповідних нулів функцій $\frac{1}{\Gamma(\mu_1)} - \lambda l_1(\lambda)$ і

$\frac{1}{\Gamma(\mu_2)} - \lambda l_2(\lambda)$ однакові. Тоді, використовуючи теорему Адамара, одержимо, що цілі функції скінченного порядку $\frac{1}{\Gamma(\mu_i)} - \lambda l_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, задовольняють співвідношення

$$\tfrac{1}{\Gamma(\mu_1)} - \lambda l_1(\lambda) = \exp[p(\lambda)]\big(\tfrac{1}{\Gamma(\mu_2)} - \lambda l_2(\lambda)\big), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

де $p(\lambda)$ — многочлен, степінь якого не перевищує $\max\{\varrho_1, \varrho_2\}$ (позначатимемо надалі степінь многочлена $p(\lambda)$ через $\deg\, p(\lambda)$).

У [12, §§ 2.2–2.3] було встановлено, що коли G є ϱ-опуклою областю, $L \in \mathcal{H}'(G)$, то для кожного $z \in \mathbb{C}$ формулою

$$(f * g)(z) = \Lambda_{\zeta}\left(\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_z}\int\limits_{\gamma_z} f(t)g(\tau)\, \underset{t}{B_{\varrho,\mu}}\, \underset{\tau}{B_{\varrho,\mu}}[h(t,\tau,z,\zeta)]\, d\tau\, dt\right),$$

де $\Lambda(f) = f(0) - L(\mathcal{D}_{\varrho,\mu} f)$, γ_z — деякий замкнений контур, що охоплює z і міститься в G, $B_{\varrho,\mu}$ – оператор узагальненого перетворення Бореля [6, с. 324], а

$$h(t,\tau,z,\zeta) = \frac{E_\varrho(tz;\mu)E_\varrho(\tau\zeta;\mu) - E_\varrho(\tau z;\mu)E_\varrho(t\zeta;\mu)}{t-\tau},$$

визначається неперервна згортка для оператора $\mathcal{I}_{\varrho,\mu} + L$ в $\mathcal{H}(G)$, тобто білінійна, комутативна й асоціативна операція $* : \mathcal{H}(G) \times \mathcal{H}(G) \to \mathcal{H}(G)$, для якої

$$(\mathcal{I}_{\varrho,\mu} + L)(f * g) = [(\mathcal{I}_{\varrho,\mu} + L)f] * g, \qquad f, g \in \mathcal{H}(G).$$

Там же доведено, що оператор $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ є розв'язком операторного рівняння $U(\mathcal{I}_{\varrho,\mu} + L) = (\mathcal{I}_{\varrho,\mu} + L)U$ тоді і лише тоді, коли $Uf = \mathcal{D}_{\varrho,\mu}(\varphi * f)$, де $\varphi = U1$ — фіксована функція з $\mathcal{H}(G)$. Якщо тепер аналогічним чином розв'язувати рівняння (1) у класі лінійних неперервних операторів $T : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$, то, враховуючи (2), для характеристичної функції $t(\lambda, z) = (TE_\lambda^{(1)})(z)$ $(E_\lambda^{(i)}(z) = E_{\varrho_i}(\lambda z; \mu_i)$ $i = 1, 2)$ оператора T матимемо

$$t(\lambda, z) = \exp[p(\lambda)][\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}(\varphi * E_\lambda^{(2)})](z),$$

де $\varphi = T1$ — фіксована функція з $\mathcal{H}(G_2)$.

Таким чином, якщо лінійний неперервний оператор $T : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$ є розв'язком рівняння (1), то його характеристична функція $t(\lambda, z)$ подається у вигляді

$$t(\lambda, z) = \exp[p(\lambda)]t_2(\lambda, z), \tag{3}$$

де $t_2(\lambda, z)$ — характеристична функція деякого оператора $T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_2))$, переставного з оператором $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2} + L_2$. При цьому, для $z \in G_2$

$$(T_2 f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_z} \underset{\lambda}{B_{\varrho_2,\mu_2}}[t_2(\lambda, z)] f(\lambda)\, d\lambda, \qquad f \in \mathcal{H}(G_2),$$

де γ_z — замкнений контур, що лежить в G_2 і охоплює всі особливості узагальненого перетворення Бореля по змінній λ від функції $t_2(\lambda, z)$. Тоді, пригадуючи означення характеристичної функції оператора, одержимо

$$E_{\varrho_1}(\lambda z; \mu_1) = \exp[p(\lambda)] T^{-1} T_2 E_{\varrho_2}(\lambda z; \mu_2), \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ z \in G_1. \tag{4}$$

Аналогічно, якщо виходити з рівняння $T^{-1}(\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2} + L_2) = (\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1} + L_1)T^{-1}$, отримаємо рівність

$$E_{\varrho_2}(\lambda z; \mu_2) = \exp[-p(\lambda)] T T_1 E_{\varrho_1}(\lambda z; \mu_1), \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ z \in G_2, \tag{5}$$

де $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1))$.

Переконаємось тепер, що $\varrho_1 = \varrho_2$. Нехай це не так, тобто $\varrho_1 \neq \varrho_2$. Припустимо, що $\varrho_1 < \varrho_2$. Тоді або $\deg p(\lambda) < \varrho_2$, або $\deg p(\lambda) = \varrho_2$.

Якщо $\deg p(\lambda) < \varrho_2$, то при фіксованому $z \in G_2 \setminus \{0\}$ ліва частина (5) як ціла відносно λ функція має порядок ϱ_2. З іншого боку, враховуючи лінійність і неперервність операторів T_1 і T у відповідних просторах, маємо, що порядок правої частини (5) як цілої відносно λ функції не перевищує $\max\{\deg p(\lambda), \varrho_1\} < \varrho_2$. Отримали суперечність.

Якщо $\deg p(\lambda) = \varrho_2$, то при фіксованому $z \in G_1 \setminus \{0\}$ ліва частина (4) як ціла відносно λ функція має порядок ϱ_1, а порядок правої частини (4) як цілої відносно λ функції дорівнює ϱ_2. Тому і в цьому випадку одержуємо суперечність.

Отже, $\varrho_1 = \varrho_2$. Вважатимемо надалі, що $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$.

Нагадаємо, що для цілої функції $g(\lambda)$ порядку ϱ індикатором $h(\theta; g)$ називається функція [6, с. 328]

$$h(\theta; g) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln |g(re^{i\theta})|}{r^{\varrho}}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Розглянемо два випадки. Нехай $\deg p(\lambda) < \varrho$. Тоді, враховуючи (3), отримаємо, що для кожного фіксованого $z \in G_2$ індикатори цілих відносно λ функцій $t(\lambda, z)$ і $t_2(\lambda, z)$ збігаються, а тому збігаються і ϱ-опуклі оболонки особливостей узагальненого перетворення Бореля цілих відносно λ функцій $t(\lambda, z)$ і $t_2(\lambda, z)$ [6, с. 335–336]. Тому оператор $\tilde{T}$, який визначається рівністю

$$\forall\, z \in G_2 : \ (\tilde{T} f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_z} \underset{\lambda}{B_{\varrho,\mu_2}}[t(\lambda, z)] f(\lambda)\, d\lambda, \qquad f \in \mathcal{H}(G_2), \quad (6)$$

належить до множини $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G_2))$. Оскільки для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ маємо [6, с. 325–326]

$$\tilde{T} E_\varrho(\lambda z; \mu_2) = t(\lambda, z) = T E_\varrho(\lambda z; \mu_1), \qquad z \in G_2,$$

то

$$E_\varrho(\lambda z; \mu_1) = T^{-1} \tilde{T} E_\varrho(\lambda z; \mu_2), \qquad z \in G_2. \quad (7)$$

У [13] було встановлено, що коли G — зіркова відносно нуля область в $\mathbb{C}$, то оператор S, який на елементах повної в $\mathcal{H}(G)$ системи $\{E_\varrho(\lambda z; \mu_1) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ визначається співвідношенням

$$S E_\varrho(\lambda z; \mu_1) = E_\varrho(\lambda z; \mu_2), \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ z \in G,$$

є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$ на себе. Тоді з (7) отримуємо

$$E_\varrho(\lambda z; \mu_1) = T^{-1} \tilde{T} S E_\varrho(\lambda z; \mu_1), \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ z \in G_2. \quad (8)$$

Розглянемо функцію f, для якої G_2 є областю аналітичності, і позначимо $g = T^{-1}(\tilde{T} S f)$. Зрозуміло, що $g \in \mathcal{H}(G_1)$. Враховуючи повноту в $\mathcal{H}(G_2)$ системи $\{E_\varrho(\lambda z; \mu_1) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ та лінійність і неперервність операторів T^{-1}, $\tilde{T}$ і S у відповідних просторах, з (8) для $z \in G_1 \cap G_2$ матимемо $f(z) = (T^{-1} \tilde{T} S f)(z)$, тобто $f(z) \equiv g(z)$, $z \in G_1 \cap G_2$. Звідси одержимо, що f аналітично продовжується в G_1. Оскільки G_2 є областю аналітичності функції f, то $G_2 \supset G_1$. Повністю аналогічно, якщо виходити з рівняння $T^{-1}(\mathcal{I}_{\varrho,\mu_2} + L_2) = (\mathcal{I}_{\varrho,\mu_1} + L_1) T^{-1}$, можна отримати і включення $G_2 \subset G_1$. Отже, у першому випадку області G_1 і G_2 збігаються.

Розглянемо другий випадок. Нехай $\deg p(\lambda) = \varrho$. Використовуючи (3), отримаємо, що для кожного фіксованого $z \in G_2$ індикатори $h_z(\theta; t)$ і $h_z(\theta; t_2)$ цілих відносно λ функцій $t(\lambda, z)$ і $t_2(\lambda, z)$ задовольняють співвідношення

$$h_z(\theta; t) = h_z(\theta; t_2) + \operatorname{Re}(a e^{i\varrho\theta}), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

де a — це коефіцієнт при λ^ϱ у $p(\lambda)$. Нехай $k_\varrho(\theta; G)$ — це ϱ-опорна функція ϱ-опуклої області G [6, с. 334], тобто

$$k_\varrho(\theta; G) = \sup_{\substack{z \in G,\\ |\operatorname{Arg} z - \theta| \le \\ \min\{\pi, \pi/(2\varrho)\}}} \operatorname{Re}(z e^{-i\theta})^\varrho, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Відзначимо, що кожна ϱ-опорна функція ϱ-опуклої області є додатною, 2π-періодичною та ϱ-тригонометрично опуклою, тобто

$$k_\varrho(\theta;G) \le \frac{k_\varrho(\theta_1;G)\sin[\varrho(\theta_2-\theta)] + k_\varrho(\theta_2;G)\sin[\varrho(\theta-\theta_1)]}{\sin[\varrho(\theta_2-\theta_1)]},$$

де $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ і $0 < \theta_2 - \theta_1 < \min\{2\pi, \frac{\pi}{\varrho}\}$. І навпаки, кожна така функція визначає єдину ϱ-опуклу область в $\mathbb{C}$.

Оскільки для кожного $z \in G_2$ замкнена ϱ-опукла оболонка всіх особливостей узагальненого перетворення Бореля функції $t_2(\lambda, z)$ міститься в G_2 [12, § 2.2], то $h_z(-\theta;t_2) < k_\varrho(\theta;G_2)$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} h_z(-\theta;t) < k_\varrho(\theta;G_2) + \mathrm{Re}\,(a\mathrm{e}^{-i\varrho\theta}) <& \\ < \max\{0, k_\varrho(\theta;G_2) + \mathrm{Re}\,(a\mathrm{e}^{-i\varrho\theta})\} + \varepsilon,& \qquad 0 \le \theta \le 2\pi. \end{aligned}$$

Права частина останньої нерівності є додатною, 2π-періодичною та ϱ-тригонометрично опуклою функцією, тому вона визначає деяку ϱ-опуклу область G_ε. Отже, для кожного $z \in G_2$ замкнена ϱ-опукла оболонка всіх особливостей узагальненого перетворення Бореля функції $t(\lambda, z)$ міститься всередині області G_ε. Тому оператор $\tilde{T}$, який визначається рівністю (6), у якій γ_z є замкненим контуром, що лежить в G_ε і охоплює всі особливості функції $\underset{\lambda}{B_{\varrho,\mu_2}}[t(\lambda, z)]$, діє лінійно та неперервно з простору $\mathcal{H}(G_\varepsilon)$ у простір $\mathcal{H}(G_2)$. Оскільки характеристичні функції операторів T і $\tilde{T}$ збігаються, то, як і в першому випадку, матимемо, що $G_\varepsilon \supset G_1$, тобто

$$\max\{0, k_\varrho(\theta;G_2) + \mathrm{Re}\,(a\mathrm{e}^{-i\varrho\theta})\} + \varepsilon \ge k_\varrho(\theta;G_1), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Враховуючи довільність $\varepsilon > 0$ і те, що $k_\varrho(\theta;G_1) > 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$, звідси одержимо нерівність

$$k_\varrho(\theta;G_2) + \mathrm{Re}\,(a\mathrm{e}^{-i\varrho\theta}) \ge k_\varrho(\theta;G_1), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Цілком аналогічними міркуваннями можна отримати, що

$$k_\varrho(\theta;G_1) - \mathrm{Re}\,(a\mathrm{e}^{-i\varrho\theta}) \ge k_\varrho(\theta;G_2), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Отже, ϱ-опорні функції ϱ-опуклих областей G_1 і G_2 задовольняють співвідношення

$$k_\varrho(\theta;G_2) + \mathrm{Re}\,(a\mathrm{e}^{-i\varrho\theta}) = k_\varrho(\theta;G_1), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{9}$$

Таким чином, встановлені необхідні умови наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай для* $i = 1, 2$ *маємо числа* $\varrho_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$ $(\operatorname{Re}\mu_i > 0)$, ϱ_i*-опуклу область* G_i *в* $\mathbb{C}$ *та функціонал* $L_i \in \mathcal{H}'(G_i)$. *Оператор* $\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1} + L_1$ *в* $\mathcal{H}(G_1)$ *еквівалентний до оператора* $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2} + L_2$ *в* $\mathcal{H}(G_2)$ *тоді і лише тоді, коли:*

1) $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$;

2) *для характеристичних функцій* $l_i(\lambda) = L_i(E_\varrho(\lambda z; \mu_i))$ *функціоналів* L_i, $i = 1, 2$, *виконується рівність* (2), *де* $p(\lambda)$ *— многочлен, для якого* $\deg p(\lambda) \le \varrho$;

3) *якщо* $\deg p(\lambda) < \varrho$, *то* $G_1 = G_2$, *а якщо* $\deg p(\lambda) = \varrho$, *то* ϱ*-опорні функції* $k_\varrho(\theta; G_1)$ *і* $k_\varrho(\theta; G_2)$ ϱ*-опуклих областей* G_1 *і* G_2 *пов'язані співвідношенням* (9), *де* a *— це коефіцієнт при* λ^ϱ *у* $p(\lambda)$.

Доведення. Достатність. Нехай виконуються умови 1)–3) теореми. Переконаємося, що існує ізоморфізм $T : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$, який задовольняє рівність (1).

Розглянемо оператор T, який визначається формулою

$$\forall\, z \in G_2: \quad (Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_z} \underset{\lambda}{B_{\varrho,\mu_1}}[\exp[p(\lambda)] E_\varrho(\lambda z; \mu_2)] f(\lambda)\, d\lambda, \qquad f \in \mathcal{H}(G_1),$$

де γ_z — замкнений контур, що лежить в G_1 і охоплює всі особливості функції $\underset{\lambda}{B_{\varrho,\mu_1}}[\exp[p(\lambda)] E_\varrho(\lambda z; \mu_2)]$. У [12, § 2.1] було доведено, що коли G_1 і G_2 — ϱ-опуклі області в $\mathbb{C}$, то функція $t(\lambda, z)$ є характеристичною для деякого лінійного неперервного оператора, що діє з $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$, тоді й лише тоді, коли вона аналітична при $\lambda \in \mathbb{C}$ та $z \in G_2$ і

$$\forall\, K_2 \subset G_2 \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K_1 \subset G_1 \quad \exists\, C > 0 \quad \forall\, r \ge 0 \quad \forall\, \theta \in (-\pi; \pi]: \\ \max_{z \in K_2} |t(re^{-i\theta}, z)| \le C \exp[(k_\varrho(\theta; K_1) + \varepsilon) r^\varrho],$$

де K_1 і K_2 — ϱ-опуклі компактні підмножини відповідних областей. Враховуючи 3) й оцінки для модуля функції Міттаґ–Лефлера [6, с. 337], отримаємо, що функція $\exp[p(\lambda)] E_\varrho(\lambda z; \mu_2)$ задовольняє умови наведеного вище твердження з [12]. Тому T лінійно й неперервно діє з $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$, причому $T E_\varrho(\lambda z; \mu_1) = \exp[p(\lambda)] E_\varrho(\lambda z; \mu_2)$. Оскільки T має лінійний неперервний обернений оператор (його характеристична функція рівна $\exp[-p(\lambda)] E_\varrho(\lambda z; \mu_1)$), то T є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G_1)$ на простір $\mathcal{H}(G_2)$. Перевіримо, що T задовольняє (1). Справді, для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ маємо

$$T(\mathcal{I}_{\varrho,\mu_1} + L_1) E_\varrho(\lambda z; \mu_1) = \tfrac{1}{\lambda} T\big(E_\varrho(\lambda z; \mu_1) - \tfrac{1}{\Gamma(\mu_1)} + \lambda l_1(\lambda)\big) = \\ = \tfrac{1}{\lambda} \Big[\exp[p(\lambda)]\, E_\varrho(\lambda z; \mu_2) - \exp[p(\lambda)] \big(\tfrac{1}{\Gamma(\mu_2)} - \lambda l_2(\lambda)\big)\Big] =$$

$$= \exp[p(\lambda)]\tfrac{1}{\lambda}\big(E_\varrho(\lambda z;\mu_2) - \tfrac{1}{\Gamma(\mu_2)}\big) + \exp[p(\lambda)]l_2(\lambda) =$$
$$= (\mathcal{I}_{\varrho,\mu_2} + L_2)[\exp[p(\lambda)]\, E_\varrho(\lambda z;\mu_2)] = (\mathcal{I}_{\varrho,\mu_2} + L_2)TE_\varrho(\lambda z;\mu_1),$$

звідки і випливає (1), оскільки система $\{E_\varrho(\lambda z;\mu_1) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ є повною в $\mathcal{H}(G_1)$, а оператори T, $\mathcal{I}_{\varrho,\mu_i} + L_i$, $i = 1,2$ є лінійними і неперервними у відповідних просторах. Теорему доведено. $\square$

Зауваження. Відзначимо, що коли $\varrho \in \mathbb{N}$ і області G_1 та G_2 є інваріантними відносно повороту на кут $\frac{2\pi}{\varrho}$ навколо 0, то рівність (9) рівносильна наступному співвідношенню між областями: $G_2^\varrho + a = G_1^\varrho$.

3. Розглянемо для $i = 1,2$ числа $\varrho_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}\mu_i > 0$) та ϱ_i-опуклу область G_i в $\mathbb{C}$. Припустимо, що оператори $\mathcal{D}_{\varrho_1,\mu_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1))$ та $\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_2))$ є еквівалентними, тобто існує такий ізоморфізм $T : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$, що

$$T\mathcal{D}_{\varrho_1,\mu_1} = \mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}T. \tag{10}$$

Подіємо обома частинами цієї рівності на функцію $E_\lambda^{(1)}(z) = E_{\varrho_1}(\lambda z;\mu_1)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Тоді для характеристичної функції $t(\lambda, z) = (TE_\lambda^{(1)})(z)$ оператора T одержимо

$$\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}t(\lambda,z) = \lambda t(\lambda,z), \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ z \in G_2.$$

Звідси, враховуючи співвідношення

$$\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}f(z) = f(z) - f(0), \qquad f \in \mathcal{H}(G_2),$$

отримаємо

$$(E - \lambda\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2})t(\lambda,z) = c(\lambda), \tag{11}$$

де E — тотожний оператор в $\mathcal{H}(G_2)$, а $c(\lambda) = t(\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тоді, використовуючи формулу

$$(E - \lambda\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{I}^n_{\varrho_2,\mu_2},$$

з (11) матимемо

$$t(\lambda,z) = c(\lambda)\Gamma(\mu_2)E_{\varrho_2}(\lambda z;\mu_2), \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ z \in G_2.$$

Оскільки оператор T є лінійним та неперервним, то порядок цілої функції $c(\lambda) = t(\lambda,0) = TE_{\varrho_1}(\lambda z;\mu_1)|_{z=0}$ не перевищує ϱ_1. Крім цього, оператор T не має нетривіальних нулів (бо він є ізоморфізмом), а тому функція $c(\lambda)$ не має нулів у $\mathbb{C}$. Отже,

$$c(\lambda)\Gamma(\mu_2) = \exp[p(\lambda)], \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

де $p(\lambda)$ — деякий многочлен, причому $\deg p(\lambda) \le \varrho_1$. Тому

$$t(\lambda, z) = \exp[p(\lambda)]E_{\varrho_2}(\lambda z; \mu_2), \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ z \in G_2. \tag{12}$$

Оскільки для фіксованого $z \in G_2 \setminus \{0\}$ порядок лівої частини цієї рівності як цілої відносно λ функції не перевищує ϱ_1, а порядок правої частини як цілої відносно λ функції дорівнює $\max\{\deg p(\lambda), \varrho_2\}$, то з (12) одержуємо, що $\varrho_2 \le \varrho_1$.

Якщо тепер замість рівності (10) виходити з рівності $T^{-1}\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2} = \mathcal{D}_{\varrho_1,\mu_1}T^{-1}$, то аналогічними міркуваннями можна отримати, що $\varrho_1 \le \varrho_2$.

Таким чином, якщо оператори $\mathcal{D}_{\varrho_1,\mu_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_1))$ та $\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G_2))$ еквівалентні, то $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$. Крім цього, якщо пригадати означення характеристичної функції $t(\lambda, z)$ та ізоморфізму S із попереднього пункту, то формулу (12) можна записати у вигляді

$$TE_\varrho(\lambda z; \mu_1) = \exp[p(\lambda)]SE_\varrho(\lambda z; \mu_1), \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ z \in G_2, \tag{13}$$

де $p(\lambda)$ — многочлен, причому $\deg p(\lambda) \le \varrho$.

Враховуючи подібність рівностей (13) і (3), як і в попередньому пункті отримуємо, що коли $\deg p(\lambda) < \varrho$, то $G_1 = G_2$, а коли $\deg p(\lambda) = \varrho$, то ϱ-опорні функції $k_\varrho(\theta; G_1)$ і $k_\varrho(\theta; G_2)$ ϱ-опуклих областей G_1 і G_2 задовольняють співвідношення

$$k_\varrho(\theta; G_2) + \mathrm{Re}\,(a\mathrm{e}^{-i\varrho\theta}) = k_\varrho(\theta; G_1), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{14}$$

де a — це коефіцієнт при λ^ϱ у $p(\lambda)$.

Отже, встановлені необхідні умови наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай $\varrho_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}\,\mu_i > 0)$, G_i — ϱ_i-опукла область в $\mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$. Оператор $\mathcal{D}_{\varrho_1,\mu_1}$ в $\mathcal{H}(G_1)$ еквівалентний до оператора $\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}$ в $\mathcal{H}(G_2)$ тоді і лише тоді, коли $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ і або $G_1 = G_2$ (якщо $\varrho \notin \mathbb{N}$), або існує таке $a \in \mathbb{C}$, що ϱ-опорні функції $k_\varrho(\theta; G_1)$ і $k_\varrho(\theta; G_2)$ ϱ-опуклих областей G_1 і G_2 пов'язані співвідношенням* (14) *(якщо $\varrho \in \mathbb{N}$).*

Доведення. Достатність. Нехай $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ і

$$\exists\, a \in \mathbb{C}: \quad k_\varrho(\theta; G_2) + \mathrm{Re}\,(a\mathrm{e}^{-i\varrho\theta}) = k_\varrho(\theta; G_1) \tag{15}$$

($a = 0$ при $\varrho \notin \mathbb{N}$). Розглянемо оператор T, який визначається формулою

$$\forall\, z \in G_2: \quad (Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_z} \underset{\lambda}{B_{\varrho,\mu_1}}[\exp(a\lambda^\varrho) E_\varrho(\lambda z; \mu_2)] f(\lambda)\, d\lambda, \qquad f \in \mathcal{H}(G_1),$$

де γ_z — замкнений контур, що лежить в G_1 і охоплює всі особливості функції $\underset{\lambda}{B_{\varrho,\mu_1}}[\exp(a\lambda^\varrho) E_\varrho(\lambda z; \mu_2)]$. Враховуючи (15), як і при доведенні достатності теореми 1 отримаємо, що T лінійно й неперервно діє з $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$, причому $TE_\varrho(\lambda z; \mu_1) = \exp(a\lambda^\varrho) E_\varrho(\lambda z; \mu_2)$. Оскільки T має лінійний неперервний обернений оператор (його характеристичною функцією є $\exp(-a\lambda^\varrho) E_\varrho(\lambda z; \mu_1)$), то T є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G_1)$ на простір $\mathcal{H}(G_2)$. Переконаємось, що T задовольняє (10). Справді, для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ маємо

$$\begin{aligned} T\mathcal{D}_{\varrho,\mu_1} E_\varrho(\lambda z; \mu_1) &= \lambda T E_\varrho(\lambda z; \mu_1) = \\ &= \lambda \exp(a\lambda^\varrho) E_\varrho(\lambda z; \mu_2) = \exp(a\lambda^\varrho) \mathcal{D}_{\varrho,\mu_2} E_\varrho(\lambda z; \mu_2) = \\ &= \mathcal{D}_{\varrho,\mu_2}[\exp(a\lambda^\varrho) E_\varrho(\lambda z; \mu_2)] = \mathcal{D}_{\varrho,\mu_2} T E_\varrho(\lambda z; \mu_1). \end{aligned}$$

Звідси, оскільки система $\{E_\varrho(\lambda z; \mu_1) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ — повна в $\mathcal{H}(G_1)$, а оператори T, $\mathcal{D}_{\varrho,\mu_1}$ і $\mathcal{D}_{\varrho,\mu_2}$ — лінійні й неперервні у відповідних просторах, випливає співвідношення (10). Теорему доведено. $\square$

Література

[1] М. К. Фаге, Н. И. Нагнибида, *Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов.* Новосибирск: Наука, 1987, 280 с.

[2] М. І. Нагнибіда, С. С. Лінчук, Т. І. Звоздецький, *Про деякі властивості операторів, які є правими оберненими до диференціювання, в просторі аналітичних функцій* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. Київ, Ін-т математики НАН України, **13** (1996), 148–164.

[3] I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova, *Convolution and commutant of Gelfond-Leontiev operator of integration* // Конструктивная теория функций: Труды междунар. конф. (Варна, 1-5 июня, 1981). София, 1983, 288–294.

[4] А. О. Гельфонд, А. Ф. Леонтьев, *Об одном обобщении ряда Фурье* // Матем. сб. **29** (1951), N 3, 477–500.

[5] Н. Е. Линчук, *Представление решений некоторых операторных уравнений в аналитических пространствах и их применения.* Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Киев, 1987, 121 с.

[6] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* М.: Наука, 1966, 671 с.

[7] Т. І. Звоздецький, *Про еквівалентність операторів, які є правими оберненими до узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва* // Мат. студії, **6** (1996), 105–112.

[8] Т. І. Звоздецький, *Еквівалентність двох операторів узагальненого інтегрування у просторі аналітичних функцій* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 160. Математика, Чернівці: Рута, 2003, 73–75.

[9] В. А. Ткаченко, *Об операторах, коммутирующих с обобщенным дифференцированием, в пространствах аналитических функционалов с заданным индикатором роста* // Матем. сб. **102 (144)** (1977), N 3, 435–456.

[10] Т. І. Звоздецький, *Про ізоморфізми, які є переставними з оператором узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. Київ, Ін-т математики НАН України, **10** (1995), 243–248.

[11] Н. Е. Линчук, *Сверточное представление некоторых классов операторов, связанных с умножением на аналитические функции, и их применения* // Укр. мат. журн. **36** (1984), N 5, 626–631.

[12] Т. І. Звоздецький, *Деякі операторні рівняння, що пов'язані з узагальненим інтегруванням, та згортки в просторах аналітичних функцій.* Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. Чернівці, 1996, 135 с.

[13] Н. Е. Линчук, *Представление коммутантов оператора обобщенного интегрирования Гельфонда–Леонтьева* // Изв. вузов. Математика. (1985), N 5, 72–74.

Відомості про авторів

Тарас Іванович Звоздецький

Кафедра математичного аналізу,
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2,
58012, Чернівці,
Україна
E-Mail: `mathan@chnu.cv.ua`