Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 4, 482 – 489

О бесконечной дифференцируемости решений одной краевой задачи для полигармонического уравнения в угловой области

Рамзет Джафаров

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Устанавливается бесконечная дифференцируемость решения в областях, допускающих отражение на все пространство.

2001 MSC. 35G15.

Ключевые слова и фразы. Функция Грина, бесконечная дифференцируемость.

1. Введение

Хорошо известно, что наличие сингулярной точки на границе области, в которой рассматривается задача, существенно ухудшает дифференциальные свойства решения. Рассматривая уравнение Лапласа, Е. А. Волков в [1] показал, что если величина угла сектора равна $\frac{\pi}{m}$, $m = 1, 2, \ldots$, то решение задачи Дирихле, с нулевыми граничными значениями на сторонах угла, будет принадлежать классу C^∞. При ненулевых граничных значениях, согласованных соответствующим образом в угловой точке, гладкость решения будет определяться гладкостью граничных функций.

Этот результат обобщен А. Аззамом [7] в случае следующего уравнения

$$\Delta u + a(x)u_x + b(x)u_y + c(x)u = f.$$

В работе [3] рассматривалась задача Дирихле для бигармонического уравнения с нулевыми граничными значениями на некотором участке границы, прилегающем к угловой точке. Было доказано, что углов, при которых решение этой задачи является бесконечно дифференцируемым, не существует, кроме угла π.

Статья поступила в редакцию 30.05.2004

В плоском угле Ω будем рассматривать задачу

$$\Delta^n u = f, \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial^{2i} u}{\partial \nu^{2i}} = 0, \qquad i = \overline{1, n-1}, \quad x \in \partial\Omega \setminus \{0\}, \tag{2}$$

где ν — вектор нормали.

При $n = 2$ эта задача носит название задачи о свободно опертой пластинке.

Используя метод построения функции Грина, развитый в [4–6], мы покажем, что в углах $\frac{\pi}{m}$, $m = 2, 3, \ldots$, эта задача имеет бесконечно дифференцируемое решение, если $f \in C_0^\infty$.

Будем предполагать, что решение обращается в нуль вне B_{R_1} — круга радиуса R_1 с центром в начале координат.

Будем обозначать через $C^N(\Omega)$ пространство функций непрерывно дифференцируемых N раз включительно в Ω; пространсто Гельдера $C^{N+\gamma}(\Omega)$ определяется как подпространство $C^N(\Omega)$, состоящее из функций, производные которых порядка N равномерно непрерывны по Гельдеру с показателем $\gamma \in (0, 1)$ на Ω.

2. Результат, его доказательство

Предположим, что вершина угла находится в начале координат, стороны его совпадают с осью абсцисс и с прямой $x_2 = x_1 \tan \alpha\pi$, а сам угол расположен в положительном квадранте, т. е. $\alpha \le \frac{1}{2}$.

Теорема 1. *Пусть $f \in C_0^\infty(\Omega \bigcap B_{R_1})$, $\alpha = \frac{1}{m}$, $m = 2, 3, \ldots$. Тогда решение задачи* (1), (2) *и принадлежит $C^\infty(\Omega')$, где $\Omega' = \Omega \bigcap B_R$ (B_R — круг радиуса $R > R_1$ с центром в начале координат). Кроме того, справедлива оценка*

$$\|u\|_{C^{N+2n-1+\gamma}(\Omega')} \le C \, \|f\|_{C^{N+\gamma}(\Omega')},$$

где N — произвольное натуральное число, а C — константа, не зависящая от u.

Доказательство. Построим вначале функцию Грина задачи (1), (2). В работах [4–6] предложен метод построения функции Грина для циклически чередующихся в процессе отражений областей. Угол величины $\frac{\pi}{m}$ является примером такой области. Если этот угол отложить, к примеру, $2m + 1$ раз, то угол, заключенный между лучами 2π и $2\pi + \frac{\pi}{m}$ совпадет с исходным углом. Этого же можно добиться с помощью отражений.

Фундаментальное решение полигармонического оператора, приведенное в [2], имеет вид

$$\Gamma_n(x,\xi) = C_n|x-\xi|^{2n-2}\ln|x-\xi|.$$

Индекс n в Γ_n будем в дальнейшем опускать. При $\alpha = \frac{1}{2m}$, $m = 1, 2, \ldots$ функция Грина будет иметь такой вид

$$G(x,\xi) = \sum_{i=0}^{4m-1} (-1)^i \Gamma(x,\xi_i),$$

$$\xi_i = \Big(\rho, \frac{\pi}{2m}\Big[i + \frac{1-(-1)^i}{2}\Big] + (-1)^i\phi_0\Big),$$

где (ρ,ϕ_0) — полярные координаты точки $\xi = \xi_0$.

Вид оператора, определяющего функцию Грина, совпадает с оператором-эффектом (в терминологии [4]) задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Покажем, что эта функция удовлетворяет граничным условиям (2).

Точки ξ_i и ξ_{4m-1-i}, $i = \overline{0, 2m-1}$ являются сопряженными (зеркально отраженными) точками относительно оси $x_2 = 0$. Поэтому $\Gamma(x,\xi_i) = \Gamma(x,\xi_{4m-1-i})$, при $x_2 = 0$. i и $4m-1-i$ имеют различную четность и потому входят в сумму, опеределяющую $G(x,\xi)$, с разными знаками. Так,

$$G(x,\xi) = 0 \quad \text{на} \;\; x_2 = 0.$$

Точки ξ_{i+1} и $\xi_{4m-i \mod 4m}$, $i = 0, \overline{2m-1}$ (где $p \mod q$ — остаток от деления p на q) сопряжены относительно $x_2 = x_1 \tan\frac{\pi}{2m}$ и потому

$$G(x,\xi) = 0 \quad \text{на} \;\; x_2 = x_1 \tan\frac{\pi}{2m}.$$

Условие

$$\frac{\partial^{2i} G}{\partial \nu^{2i}} = 0, \qquad i = \overline{1, n-1}$$

на сторонах угла проверяется аналогично. Для этого надо заметить, что

$$\triangle^i(r^p \ln r) = A_i r^{p-2i}\ln r + B_i r^{p-2i},$$

где A_i, B_i определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$A_1 = p^2, \quad B_1 = 2p,$$

$$A_{i+1} = (p-2i)A_i,$$

$$B_{i+1} = 2(p-2i)A_i + (p-2i)^2 B_i.$$

Заметим также, что производные по касательным к сторонам угла направлениям равны нулю и потому $\frac{\partial^{2i}G}{\partial\nu^{2i}} = \triangle^i G$.
Далее, проводя те же рассуждения, что и при доказательстве условия $G(x,\xi)=0$, получим, что $\frac{\partial^{2i}G}{\partial\nu^{2i}} = 0$ на обеих сторонах угла.

При $\alpha = \frac{1}{2m+1}$, $\quad m = 1, 2, \ldots$ разрежем две плоскости по лучу 2π и склеим их так, что луч 2π одной из них совпадет с нулевым лучем другой.

Функция Грина в этом случае

$$G(x,\xi) = \sum_{i=0}^{2m+1} (-1)^i [\Gamma(x,\xi_i) - \Gamma(x,\tilde{\xi}_i)],$$

где

$$\xi_i = \left(\rho, \frac{2\pi}{2m+1}\left[i + \frac{1-(-1)^i}{2}\right] + (-1)^i\phi_0\right),$$

$$\tilde{\xi}_i = \left(\rho, 4\pi + \frac{2\pi}{2m+1}\left[1 - i - \frac{1-(-1)^i}{2}\right] - (-1)^i\phi_0\right), \quad i = \overline{0, 2m+1}.$$

Проверка граничных условий в этом случае такая же, как и для угла $\frac{\pi}{2m}$.

Непосредственно из формулы Грина для полигармонического оператора и определения фундаментального решения следует интегральное представление функции класса C^{2n} в области Ω',

$$u(\xi) = \int_{\Omega'} G(x,\xi)\Delta^n u(x)\,dx -$$
$$- \sum_{i=0}^{n-1} \int_S \triangle^i G(x,\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial\nu}\Delta^{n-i-1}u(x)\,dS +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \int_S \frac{\partial}{\partial\nu}\triangle^i G(x,\xi) \cdot \Delta^{n-i-1}u(x)\,dS,$$

где S — граница области Ω'. Поэтому, в наших предположениях, поскольку на той части границы S, что образована дугой окружности радиуса R, u обращается в нуль, решение задачи (1)-(2) представляется следующим образом

$$u(\xi) = \int_{\Omega'} G(x,\xi) f(x) dx.$$

Продолжим f нулем на всю плоскость. Рассмотрим, например, производную $\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}$. Так как G зависит от разности своих аргументов, то, не вводя новых обозначений, будем писать $G(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)$:

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} = \int\limits_{\Omega'} \frac{\partial G(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)}{\partial \xi_1} f(x)\,dx = \\ = \int\limits_{R^2} \frac{\partial G(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)}{\partial \xi_1} f(x)\,dx = \\ = -\int\limits_{R^2} \frac{\partial G(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)}{\partial (x-\xi_1)} f(x)\,dx.$$

Сделаем замену $y = x_1 - \xi_1$ и проинтегрируем по частям

$$\int\limits_{R^2} \frac{\partial G(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)}{\partial (x_1-\xi_1)} f(x)\,dx_1\,dx_2 = \\ = \int\limits_{R^2} \frac{\partial G(y, x_2-\xi_2)}{\partial y} f(y+\xi_1, x_2)\,dy\,dx_2 = \\ = -\int\limits_{R^2} G(y, x_2-\xi_2) \frac{\partial f(y+\xi_1, x_2)}{\partial y}\,dy\,dx_2.$$

Сделав обратную замену, получим

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} = \int\limits_{R^2} G(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2) \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\,dx.$$

Аналогично выражается производная $\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}$. Тогда производная s-го порядка

$$\frac{\partial^s u(\xi)}{\partial \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2}} = \int\limits_{R^2} G(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2) \frac{\partial^s f(x)}{\partial x_1^{s_1} x_2^{s_2}}\,dx. \tag{3}$$

Непосредственно из вида функции G следует оценка в ограниченной области

$$\left|\frac{\partial^s G(\xi, x)}{\partial \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2}}\right| \le C \mid x - \xi \mid^{2n-2-s}. \tag{4}$$

Покажем, как гельдерова полунорма u может быть выражена через гельдерову полунорму f:

$$\frac{\frac{\partial^s u(\xi)}{\partial \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2}} - \frac{\partial^s u(\xi')}{\partial \xi_1^{s_1} \xi_2^{s_2}}}{|\xi - \xi'|} = \frac{1}{|\xi - \xi'|^\gamma} \left(\int\limits_{R^2} \frac{\partial^s G(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)}{\partial \xi_1^{s_1} \partial \xi_2^{s_2}} f(x)\,dx_1\,dx_2 - \right.$$

$$-\int\limits_{R^2}\frac{\partial^s G(x_1-\xi_1',x_2-\xi_2')}{\partial\xi_1^{s_1}\partial\xi_2^{s_2}}f(x)\,dx_1\,dx_2\Bigg).$$

Сделаем в интегралах замены: $y = x_1 - \xi_1$ и $z = x_2 - \xi_2$ в первом; $y = x_1 - \xi_1{}'$ и $z = x_2 - \xi_2{}'$ во втором. После этого воспользуемся интегрированием по частям и проведем обратные замены переменных:

$$\frac{\frac{\partial^s u(\xi)}{\partial\xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}}-\frac{\partial^s u(\xi')}{\partial\xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}}}{|\xi-\xi'|} = \frac{1}{|\xi-\xi'|^\gamma}\Bigg((-1)^s\int\limits_{R^2}\frac{\partial^s G(y,z)}{\partial y^{s_1}\partial z^{s_2}}f(y+\xi_1,z+\xi_2)\,dy\,dz-$$

$$-(-1)^s\int\limits_{R^2}\frac{\partial^s G(y,z)}{\partial y^{s_1}\partial z^{s_2}}f(y+\xi_1{}',z+\xi_2{}')\,dy\,dz\Bigg)=$$

$$=\frac{1}{|\xi-\xi'|^\gamma}\int\limits_{R^2}G(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)\Big[\frac{\partial^s}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}}f(x_1,x_2)-$$

$$-\frac{\partial^s}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}}f(x_1+\xi_1{}'-\xi_1,x_2+\xi_2{}'-\xi_2)\Big]dx_1\,dx_2. \quad (5)$$

Теперь из (3),(4),(5) вытекает

$$\|u\|_{C^{N+2n-1+\gamma}(\Omega')} \le C\,\|f\|_{C^{N+\gamma}(\Omega')},$$

откуда, в силу произвольности N следует утверждение теоремы. □

Заметим, что для углов $\frac{p}{q}\pi$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, функция Грина для задачи (1)–(2) также может быть построена. Для этого построения необходимо использовать $2p$-листную риманову поверхность.

В области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, образованной пересечением двух шаров B_- и B_+

$$x_1^2+x_2^2+(x_3-\alpha_-)^2\le a_- \quad \text{и} \quad x_1^2+x_2^2+(x_3-\alpha_+)^2\le a_+,$$

рассмотрим задачу

$$\Delta u = f, \qquad x\in\Omega,$$
$$u = 0, \qquad x\in\partial\Omega.$$

Предположим, что сферы $\dot B_-$ и $\dot B_+$ пересекаются под углом $\frac{\pi}{m}$, $m = 2,3\dots$. Случай касания исключим из рассмотрения.

Функция Грина в этом случае построена в работе [4].

$$G(x,\xi)=\Gamma(x,\xi)+\sum_{s=-m}^{-1}(AB)_s\Gamma(x,\xi^s)+\sum_{s=1}^{m}(AB)_s\Gamma(x,\xi^s),$$

где $\Gamma(x,\xi)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа;

$$(AB)_s = \prod_{k=1}^{b_s} \aleph_{\xi^{1-2k-\frac{1+(-1)^s}{2}}} \aleph_{\xi^{2k-\frac{1-(-1)^s}{2}}} [\aleph_{\xi^s}]^{a_s-b_s}, \qquad \text{при } (-1)^{s+1}s<0;$$

$$(AB)_s = \prod_{k=1}^{a_s} \aleph_{\xi^{2k-\frac{1-(-1)^s}{2}}} \aleph_{\xi^{1-2k-\frac{1+(-1)^s}{2}}} [\aleph_{\xi^s}]^{b_s-a_s}, \qquad \text{при } (-1)^{s+1}s>0;$$

$$a_s = \frac{1}{2}\{|s| - \frac{1}{2}[1-(-1)^s]\operatorname{sign} s\};$$

$$b_s = \frac{1}{2}\{|s| + \frac{1}{2}[1-(-1)^s]\operatorname{sign} s\};$$

ξ^s — суперпозиция s чередующихся инверсий относительно сфер $\dot{B}_-$ и $\dot{B}_+$, причем, если $s<0$, то первая инверсия в суперпозиции отображений относительно сферы $\dot{B}_-$, если $s>0$, то первая инверсия относительно сферы $\dot{B}_+$:

$$\aleph_{\xi^{-s}} = -\frac{a_-}{\sqrt{S_-(\xi^{s-1})}}, \quad s>0;$$

$$\aleph_{\xi^{s}} = -\frac{a_+}{\sqrt{S_+(\xi^{-s+1})}}, \quad s<0;$$

$$S_\pm(x) = x_1^2 + x_2^2 + (x_3-\alpha_\pm)^2.$$

По той же схеме, что и при доказательстве теоремы 1, получим

Теорема 2. *Пусть $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и справедлива оценка*

$$\|u\|_{C^{N+1+\gamma}(\Omega)} \le C\,\|f\|_{C^{N+\gamma}(\Omega)},$$

где N — произвольное натуральное число.

Замечание 1. Хотя для углов $\frac{p}{q}\pi$ или в случае пересечения сфер под углом $\frac{p}{q}\pi$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, функция Грина может быть построена, однако результат о регулярности решения, как в теоремах 1 и 2, мы доказать не можем.

Литература

[1] Е. А. Волков, *О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа на многоугольниках* // Труды математического института им. Стеклова. **77** (1965), 113–142.

[2] И. М. Гельфанд, И. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Вып. **1**. М., Изд. физ.-мат. лит., 1958, 439 с.

[3] В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками* // Труды Московского математического общества. **16** (1967), 219–292.

[4] А. Ф. Шестопал, *Метод разложения по фундаментальным решениям в применении к задачам математической физики.* Дис. доктора физ.-мат. наук. Киев, 1969, 394 с.

[5] А. Ф. Шестопал, *Разложения по фундаментальным решениям эллиптических операторов.* Киев, "Наукова думка", 1968, 206 с.

[6] А. Ф. Шестопал, *Применение метода отражений к некоторым бигармоническим задачам* // Украинский математический журнал. **13** (1961), No 1, 80–90.

[7] A. Azzam, *On Differentiability Properties of Solutions of Elliptic Differential Equations* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. **75** (1980), 431–440.

Сведения об авторах

Рамзет Джафаров Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
Р. Люксембург 74,
83114, Донецк,
Украина
E-Mail: dzhafarov@ukr.net