Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 4, 445 – 462

# Система гіперболічних варіаційних нерівностей першого порядку

Наталія І. Гузіль, Сергій П. Лавренюк

(*Представлена С. Д. Ивасишеним*)

**Анотація.** Досліджено нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\left(u_t+\sum_{i=1}^{l}A_i(x,t)u_{x_i}+C(x,t)u+g(u)-f(x,t),v-u\right)dx\,dt\ge 0,$$

$\tau\in(0,T]$, з початковою умовою $u(x,0)=u_0(x)$, де $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^m$, $A_i$, $C$ — квадратні матриці порядку $m$, $g=\operatorname{col}(g_1,\dots,g_m)$, $u=\operatorname{col}(u_1,\dots,u_m)$, $f=\operatorname{col}(f_1,\dots,f_m)$, $v=\operatorname{col}(v_1,\dots,v_m)$, в обмеженій області $Q=\Omega\times(0,T)$.

**2000 MSC.** 35L85.

**Ключові слова та фрази.** Гіперболічна варіаційна нерівність.

Варіаційні нерівності для гіперболічних диференціальних операторів другого порядку досліджували багато авторів [1–13]. Зокрема, у працях [2–6] розглянуто деякі односторонні задачі для строго гіперболічних операторів

$$L_1u\equiv a_0(u)u_{tt}-\sum_{i=1}^{n}(a_i(u_{x_i}))_{x_i}+f(x,t,u,u_t),\qquad a_0>0,$$

$$L_2u\equiv u_{tt}-a(u)\Delta u+f(x,t,u,u_t),\qquad a(s)>0$$

в обмеженій області $Q_T=\Omega\times(0,T)$, а в [7,8] в області такого ж вигляду односторонні задачі досліджено для нелокального квазілінійного гіперболічного оператора

$$L_3u\equiv u_{tt}-(-1)^m a\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u|^2\,dx\right)\Delta_x^m u+f(x,t),\qquad m\ge 1.$$

*Стаття надійшла в редакцію* 7.10.2004

ISSN 1810 – 3200. 

У праці [9] вивчено односторонню задачу в обмеженій області для системи квазілінійних гіперболічних нерівностей вигляду

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)})\Delta u + \delta\, |u_t|^\rho\, u_t \geq \mu\, |u|^\rho\, u,$$

$M(s) = a + bs, \quad a + b \geq 0, \quad b \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \rho \geq 0, \quad \delta > 0, \quad \mu \in \mathrm{R}.$

У [10] доведено однозначну розв'язність односторонньої задачі в обмеженій області для так званого сильно збуреного нелінійного гіперболічного оператора третього порядку

$$Lu \equiv k(u)u_{tt} - \Delta u - \sum_{i=1}^{n} (\omega_i(\nabla u_t))_{x_i} + f(u_t) - g(x,t),$$

де $\omega_i$ — нелінійні функції, і розв'язність односторонньої задачі для нелінійного рівняння $k(u_t)u_{tt} - \Delta u - \sum_{i=1}^{n} (\omega_i(\nabla u_t))_{x_i} + f(u_t) = g(x,t)$. Аналогічні проблеми вивчено для односторонніх задач з виродженим гіперболічним оператором $k(u_t)u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)$ в $Q_T = (0,T)\times(0,1)$, $k(s) \geq 0$ у праці [11].

Деякі результати існування та єдиності розв'язків гіперболічних варіаційних нерівностей одержано і для необмежених областей. Так у праці [12] в необмеженому за $t$ циліндрі $(0,\infty) \times \Omega$ розглянуто односторонню задачу з обмеженням $|u(x,t)| \leq \varphi(t)$ для рівняння $u_{tt} - \Delta u + a(u) = f$, а в [5] — одностороння задача з обмеженням $|u_{xt}| \leq \theta(t)$ для рівняння $u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t + f(x,t,u) = 0$. Лінійні гіперболічні варіаційні нерівності у півпросторі $(x,t) \in \mathrm{R}^n_+ \times \mathrm{R}$ і їхню фізичну інтерпретацію вивчено в [13].

У цій праці досліджено систему гіперболічних варіаційних нерівностей першого порядку. Зазначимо, що задачу для відповідної гіперболічної системи розглянуто, зокрема, у монографії [1].

Нехай $\Omega$ — обмежена область в $\mathbb{R}^l$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega, 0 < t < \tau\}$, $\tau \in (0,T]$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$.

Розглянемо нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \left( u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} + C(x,t)u + g(u) - f(x,t), v - u \right) dx\, dt \geq 0, \quad (1)$$

$\tau \in (0,T]$, з початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x), \quad (2)$$

де $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^m$, $A_i(x,t) = [a^i_{ks}(x,t)]_{m\times m}$, $C(x,t) = [c_{ks}(x,t)]_{m\times m}$, $g = \mathrm{col}(g_1,\ldots,g_m)$, $u = \mathrm{col}(u_1,\ldots,u_m)$, $f = \mathrm{col}(f_1,\ldots,f_m)$, $v = \mathrm{col}(v_1,\ldots,v_m)$.

Припустимо, що виконуються відповідно умови:
(**A**): елементи матриць $A_i$ належать до простору $C(\overline{Q}_T)$, елементи матриць $A_{ix_j}, A_{it}$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$ для всіх $i,j = 1,\dots,l$;
$A_i(x,t) = A_i^*(x,t), i = 1,\dots,l$ для всіх $(x,t) \in Q_T$ (* позначає транспонування матриці);
(**C**): елементи матриці $C$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$;
(**G**): функції $g$ є неперервними в $\mathbb{R}^m$ й існує така невід'ємна стала $g_1$, що для довільних $\xi \in \mathbb{R}^m$ виконуються нерівності

$$|g_i(\xi)| \leq g_1 \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^{p-1}, \qquad i = 1,\dots,m, \quad p > 1,$$

$$(g(\xi),\xi) \geq 0;$$

елементи матриці $G$ є неперервними в $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ і $(G(\eta)\xi,\xi) \geq 0$ для всіх $\eta,\xi \subset \mathbb{R}^m$, де

$$G(\eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial g_1(\eta)}{\partial \eta_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m(\eta)}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial g_m(\eta)}{\partial \eta_m} \end{bmatrix}.$$

Позначимо через $S_\tau^1$ множину точок поверхні $S_\tau = \partial\Omega \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$, для яких

$$\sum_{i=1}^{l} (A_i(x,t)\cos(\nu,x_i)\xi,\xi) < 0$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, через $S_\tau^2$ множину тих точок поверхні $S_\tau$, для яких

$$\sum_{i=1}^{l} (A_i(x,t)\cos(\nu,x_i)\xi,\xi) \geq 0$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$, де $\nu$ є зовнішньою нормаллю до $\partial\Omega$.

Введемо простір

$$V_1(Q_T) = \{u : u \in H^1(Q_T), u|_{S_T^1} = 0\}.$$

Нехай $\mathcal{K} = \{u : u \in (L^2(\Omega))^m,\ \mathcal{B}(u) = 0\}$, де оператор $\mathcal{B} : (L^2(\Omega))^m \to (L^2(\Omega))^m$, $\mathcal{B}(u) = \mathrm{col}(\alpha_1 u_1^-,\dots,\alpha_m u_m^-)$, $\alpha_i = 0$ або $1$, $i = 1,\dots,m$ й існує принаймні одне таке $j \in \{1,\dots,m\}$, що $\alpha_j = 1$,

$$u^-(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \geq 0, \\ -u(x), & u(x) < 0. \end{cases}$$

Нехай $q = \max\{2,p\}$, $q' = q/(q-1)$, $p' = p/(p-1)$, $J$ — множина чисел $j \in \{1,\dots,m\}$, для яких $\alpha_j = 1$.

Позначимо через $\mathcal{K}_1$ множину тих елементів $u \in \mathcal{K}$, для яких $u_j = 0$ при $j \in J$.

**Означення 1.** *Функцію $u$, яка задовольняє включення $u \in (V_1(Q_T) \cap L^p(Q_T))^m$, $u \in \mathcal{K}$ майже для всіх $t \in (0,T)$, нерівність* (1) *для всіх $\tau \in (0,T]$ та для всіх $v \in (L^q(Q_T))^m$, $v \in \mathcal{K}$ майже для всіх $t \in (0,T)$ і початкову умову* (2)*, називатимемо сильним розв'язком задачі* (1)*,* (2)*.*

Говоритимемо, що поверхня $S_T$ задовольняє умову ($\mathbf{S}$), якщо
($\mathbf{S}$): $S_T^1 = \Gamma_1 \times (0,T)$, $\quad S_T^2 = \Gamma_2 \times (0,T)$, $\quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови* ($\mathbf{A}$), ($\mathbf{C}$), ($\mathbf{G}$), ($\mathbf{S}$), *елементи матриць $C_t$, $C_{x_i}$, $i = 1,\ldots,l$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$, $u_0 \in (L^{2p-2}(\Omega) \cap V_1(\Omega))^m \cap \mathcal{K}_1$, $f \in (V_1(Q_T))^m$, $1 < p \leq \frac{2l}{l-2}$ для $l > 2$ і $p > 1$ для $l = 1,2$. Тоді існує єдиний сильний розв'язок задачі* (1), (2) *в області $Q_T$.*

*Доведення.* Розглянемо допоміжну задачу в області $Q_T$, тобто систему

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} + C(x,t)u + g(u) - \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{B}(u) = f(x,t), \quad \varepsilon > 0 \quad (3)$$

з крайовими умовами

$$u|_{S_T^1} = 0 \quad (4)$$

і початковими умовами (2). Знайдемо розв'язок цієї задачі. Нехай $\{\varphi_k\}$ — система узагальнених власних функцій задачі

$$\Delta u = \lambda u,$$
$$u\,|_{\Gamma_1} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\,|_{\Gamma_2} = 0,$$

причому функція $\varphi_k$ відповідає власному значенню $\lambda_k$. Цілком аналогічно, як у [15, с. 184–188], можна довести, що система узагальнених власних функцій цієї задачі утворює базу простору $V_1(\Omega)$. Крім того, зазначимо, що $\partial u/\partial\nu$ має сенс (див. [16, с. 182]). Позначимо через $\varphi_k^s$, $s = 1,\ldots,m$ вектор-функцію, $s$-тою координатою якої є $\varphi_k$, а решта $m-1$ координат — нулі. Тоді, очевидно, система функцій $\{\varphi_k^s\}$ буде базою простору $(V_1(\Omega))^m$. Зазначимо також, що згідно з умовою теореми на $p$ простір $V_1(\Omega)$ вкладений у $L^p(\Omega)$.

Побудуємо послідовність функцій

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{m} c_{ks}^N(t)\varphi_k^s(x), \qquad N \in \mathbb{N},$$

де $c_{ks}^N$ шукаємо як розв'язок такої задачі Коші:

$$\int\limits_{\Omega}\Big[(u_t^N,\varphi_k^s)+\sum_{j=1}^{l}(A_j(x,t)u_{x_j}^N,\varphi_k^s)+(C(x,t)u^N,\varphi_k^s)+$$
$$+(g(u^N),\varphi_k^s)-\frac{1}{\varepsilon}(\mathcal{B}(u^N),\varphi_k^s)-(f(x,t),\varphi_k^s)\Big]dx=0, \quad (5)$$

$$c_{ks}^N(0)=u_{0ks}^N, \qquad k=1,\dots,N, \;\; s=1,\dots,m, \quad (6)$$

причому

$$u_0^N(x)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{m}u_{0ks}^N\varphi_k^s(x), \qquad \lim_{N\to\infty}\|u_0^N-u_0\|_{(V_1(\Omega))^m}=0.$$

Згідно з теоремою Каратеодорі [14] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (5), (6), визначений на деякому проміжку $[0,t_0]$. На підставі оцінок, одержаних нижче, можемо стверджувати, що $t_0=T$. Крім того, умови теореми забезпечують можливість диференціювання системи (5) за змінною $t$.

Помножимо кожне рівняння системи (5) на $c_{ks}^N$, додамо їх за $k$ від 1 до $N$ та за $s$ від 1 до $m$ і проінтегруємо по проміжку $[0,\tau]$, $\tau\in(0,T]$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[(u_t^N,u^N)+\sum_{j=1}^{l}(A_j(x,t)u_{x_j}^N,u^N)+(C(x,t)u^N,u^N)+$$
$$+(g(u^N),u^N)-\frac{1}{\varepsilon}(\mathcal{B}(u^N),u^N)-(f(x,t),u^N)\Big]dx\,dt=0. \quad (7)$$

Перетворимо і оцінимо кожний доданок рівності (7) окремо, враховуючи відповідні умови теореми. Очевидно,

$$I_1\equiv\int\limits_{Q_\tau}(u_t^N,u^N)\,dx\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u^N|^2dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u_0^N|^2\,dx.$$

На підставі умови $(\mathbf{A})$ існує така стала $a_1$, що $\sum\limits_{i=1}^{l}(A_{x_i}(x,t)\xi,\xi)\le a_1|\xi|^2$ майже для всіх $(x,t)\in Q_T$ і для всіх $\xi\in\mathbb{R}^m$. Тому

$$I_2\equiv\int\limits_{Q_\tau}\sum_{j=1}^{l}(A_j(x,t)u_{x_j}^N,u^N)\,dx\,dt\ge-\frac{a_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^2\,dx\,dt.$$

Згідно з умовою (**C**) існує така стала $c_0$, що $(C(x,t)\xi,\xi) \geq c_0|\xi|^2$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$. Отже,

$$I_3 \equiv \int\limits_{Q_\tau} (C(x,t)u^N, u^N)\,dx\,dt \geq c_0 \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2\,dx\,dt.$$

На підставі умови (**G**)

$$I_4 \equiv \int\limits_{Q_\tau} (g(u^N), u^N)\,dx\,dt \geq 0.$$

Крім того, враховуючи вкладення $V_1(\Omega)$ у простір $L^p(\Omega)$, одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau} |g(u^N)|^{p'}\,dx\,dt \leq \mu_0 \|u^N\|_{(V_1(Q_T)^m}, \tag{8}$$

де стала $\mu_0$ не залежить від $N$ і $\varepsilon$.

Далі,

$$I_5 \equiv -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_\tau} (\mathcal{B}(u^N), u^N)\,dx\,dt = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^m \alpha_i (u_i^N)^- u_i^N\,dx\,dt =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^m \alpha_i [(u_i^N)^-]^2\,dx\,dt,$$

$$I_6 \equiv -\int\limits_{Q_\tau} (f(x,t), u^N)\,dx\,dt \geq -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |f(x,t)|^2\,dx\,dt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $I_1$–$I_6$, з рівності (7) одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^N|^2\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^m \alpha_i [(u_i^N)^-]^2\,dx\,dt \leq$$
$$\leq (a_1 - 2c_0 + 1)\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 dx\,dt + \int\limits_{Q_\tau} |f(x,t)|^2\,dx\,dt, \quad \tau \in [0,T]. \tag{9}$$

Тоді, використовуючи лему Гронуолла–Беллмана, з (9) отримуємо оцінки:

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^N|^2\,dx \leq \mu_1, \qquad \tau \in [0,T], \tag{10}$$

$$\int\limits_{Q_T} |u^N|^2\,dx\,dt \le \mu_2, \tag{11}$$

де сталі $\mu_1, \mu_2$ не залежать від $N$ і $\varepsilon$.

Помножимо кожне з рівнянь (5) відповідно на функцію $-\lambda_k c_{ks}^N$, замінимо $\lambda_k \varphi_k^s$ на $\Delta\varphi_k^s$, підсумуємо за $k$ від 1 до $N$ та за $s$ від 1 до $m$ і проінтегруємо по проміжку $[0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$-\int\limits_{Q_\tau} \Big[(u_t^N, \Delta u^N) + \sum_{j=1}^{l} (A_j(x,t) u_{x_j}^N, \Delta u^N) + (C(x,t)u^N, \Delta u^N) +$$
$$+ (g(u^N), \Delta u^N) - \frac{1}{\varepsilon}(\mathcal{B}(u^N), \Delta u^N) - (f(x,t), \Delta u^N)\Big]\,dx\,dt = 0. \tag{12}$$

Перетворимо і оцінимо кожний доданок (12) окремо. Одержимо:

$$I_7 \equiv -\int\limits_{Q_\tau} (u_t^N, \Delta u^N)\,dx\,dt = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} \int\limits_{\Omega_\tau} |u_{x_j}^N|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{j=1}^{l} |u_{0x_j}^N|^2\,dx;$$

$$I_8 \equiv -\sum_{i,j=1}^{l} \int\limits_{Q_\tau} (A_i(x,t) u_{x_i}^N, u_{x_j x_j}^N)\,dx\,dt \ge -\frac{3la_0}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u_{x_i}^N|^2\,dx\,dt,$$

де $a_0 = \max\limits_{i,j} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} \|A_{ix_j}(x,t)\|$, а $\|\cdot\|$ — евклідова норма матриці;

$$I_9 \equiv -\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} (C(x,t)u^N, u_{x_i x_i}^N)\,dx\,dt \ge$$
$$\ge -\frac{1}{2}c_1 \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2\,dx\,dt - \left(\frac{1}{2} - c_0\right)\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u_{x_i}^N|^2\,dx\,dt,$$

$$c_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} \|C_{x_i}(x,t)\|^2;$$

$$I_{10} \equiv -\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} (g(u^N), u_{x_i x_i}^N)\,dx\,dt \ge 0;$$

$$I_{11} \equiv \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_\tau} (\mathcal{B}(u^N), \Delta u^N)\,dx\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} \alpha_i [((u_i^N)^-)_{x_j}]^2\,dx\,dt \ge 0;$$

$$I_{12} \equiv \int\limits_{Q_\tau} (f(x,t), \Delta u^N)\, dx\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{j=1}^{l} |f_{x_j}(x,t)|^2\, dx\, dt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{j=1}^{l} |u^N_{x_j}|^2\, dx\, dt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $I_7$–$I_{12}$, з рівності (12) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{j=1}^{l} |u^N_{x_j}|^2\, dx \le (2 - 2c_0 + 3a_0 l) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u^N_{x_i}|^2\, dx\, dt + \\ + c_1 \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2\, dx\, dt + \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} |f_{x_i}(x,t)|^2\, dx\, dt. \quad (13)$$

Використовуючи (10) і лему Гронуолла–Беллмана, з (13) отримуємо оцінки

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{j=1}^{l} |u^N_{x_j}|^2\, dx \le \mu_3, \qquad \tau \in [0,T], \quad (14)$$

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{j=1}^{l} |u^N_{x_j}|^2\, dx\, dt \le \mu_4, \quad (15)$$

де сталі $\mu_3, \mu_4$ не залежать від $N$ і $\varepsilon$.

Продиференціюємо (5) за $t$, домножимо на $c^N_{kst}(t)$, підсумуємо за $k$ від 1 до $N$ та за $s$ від 1 до $m$ і проінтегруємо по проміжку $[0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[ (u^N_{tt}, u^N_t) + \sum_{i=1}^{l} (A_i(x,t) u^N_{x_i t}, u^N_t) + \sum_{i=1}^{l} (A_{it}(x,t) u^N_{x_i}, u^N_t) + \\ + (C(x,t)u^N, u^N_t) + (C_t(x,t)u^N, u^N_t) + (G(u^N)u^N_t, u^N_t) - \\ - \frac{1}{\varepsilon}((\mathcal{B}(u^N))_t, u^N_t) - (f_t(x,t), u^N_t) \Big]\, dx\, dt = 0. \quad (16)$$

Оцінимо доданки рівності (16). Одержимо:

$$I_{13} \equiv \int\limits_{Q_\tau} (u^N_{tt}, u^N_t)\, dx\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |u^N_t|^2\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} |u^N_t|^2\, dx;$$

$$I_{14} \equiv \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} (A_i u^N_{x_i t}, u^N_t)\, dx\, dt \geq -\frac{a_1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^2\, dx\, dt;$$

$$I_{15} \equiv \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} (A_{it}(x,t) u^N_{x_i}, u^N_t)\, dx\, dt \leq$$
$$\leq \frac{a_2}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u^N_{x_i}|^2\, dx\, dt + \frac{a_2 l}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^2\, dx\, dt,$$

де $a_2 = \max\limits_i \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} \|A_{it}(x,t)\|$;

$$I_{16} \equiv \int\limits_{Q_\tau} (C(x,t) u^N_t, u^N_t) dx\, dt \geq c_0 \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^2 dx\, dt;$$

$$I_{17} \equiv \int\limits_{Q_\tau} (C_t(x,t) u^N, u^N_t)\, dx\, dt \leq \frac{c_2}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[|u^N|^2 + |u^N_t|^2\right] dx\, dt,$$

де $c_2 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} \|C_t(x,t)\|$;

$$I_{18} \equiv \int\limits_{Q_\tau} (G(u^N) u^N_t, u^N_t)\, dx\, dt \geq 0;$$

$$I_{19} \equiv -\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{Q_\tau} ((\mathcal{B}(u^N))_t, u^N_t)\, dx\, dt \geq 0;$$

$$I_{20} \equiv -\int\limits_{Q_\tau} (f_t(x,t), u^N_t)\, dx\, dt \geq -\frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} [|f_t|^2 + |u^N_t|^2]\, dx\, dt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $I_{13}$–$I_{20}$, з рівності (16) отримуємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^N_t|^2\, dx + (2c_0 - a_1 - a_2 l - c_2 - 1) \int\limits_{Q_\tau} |u^N_t|^2\, dx\, dt \leq \int\limits_{\Omega_0} |u^N_t|^2\, dx +$$
$$+ a_2 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u^N_{x_i}|^2\, dx\, dt + c_2 \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2\, dx\, dt + \int\limits_{Q_\tau} |f_t|^2\, dx\, dt. \quad (17)$$

Оскільки $u_0 \in \mathcal{K}_1$, то $\mathcal{B}(u^N(x,0)) = 0$. Крім того, $u^N_{x_i}(x,0) = u^N_{0x_i}$, $g(u^N(x,0)) = g(u^N_0)$.

Розглянемо систему (5) при $t = 0$. Помножимо кожне рівняння (5) на $c_{kst}^N(0)$, додамо їх за $k$ від 1 до $N$ та за $s$ від 1 до $m$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{\Omega_0}\Big[(u_t^N, u_t^N) + \sum_{i=1}^{l}(A_i(x,t)u_{x_i}^N, u_t^N) + (C(x,t)u^N, u_t^N) + \\ + (g(u^N), u_t^N) - \frac{1}{\varepsilon}(\mathcal{B}(u^N), u_t^N) - (f(x,0), u_t^N)\Big]dx = 0. \quad (18)$$

Оцінивши кожен доданок (18) і врахувавши умови теореми, отримуємо

$$\int\limits_{\Omega_0} |u_t^N|^2\, dx \le \mu_5, \quad (19)$$

де $\mu_5$ не залежить від $N$ і $\varepsilon$.

Використовуючи (11), (15), (19) і лему Гронуолла–Беллмана, з (17) отримуємо оцінки

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u_t^N|^2\, dx \le \mu_5, \quad \tau \in [0,T], \quad (20)$$

$$\int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^2\, dx \le \mu_6, \quad (21)$$

де $\mu_5, \mu_6$ не залежить від $N$ і $\varepsilon$.

На підставі оцінок (8), (10), (11), (14), (15), (20), (21) існує підпослідовність $\{u^{N_k}\}$ послідовності $\{u^N\}$, така, що $u^{N_k} \to u^\varepsilon$ слабко в $(V_1(Q_T))^m$, $g(u^{N_k}) \to g(u^\varepsilon)$ слабко в $(L^{p'}(Q_T))^m$.

Помножимо рівняння (5) (записані для $N_k$) відповідно на функції $z_{ks}^{N_{k_0}} \in C^1([0,T])$, додамо їх за $k$ від 1 до $N_{k_0}$ та за $s$ від 1 до $m$ і проінтегруємо по проміжку $[0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$. Одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big(u_t^{N_k} + \sum_{j=1}^{l} A_j(x,t)u_{x_j}^{N_k} + C(x,t)u^{N_k} + g(u^{N_k}) - \\ - \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{B}(u^{N_k}) - f(x,t), v^{N_{k_0}}\Big)dx\,dt = 0, \quad (22)$$

де $v^{N_{k_0}}(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N_{k_0}}\sum\limits_{s=1}^{m} z_{ks}^{N_{k_0}}(t)\varphi_k^s(x)$.

Зазначимо, що множина функцій $\{v^{N_{k_0}}\}$ є щільною в $(V_1(Q_T))^m$. Тому перейшовши до границі в (22) спочатку при $k \to \infty$, а потім при $k_0 \to \infty$, одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \left( u_t^\varepsilon + \sum_{j=1}^{l} A_j(x,t) u_{x_j}^\varepsilon + C(x,t) u^\varepsilon + g(u^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{B}(u^\varepsilon) - f(x,t), v \right) dx\,dt = 0, \tag{23}$$

правильну для довільної $v \in (V_1(Q_T))^m$. З (23) випливає, що $u^\varepsilon$ є розв'язком задачі (3), (2) майже всюди для кожного фіксованого $\varepsilon$ та на $S_T^1$ виконується рівність $u^\varepsilon(x,t) = 0$.

Отже, отримано множину $\{u^\varepsilon\}$ розв'язків задач (2)–(4). Для цих функцій виконуються оцінки (8), (11), (14), (15), (20), (21). Тому існує підпослідовність $\{u^{\varepsilon_k}\} \subset \{u^\varepsilon\}$, така, що $u^{\varepsilon_k} \to u$ слабко в $(V_1(Q_T))^m$, $u^{\varepsilon_k} \to u$ сильно в $(L^2(Q_T))^m$, $g(u^{\varepsilon_k}) \to z$ слабко в $(L^{p'}(Q_T))^m$ при $k \to \infty$. Згідно з [1, лема 1.3, с. 25] $g(u^{\varepsilon_k}) \to g(u)$ слабко в $(L^{p'}(Q_T))^m$.

Оскільки функція $u^\varepsilon$ є розв'язком майже всюди системи (3), то $\|\mathcal{B}(u^{\varepsilon_k})\|_{(L^{q'}(Q_T))^m} \le \mu_7 \varepsilon$ і $\mathcal{B}(u^\varepsilon) \to 0$ слабко в $(L^{q'}(Q_T))^m$.

Оператор $\mathcal{B}$ монотонний і семінеперервний. Тому $\mathcal{B}(u) = 0$, звідки випливає, що $u \in \mathcal{K}$ майже для всіх $t \in (0,T)$.

Нехай $v \in \mathcal{K}$ майже для всіх $t \in (0,T)$. Тоді

$$\int\limits_{Q_\tau} \left( u_t^{\varepsilon_k} + \sum_{i=1}^{l} A_i u_{x_i}^{\varepsilon_k} + C u^{\varepsilon_k} + g(u^{\varepsilon_k}) - f, v - u^{\varepsilon_k} \right) dx\,dt -$$
$$- \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{Q_\tau} (\mathcal{B}(u^{\varepsilon_k}), v - u^{\varepsilon_k})\, dx\,dt = 0. \tag{24}$$

Оскільки $\mathcal{B}(v) = 0$, то з (24) матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau} \left( u_t^{\varepsilon_k} + \sum_{i=1}^{l} A_i u_{x_i}^{\varepsilon_k} + C u^{\varepsilon_k} + g(u^{\varepsilon_k}) - f, v - u^{\varepsilon_k} \right) dx\,dt \ge 0. \tag{25}$$

Спрямувавши $k \to \infty$ у рівності (25), отримуємо

$$\int\limits_{Q_\tau} \left( u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i u_{x_i} + C u + g(u) - f, v - u \right) dx\,dt \ge 0$$

для всіх $v \in (L^q(Q_T))^m$, $v \in \mathcal{K}$ майже для всіх $t \in (0,T)$ та для всіх $\tau$, $\tau \in (0,T]$. Тобто, функція $u$ є розв'язком задачі (1), (2).

Доведемо єдиність розв'язку. Припустимо, що існують два сильні розв'язки $u^{(1)}$ і $u^{(2)}$ задачі (1), (2). Тоді для довільного $\tau \in (0,T]$ та всіх $v \in (L^q(Q_T))^m$, $v \in \mathcal{K}$ майже для всіх $t \in (0,T)$ виконується нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\left(u_t^{(k)} + \sum_{i=1}^{l} A_i u_{x_i}^{(k)} + Cu^{(k)} + g(u^{(k)}) - f, v - u^{(k)}\right)dx\,dt \geq 0, \quad k = 1,2. \tag{26}$$

Приймемо, що $v = (u^{(1)} + u^{(2)})/2$. Додавши дві останні нерівності і позначивши $u = u^{(1)} - u^{(2)}$, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau}\left(u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i u_{x_i} + Cu + g(u^{(1)}) - g(u^{(2)}), u\right)dx\,dt \leq 0. \tag{27}$$

Оцінивши кожен доданок рівності (27) (аналогічно як (7)), отримаємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u|^2\,dx + \left(c_0 - \frac{a_1}{2}\right)\int\limits_{Q_\tau} |u|^2\,dx\,dt \leq 0.$$

З цієї нерівності, за лемою Гронуолла–Беллмана будемо мати, що $\int_{\Omega_\tau} |u|^2\,dx \leq 0$. Тобто, $u(x,t) = u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t) = 0$.

Теорему доведено. □

**Означення 2.** *Функцію, яка належить до множини $\mathcal{K}$ майже для всіх $t \in (0,T)$ і є границею у просторі $(C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^p(Q_T))^m$ послідовності функцій $\{u^k\}$, таких, що кожна $u^k$ є сильним розв'язком нерівності*

$$\int\limits_{Q_\tau}\left(u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} + C^k(x,t)u + g(u) - f^k(x,t), v - u\right)dx\,dt \geq 0, \tag{28}$$

$\tau \in (0,T]$ *з початковою умовою*

$$u(x,0) = u_0^k(x), \tag{29}$$

*де елементи матриць $C^k$ збігаються до відповідних елементів матриці $C$ у просторі $L^\infty(Q_T)$, послідовність функцій $f^k$ збігається до $f$ у просторі $(L^{q'}(Q_T))^m$, послідовність функцій $u_0^k$ збігається до $u_0$ у просторі $(L^2(Q_T))^m$ при $k \to \infty$, називатимемо слабким розв'язком задачі* (1), (2).

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови* (**A**), (**C**), (**G**), (**S**), $u_0 \in \mathcal{K}_1$, $f \in (L^{q'}(Q_T))^m$, $1 < p \leq \frac{2l}{l-2}$ *для* $l > 2$ *і* $p > 1$ *для* $l = 1,2$. *Тоді існує єдиний слабкий розв'язок задачі* (1), (2) *в області* $Q_T$.

*Доведення.* Нехай елементи матриць $C^k, C^k_t, C^k_{x_i}, i = 1, \dots, l$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$, $u_0^k \in (L^{2p-2}(\Omega) \cap V_1(\Omega))^m \cap \mathcal{K}_1$, $f^k \in (V_1(Q_T))^m$ і елементи матриць $C^k$ збігаються до відповідних елементів матриці $C$ у просторі $L^\infty(Q_T)$, $f^k \to f \quad$ у просторі $(L^{q'}(Q_T))^m$, $u_0^k \to u_0 \quad$ у просторі $(L^2(Q_T))^m$ при $k \to \infty$.

Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує $u^k$, сильний розв'язок нерівності (28), з початковою умовою (29). Доведемо фундаментальність послідовності $\{u^k\}$ у просторі $(C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^p(Q_T))^m$. Приймемо $v = (u^k + u^s)/2$. Розглянемо нерівності (28), записані для $u^k$ і $u^s$, додамо їх і позначимо $u^{k,s} = u^k - u^s$. Тоді отримаємо нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big( u_t^{k,s} + \sum_{i=1}^{l} A_i u_{x_i}^{k,s} + C^s u^{k,s} + (C^k - C^s) u^k + \\ + g(u^k) - g(u^s) - (f^k - f^s), u^{k,s} \Big) dx\, dt \le 0. \quad (30)$$

Очевидно, що $\sup\limits_k \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} \|C^k(x,t)\| = c^0 < \infty$, $\sup\limits_k \|f^k\|_{(L^{q'}(Q_T))^m} < \infty$, $\sup\limits_k \|u_0^k\|_{(L^2(\Omega))^m} < \infty$. Легко показати, що послідовність $\{u^k\}$ буде обмежена у просторі $(L^2(Q_T))^m$:

$$\sup_k \|u^k\|_{(L^2(Q_T))^m} = \mu_8 < \infty.$$

Оцінивши кожен доданок у (30), аналогічно як у випадку рівності (7), і врахувавши умову (**G**), одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^{k,s}|^2\, dx \le (2c^0 + a_1 + 2) \int\limits_{Q_\tau} |u^{k,s}|^2\, dx\, dt + \int\limits_{\Omega_0} |u_0^k - u_0^s|^2\, dx + \\ + \mu_9 \int\limits_{Q_\tau} |f^k - f^s|^{q'}\, dx\, dt + \mu_8 \big( \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \|C^k(x,t) - C^s(x,t)\| \big)^2, \quad (31)$$

$\tau \in (0,T]$.

Використовуючи лему Гронуолла–Беллмана та збіжності послідовностей $\{u_0^k\}$ і $\{f^k\}$ відповідно у просторах $(L^2(Q_T))^m$ і $(L^{q'}(Q_T))^m$, з (31) отримуємо, що послідовність $\{u^k\}$ фундаментальна в просторі $(C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^p(Q_T))^m$, а її границя на підставі означення буде слабким розв'язком задачі (1), (2).

Доведемо єдиність розв'язку. Припустимо, що існують два слабкі розв'язки $u^{(1)}$ і $u^{(2)}$ задачі (1), (2). Тоді згідно з означенням слабкого розв'язку існують послідовності $\{f^{i,k}\}$, $\{u^k_{0,i}\}$, $i=1,2$ збіжні до функцій $f$ і $u_0$, відповідно в просторах $(L^{q'}(Q_T))^m$ і $(L^2(Q_T))^m$, а також матриці $C^{i,k}$, елементи яких збігаються до відповідних елементів матриці $C$ у просторі $L^\infty(Q_T)$ і існують послідовності функцій $\{u^{(i),k}\}$, які є сильними розв'язками відповідно задач

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big(u_t^{(i),k}+\sum_{i=1}^{l}A_i(x,t)u_{x_i}^{(i),k}+C^{i,k}(x,t)u^{(i),k}+ \\ +g(u^{(i),k})-f^{i,k}(x,t),v-u^{(i),k}\Big)dx\,dt\geq 0,$$

$$u^{(i),k}(x,0)=u^k_{0,i}(x),\quad x\in\Omega,\ \ i=1,2,\quad k\in\mathbb{N},$$

причому $\{u^{(i),k}\}$ збіжна до $u^{(i)}$, $i=1,2$ у просторі $(C([0,T];L^2(\Omega))\cap L^p(Q_T))^m$ при $k\to\infty$.

Нехай $v=(u^{(1),k}+u^{(2),k})/2$. Додавши останні нерівності при $i=1$ і при $i=2$, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big(u_t^{(1),k}-u_t^{(2),k}+\sum_{i=1}^{l}A_i(x,t)(u_{x_i}^{(1),k}-u_{x_i}^{(2),k})+ \\ +C^{1,k}(x,t)u^{(1),k}-C^{2,k}(x,t)u^{(2),k}+g(u^{(1),k})-g(u^{(2),k})- \\ -(f^{1,k}(x,t)-f^{2,k}(x,t)),u^{(1),k}-u^{(2),k}\Big)dx\,dt\leq 0. \quad (32)$$

Легко бачити, що

$$\max_{i=1,2}\sup_k \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}\|C^{i,k}(x,t)\|=c^1<\infty,\quad \max_{i=1,2}\sup_k\|f^{i,k}\|_{(L^{q'}(Q_T))^m}<\infty,$$
$$\max_{i=1,2}\sup_k\|u^k_{0,i}\|_{(L^2(\Omega))^m}<\infty,\quad \max_{i=1,2}\sup_k\|u^{(i),k}\|_{(L^2(Q_T))^m}=\mu_{10}<\infty.$$

Тоді з (32), аналогічно як з (30), одержуємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{(1),k}-u^{(2),k}|^2\,dx\leq(2c^1+a_1+2)\int\limits_{Q_\tau}|u^{(1),k}-u^{(2),k}|^2\,dx\,dt+ \\ +\int\limits_{\Omega_0}|u^k_{0,1}-u^k_{0,2}|^2\,dx+\mu_{11}\int\limits_{Q_\tau}|f^{1,k}-f^{2,k}|^{q'}\,dx\,dt+ \\ +\mu_{10}\big(\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}\|C^{1,k}(x,t)-C^{2,k}(x,t)\|\big)^2. \quad (33)$$

Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне як завгодно мале фіксоване число. Використовуючи нерівність Мінковського, збіжність елементів матриць $C^{i,k}$ до відповідних елементів матриці $C$ у просторі $L^\infty(Q_T)$, збіжність послідовностей $\{f^{i,k}\}$ до функції $f$ у просторі $(L^{q'}(Q_T))^m$, збіжність послідовностей $\{u^k_{0,i}\}$ до функції $u_0$ у просторі $(L^2(\Omega))^m$, $i = 1, 2$ і лему Гронуолла–Беллмана, з (33) одержимо існування такого $k_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $k > k_0$ виконуватиметься оцінка

$$\|u^{(1),k} - u^{(2),k}\|_{(C([0,T];L^2(\Omega)))^m} < \varepsilon. \tag{34}$$

Але

$$\|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{(C([0,T];L^2(\Omega)))^m} \le \|u^{(1),k} - u^{(1)}\|_{(C([0,T];L^2(\Omega)))^m} + \\ + \|u^{(1),k} - u^{(2),k}\|_{(C([0,T];L^2(\Omega)))^m} + \|u^{(2),k} - u^{(2)}\|_{(C([0,T];L^2(\Omega)))^m}. \tag{35}$$

Оскільки $\{u^{(i),k}\}$ збігаються до $u^{(i)}$, $i = 1, 2$ у просторі $(C([0,T]; L^2(\Omega)))^m$, то існує таке $k_1 \in \mathbb{N}$, $k_1 \ge k_0$, що для всіх $k > k_1$

$$\|u^{(i),k} - u^{(i)}\|_{(C([0,T];L^2(\Omega)))^m} < \varepsilon, \qquad i = 1, 2. \tag{36}$$

На підставі (34) і (36) з (35) одержуємо оцінку

$$\|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{(C([0,T];L^2(\Omega)))^m} < 3\varepsilon.$$

Отже, $u^{(1)}(x,t) = u^{(2)}(x,t)$ в $Q_T$. Теорему доведено. □

Розглянемо інтерпретацію нерівності (1). Нехай $\alpha_j = 1$, $j \in \{1, \dots, m\}$ і $\alpha_k = 0$ при $k \ne j$, $u$ — розв'язок нерівності (1) з початковою умовою (2). Виберемо в (1) $v_k = u_k$, якщо $k \ne j$ і $v_j = u_j + \varphi$, де $\varphi \in L^q(Q_T)$, $\varphi \ge 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$. Тоді з (1) одержимо нерівність

$$\int\limits_{Q_T} \left[ u_{jt} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{s=1}^{m} a^i_{js}(x,t) u_{s,x_i} + \sum_{s=1}^{m} c_{js}(x,t) u_s + g_j(u) - f_j(x,t) \right] \varphi \, dx\, dt \ge 0. \tag{37}$$

Вибравши в (1) $v_k = u_k$, якщо $k \ne j$ і $v_j = 0$, а потім $v_k = u_k$, якщо $k \ne j$ і $v_j = 2u_j$, матимемо рівність

$$\int\limits_{Q_T} \left[ u_{jt} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{s=1}^{m} a^i_{js}(x,t) u_{s,x_i} + \sum_{s=1}^{m} c_{js}(x,t) u_s + g_j(u) - f_j(x,t) \right] u_j \, dx\, dt = 0. \tag{38}$$

Тоді з (37), (38) випливає, що

$$u_{jt} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{s=1}^{m} a^i_{js}(x,t)u_{s,x_i} + \sum_{s=1}^{m} c_{js}(x,t)u_s + g_j(u) = f_j(x,t) \qquad (39)$$

майже всюди в області

$$Q^j_T = \{(x,t) \in Q_T \,:\, u_j(x,t) > 0\}.$$

Аналогічно для $k \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{j\}$ одержуємо, що

$$u_{kt} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{s=1}^{m} a^i_{ks}(x,t)u_{s,x_i} + \sum_{s=1}^{m} c_{ks}(x,t)u_s + g_k(u) = f_k(x,t) \qquad (40)$$

майже всюди в області $Q_T$. Зокрема, якщо $f_j(x,t) = 0$ майже всюди в $Q_T$, то $u$ є розв'язком майже всюди системи рівнянь

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} + C(x,t)u + g(u) = f(x,t) \qquad (41)$$

в області $Q_T$, задовольняє початкову умову (2), крайову умову (4) і $u_j(x,t) \geq 0$ майже всюди в $Q_T$.

Аналогічно можна інтерпретувати розв'язок нерівності (1) і у випадку, коли $\alpha_j = 1$ при $j \in J_1 \subset \{1,\ldots,m\}$. Зокрема, якщо $J_1 = \{1,\ldots,m\}$ і $f(x,t) = 0$ майже всюди в $Q_T$, то $u$ є невід'ємним розв'язком однорідної системи (41) з початковою умовою (2) і крайовою умовою (4).

**Зауваження 1.** Нехай $g(\xi) \equiv 0$. Розглянемо множину

$$\mathcal{K} = \{v \in (L^2(\Omega))^m \,:\, \alpha_1 v_1 \geq \psi_1, \ldots, \alpha_m v_m \geq \psi_m\},$$

де $\alpha_i = 1$ або $\alpha_i = 0$, $\psi_i \in H^2(\Omega)$, $i = 1,\ldots,m$.

Якщо $\alpha_j = 1$ і $\alpha_k = 0$ при $k \neq j$, $u$ — розв'язок (1), (2), то майже всюди в області

$$Q^{\psi_j}_T = \{(x,t) \in Q_T \,:\, u_j(x,t) \geq \psi_j(x)\}$$

правильна рівність (39) (при $g_j(\xi) \equiv 0$) і майже всюди в $Q_T$ правильні рівності (40) (при $g_k(\xi) \equiv 0$) для $k \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{j\}$.

Аналогічно можна інтерпретувати нерівність (1) і у випадку, коли $\alpha_j = 1$ при $j \in J_1$. Зокрема, якщо $J_1 = \{1,\ldots,m\}$ і

$$f(x,t) = \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)\psi_{x_i}(x) + C(x,t)\psi(x),$$

то $u$ є розв'язком задачі (41), (2), (4) (при $g(\xi) \equiv 0$), який задовольняє нерівність $u(x,t) \geq \psi(x)$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$.

**Зауваження 2.** Аналогічні результати можна одержати для нерівності

$$\int_{Q_\tau} (u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} + C(x,t)u + g(u-\psi) - f(x,t), v-u)\,dx\,dt \geq 0,$$

де $\psi \in (H^2(\Omega))^m$,

$$\mathcal{K} = \{v \in (L^2(\Omega))^m : v(x) \geq \psi(x) \text{ майже всюди в } \Omega\}.$$

**Зауваження 3.** Умова (**G**) виконується зокрема для функції

$$g(\xi) = (|\xi|^{p-2}\xi_1, \ldots, |\xi|^{p-2}\xi_m).$$

## Література

[1] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М: Эдиториал УРСС, 2002, 587 с.

[2] Ф. Г. Максудов, А. Б. Алиев, Д. М. Тахиров, *Односторонняя задача для квазилинейного уравнения гиперболического типа* // ДАН СССР, **258** (1981), No 4, 789–791.

[3] А. Б. Алиев, *Глобальная разрешимость односторонних задач для квазилинейных операторов гиперболического типа* // ДАН СССР, **298** (1988), No 5, 1033–1036.

[4] R. Landes, *Quasilinear hyperbolic variational inequalities* // Arch. Ration. Mech. Anal. **91** (1986), No 3, 267–282.

[5] С. Н. Глазатов, *Некоторые квазилинейные гиперболические неравенства* // Препринт РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Новосибирск, No 2, 1990, 26 с.

[6] Н. А. Ларькин, *О глобальных решениях нелинейных гиперболических неравенств* // ДАН СССР, **250** (1980), No 4, 806–809.

[7] Н. А. Ларькин, *Односторонняя задача для нелокального квазилинейного гиперболического уравнения теории упругости* // ДАН СССР, **274** (1984), No 6, 1341–1344.

[8] А. Б. Алиев, *Односторонние задачи для квазилинейных гиперболических операторов в функциональных пространствах* // ДАН СССР, **297** (1987), No 2, 271–275.

[9] J. Y. Park, J. J. Bae, *Variational inequality for quasilinear wave equations with nonlinear damping terms* // Nonlin. Anal. **50** (2002), 1065–1083.

[10] С. Н. Глазатов, *Некоторые задачи для нелинейных уравнений третьего порядка* // Препринт РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Новосибирск, No 7, 1992, 22 с.

[11] S. Glazatov, *On some variational inequalities for nonclassical type operators* // Banach Center Publications. **27** (1992), 169–174.

[12] С. Н. Глазатов, *Об одном подходе к нелинейному волновому уравнению без априорных оценок* // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики: сборник научных трудов. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Новосибирск, 1987, 60-70.

[13] R. G. Cooper, *Two variational inequality problems for the wave equation in a half-space* // J. Math. Anal. And Appl. **232** (1999), 434–460.

[14] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* Москва: Издательство иностранной литературы, 1958, 475 с.

[15] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных.* Москва, Наука, 1983, 424 с.

[16] Ж.-П. Обэн, *Приближенное решение эллиптических краевых задач.* Москва, Мир, 1977, 384 с.

## Відомості про авторів

**Наталія Іванівна Гузіль, Сергій Павлович Лавренюк**

Львівський національний університет
імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1
79602, Львів, Україна
*E-Mail:* `sp_lavreniuk@franko.lviv.ua`