Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 3, 297 – 317

# Аналитические свойства решений уравнений Эйлера-Пуассона в случае Гесса

Александр В. Беляев

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

**Аннотация.** Решение уравнений Эйлера-Пуассона в случае Гесса задается набором особых точек решения вместе с его асимптотикой в этих точках.

**2000 MSC.** 55R55, 34M30, 34M45, 74H05, 74H10, 74H40.

**Ключевые слова и фразы.** Уравнения Эйлера-Пуассона, случай Гесса, первый интеграл, особые точки, аналитические функции, асимптотика, однозначные решения.

## Введение

Случай Гесса [1] задачи о движении тяжелого твердого тела интересен тем, что несмотря на наличие четвертого интеграла для классических уравнений Эйлера-Пуассона, его решения в квадратурах не удалось получить никому. Тем не менее и без явного решения их свойства исследованы достаточно полно. Геометрическое истолкование искомого движения было дано Жуковским [2], а Некрасов и Млодзеевский [3, 4] доказали, что при некоторых ограничениях решения могут быть асимптотическими. Представляет интерес также тот факт, что случай Гесса был переоткрыт Аппельротом [5], использовавшим идею Ковалевской [6] исследования на однозначность особых точек решений уравнений Эйлера-Пуассона. Отметим также, что Некрасовым [7] показано, что решения в случае Гесса являются, вообще говоря, неоднозначными. Случай Гесса позднее изучали Чаплыгин [8], Брессан [9], Ковалев [10].

В настоящей статье мы представляем решения уравнений Эйлера-Пуассона в случае Гесса как аналитические функции времени с заданными асимптотиками в окрестностях заданных особых точек. Этот результат отличается от результатов классических исследований тем,

*Статья поступила в редакцию* 10.12.2003

ISSN 1810 – 3200. 

что в них не ставилась, а значит, и не решалась задача полного описания асимптотик всех особых точек данного решения вместе с указанием координат самих особых точек на комплексной временной плоскости. Более того, асимптотика особых точек имеет свободные параметры, однако для фиксированного решения они свободны лишь в одной, заранее выбранной, особой точке, а в остальных — не являются свободными и связаны некоторой зависимостью. Эта зависимость может быть описана в терминах отображения, которое мы называем параметрическим отображением последования.

Мы полагаем, что можно считать, что найдено аналитическое решение дифференциальных уравнений, в данном случае задачи Гесса, если для данного решения или класса решений указаны координаты особых точек, асимптотики всех особых точек и соотношения, связывающие свободные параметры особых точек. Отметим, что представление такого же типа с тождественным отображением последования имеют и классические эллиптические функции [11] и оно позволяет получить все известные, как локальные, так и глобальные свойства. Хотя классическим решением дифференциального уравнения считается решение в квадратурах, однако оно менее эффективно с точки зрения исследования свойств полученного решения, если интегралы явно не берутся.

В соответствии с изложенным подходом, основной результат статьи сформулируем следующим образом.

**Теорема 1.** *Решение уравнений Эйлера-Пуассона*

$$\begin{cases} A\,\dot{p} = Ap \times p + \gamma \times r, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times p, \end{cases}$$

*здесь* $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{C}^3, \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbf{C}^3, A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, r = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbf{R}^3$, *в случае Гесса, задаваемого условием*

$$A_1 B_{23} r_1^2 = A_2 B_{31} r_2^2, \quad r_3 = 0, \quad B_{ij} = A_i - A_j$$

(*индексы можно циклически переставлять*), *имеет следующее описание:*

$$\begin{cases} p_i = k_i \sqrt{\mathcal{F}}\,\dfrac{\theta_1\theta_2}{\theta_1^2 + \theta_2^2}, \quad i = 1, 2, \\ p_3 = k_3 \sqrt{\mathcal{F}}\,\dfrac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{\theta_2^2 + \theta_1^2}, \\ \gamma_1 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_1(\mathcal{H} - \mathcal{F}) + r_2(A_3\dot{p}_3 - B_{12}p_1p_2)), \\ \gamma_2 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_2(\mathcal{H} - \mathcal{F}) - r_1(A_3\dot{p}_3 - B_{12}p_1p_2)), \\ \gamma_3 = \frac{1}{r_2}(B_{23}p_2p_3 - A_1\dot{p}_1), \end{cases}$$

*здесь*

$$k_2 = -\frac{A_1 r_1}{A_2 r_2} k_1, \quad k_1 = 2\sqrt{\frac{2B_{23}}{-B_{12}A_1}}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{2}{A_3}},$$

$A_1 < A_3 < A_2$, $A_{ij} = A_i - A_j$.

*Функция $\mathcal{F}$ является в общем случае эллиптической и задается уравнением*

$$A_3^2(\dot{\mathcal{F}})^2 = 2A_3\mathcal{T}\mathcal{R}\mathcal{F} - 2A_3\mathcal{F}(\mathcal{F}-\mathcal{H})^2 - \mathcal{M}^2\mathcal{R},$$

*здесь* $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\langle Ap, p\rangle + \langle \gamma, r\rangle$, $\mathcal{M} = \langle Ap, \gamma\rangle$, $\mathcal{T} = \langle \gamma, \gamma\rangle$ *— первые интегралы исходной системы уравнений Эйлера-Пуассона,* $\mathcal{R} = \langle r, r\rangle$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ — $\mathbf{C}$*-скалярное произведение в* $\mathbf{C}^3$.

*Функции $\theta_1, \theta_2$ задаются линейными дифференциальными уравнениями*

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = (\nu/2)\sqrt{\mathcal{F}}\theta_1 - \dfrac{\kappa}{\mathcal{F}}\theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = \dfrac{\kappa}{\mathcal{F}}\theta_1 - (\nu/2)\sqrt{\mathcal{F}}\theta_2, \end{cases}$$

$$\nu = -\frac{\sqrt{2B_{23}B_{31}}}{\sqrt{A_1A_2A_3}}, \quad \kappa = \frac{\mathcal{M}\sqrt{\mathcal{R}}}{4A_3},$$

*в силу которых все особые точки $\theta_1, \theta_2$ совпадают с нулями и особыми точками функции $\mathcal{F}$, которые в общем случае соответственно равны* $\{t_0+m_1\tau_1+m_2\tau_2 i\}$, $\{\bar{t_0}+m_1\tau_1+m_2\tau_2 i\}$ *и* $\{t_\infty+m_1\tau_1+m_2\tau_2 i\}$, $m_i \in \mathbf{Z}$, $\tau_i \in \mathbf{R}$.

*В окрестностях особых точек функции $\theta_1, \theta_2$ имеют асимптотику следующего вида:*

*в окрестности одной из сопряженных точек* $\mathcal{F} = 0$

$$\begin{cases} \theta_1 = -ic_1 t^{-1/4} + ic_2 t^{1/4} + \ldots, \\ \theta_2 = c_1 t^{-1/4} + c_2 t^{1/4} + \ldots, \end{cases}$$

*где $c_1, c_2$ — свободные параметры;*

*в окрестности точки* $\mathcal{F} = \infty$

$$\begin{cases} \theta_1 = c_1 t^{\nu\lambda/2} + c_1\dfrac{\nu\mathcal{H}}{12\lambda}t^{2+\nu\lambda/2} + c_2\dfrac{\kappa}{2A_3(3-\nu\lambda)}t^{3-\nu\lambda/2} + \ldots, \\ \theta_2 = c_2 t^{-\nu\lambda/2} - c_2\dfrac{\nu\mathcal{H}}{12\lambda}t^{2-\nu\lambda/2} - c_1\dfrac{\kappa}{2A_3(3+\nu\lambda)}t^{3+\nu\lambda/2} + \ldots. \end{cases}$$

*где $c_1, c_2$ — свободные параметры.*

*В пределах одного или двух соседних параллелограммов периодов эллиптической функции $\mathcal{F}$ свободные параметры асимптотик*

*$c_1, c_2$ различных особых точек связаны линейными преобразованиями, которые назовем базисными, и которые, вообще говоря, не коммутируют друг с другом в силу неоднозначности решений. Линейные преобразования, связывающие свободные параметры асимптотик произвольных особых точек, представляют собой произведения базисных линейных преобразований.*

Доказательство теоремы 1 составляет основное содержание статьи, которую мы разбиваем на разделы следующим образом. В первом разделе изложены классические результаты, характеризующие случай Гесса. Во втором разделе уравнения (1) случая Гесса сводятся к уравнению Риккати и к системе линейных уравнений. Сам факт возможности такого сведения является хорошо известным классическим результатом (см. [7]). Однако виды уравнений Риккати и, соответственно, линейных систем, могут быть самыми различными. Поэтому мы приводим соответствующий вывод. В третьем и четвертом разделах мы излагаем идею доказательства теоремы 1 и некоторый взгляд на исследование случая Гесса. В разделе 5 приводится асимптотика функции $\mathcal{F}$, а непосредственное доказательство теоремы 1 содержится в разделах 6 и 7. В разделе 10 доказаны предложения, фиксирующие соответствие особых точек для различных представлений решения задачи Гесса.

Собственно говоря, взятые в отдельности факты, которые мы используем или доказываем, вполне просты; однако мы полагаем, что является нетривиальным, во-первых, сам подход к решению задачи Гесса, а во-вторых, подбор вспомогательных представлений, который не может быть произвольным. Так, например, для классического представления (1) задачи Гесса весьма не просто найти координаты особых точек. Для уравнений (11), наоборот, особые точки очевидны, но представляет собой нетривиальную задачу непосредственное, то есть без использования дополнительных замен переменных, нахождение в этих особых точках асимптотик, поскольку правая часть уравнений (11) зависит от времени.

Чтобы подчеркнуть содержательность основной теоремы 1, мы приводим два ее следствия — теоремы 2 и 3, доказанные, соответственно, в разделах 11 и 12. В теореме 2 указывается полный набор однозначных решений случая Гесса, а в теореме 3 доказывается, что почти все комплексные решения этого же случая предельнопериодичны. Оба доказательства выглядят как простые следствия теоремы 1, однако без ее использования доказать теорему 3 достаточно сложно, а теорему 2, пожалуй, и невозможно.

Кроме того, выбор теорем 2 и 3 представляется принципиальным для сравнения эффективности предлагаемого в статье подхода к исследованию случая Гесса с классическими методами исследования. Так, теорема 2 является комплексным аналогом теоремы Некрасова [4] о квазипериодических и предельнопериодических решениях, о которой мы уже упоминали, а теорема 3 подобна теореме Ляпунова [12] о полном наборе случаев для уравнений Эйлера-Пуассона, имеющих однозначные решения при всех начальных данных.

Наконец, в разделах 8 и 9 мы приводим результаты [13], необходимые для доказательства теорем 2, 3 и предложения 8.

## 1. Уравнения Эйлера-Пуассона в случае Гесса

Классические уравнения Эйлера-Пуассона, описывающие движение тяжелого твердого тела, имеют вид:

$$\begin{cases} A\,\dot{p} = Ap \times p + \gamma \times r, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times p, \end{cases} \tag{1}$$

здесь $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{C}^3, \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbf{C}^3, A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, r = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbf{R}^3$.

Система (1) имеет первые интегралы

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{2}\langle Ap, p\rangle + \langle \gamma, r\rangle\,,$$

$$\mathcal{M}(z) = \langle Ap, \gamma\rangle\,,$$

$$\mathcal{T}(z) = \langle \gamma, \gamma\rangle\,;$$

здесь $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ — $\mathbf{C}$-скалярное произведение в $\mathbf{C}^3$.

Далее в обозначениях мы будем также использовать циклическую перестановку индексов $\sigma = (1, 2, 3)$ для записи произведений или сумм (например, $\sum_\sigma A_1A_2 = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1$, $\prod_\sigma A_1 = A_1A_2A_3$), а также соотношений, получающихся друг из друга перестановкой индексов ($\dot{\gamma} = \gamma \times p$, можно записать в виде $\dot{\gamma}_1 = p_3\gamma_2 - p_2\gamma_3, \sigma$). Кроме того, будем использовать обозначение $B_{ij} = A_i - A_j$.

Случай Гесса определяется наличием четвертого интеграла

$$\mathcal{I}(z) = \langle Ap, r\rangle = 0. \tag{2}$$

Заметим, что четвертый интеграл является таковым только на нулевой поверхности уровня самого интеграла, и именно эта его особенность приводит к целому ряду необычных свойств случая Гесса.

Существование интеграла (2) порождает зависимость параметров твердого тела и координат точки закрепления тела. С точностью до перестановки индексов эти соотношения имеют вид:

$$A_1 B_{23} r_1^2 = A_2 B_{31} r_2^2, \quad r_3 = 0. \tag{3}$$

Для определенности будем считать, что

$$A_1 < A_3 < A_2.$$

Введем функции $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\langle Ap, p\rangle$, $\mathcal{G} = \frac{1}{2}\langle Ap, Ap\rangle$, для которых

$$\dot{\mathcal{F}} = \langle Ap \times p, p\rangle + \langle \gamma \times r, p\rangle = \langle \gamma \times r, p\rangle,$$

$$\dot{\mathcal{G}} = \langle Ap \times p, Ap\rangle + \langle \gamma \times r, Ap\rangle = \langle \gamma \times r, Ap\rangle.$$

Используя соотношения

$$\langle a, b\rangle \langle c, d\rangle = \langle a, c\rangle \langle b, d\rangle + \langle a \times d, b \times c\rangle, \tag{4}$$

$$(a \times b) \times c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a, \tag{5}$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{F}}\mathcal{G} = \langle Ap, Ap\rangle \langle \gamma \times r, p\rangle = \mathcal{F}\dot{\mathcal{G}} + \langle Ap \times (\gamma \times r), Ap \times p\rangle = \\ = \mathcal{F}\dot{\mathcal{G}} - \mathcal{M}\langle Ap \times p, r\rangle = \mathcal{F}\dot{\mathcal{G}} - \mathcal{M}\langle Ap, r\rangle^{\cdot} = \mathcal{F}\dot{\mathcal{G}}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует, что $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}} = \mathrm{const}$. Найдем значение этой константы.

$$A_1 p_1 r_1 + A_2 p_2 r_2 = 0 \Rightarrow p_2 = -\frac{A_1 p_1 r_1}{A_2 r_2} \Rightarrow p_2^2 = \frac{A_1^2 p_1^2 r_1^2}{A_2^2 r_2^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\mathcal{G} = A_1^2 p_1^2 \left(1 + \dfrac{r_1^2}{r_2^2}\right) + A_3^2 p_3^2, \\ 2\mathcal{F} = A_1 p_1^2 \left(1 + \dfrac{A_1 r_1^2}{A_2 r_2^2}\right) + A_3 p_3^2. \end{cases}$$

Используя соотношение (3), получим

$$\begin{cases} 2\mathcal{G} B_{23} = A_1 p_1^2 (A_1 B_{23} + A_2 B_{31}) + A_3^2 B_{23} p_3^2, \\ 2\mathcal{F} B_{23} = A_1 p_1^2 (B_{23} + B_{31}) + A_3 B_{23} p_3^2, \end{cases}$$

откуда следует, что $\mathcal{G} = A_3 \mathcal{F}$.

Введем обозначение $\mathcal{R} = \langle r, r\rangle$ и воспользуемся соотношениями (4), (5).

$$(\dot{\mathcal{G}})^2 = \langle Ap, \gamma\times r\rangle\langle Ap, \gamma\times r\rangle = 2\mathcal{G}\langle\gamma\times r, \gamma\times r\rangle - \\ - \langle Ap\times(\gamma\times r), Ap\times(\gamma\times r)\rangle = 2\mathcal{G}\langle(\gamma\times r)\times\gamma, r\rangle - \mathcal{M}^2\mathcal{R} = \\ = 2\mathcal{G}(\mathcal{T}\mathcal{R} - \langle\gamma, r\rangle^2) - \mathcal{M}^2\mathcal{R} = 2\mathcal{G}\mathcal{T}\mathcal{R} - 2\mathcal{G}(\mathcal{F}-\mathcal{H})^2 - \mathcal{M}^2\mathcal{R}.$$

Итак, мы можем найти функции $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ из уравнения

$$A_3^2(\dot{\mathcal{F}})^2 = 2A_3\mathcal{T}\mathcal{R}\mathcal{F} - 2A_3\mathcal{F}(\mathcal{F}-\mathcal{H})^2 - \mathcal{M}^2\mathcal{R}. \tag{6}$$

## 2. Сведение уравнений Эйлера-Пуассона к уравнению Риккати и системе линейных уравнений

Рассмотрим следующее представление для $p(t)$ :

$$\begin{cases} p_i = k_i\sqrt{\mathcal{F}}\,\dfrac{\varphi}{1+\varphi^2}, \quad i = 1, 2, \\ p_3 = k_3\sqrt{\mathcal{F}}\,\dfrac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$k_2 = -\frac{A_1 r_1}{A_2 r_2}k_1, \quad k_1 = 2\sqrt{\frac{2B_{23}}{-B_{12}A_1}}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{2}{A_3}}.$$

Представление (7) мы выбираем таким образом, чтобы тождественно выполнялись условия $\langle Ap, r\rangle = 0$, $\langle Ap, p\rangle = 2\mathcal{F}$. При этом естественно, что общее количество свободных переменных уменьшается на 2.

Используя имеющиеся интегралы, получим дифференциальное уравнение для $\varphi$ : $A_1\dot{p}_1 = B_{23}p_2p_3 - r_2\gamma_3 \Rightarrow$

$$\gamma_3 = \frac{1}{r_2}(B_{23}p_2p_3 - A_1\dot{p}_1). \tag{8}$$

Из следующей системы

$$\begin{cases} \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2 = \mathcal{H} - \mathcal{F}, \\ \gamma_1 r_2 - \gamma_2 r_1 = A_3\dot{p}_3 - B_{12}p_1p_2 \end{cases}$$

найдем $\gamma_1$ и $\gamma_2$ :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_1(\mathcal{H}-\mathcal{F}) + r_2(A_3\dot{p}_3 - B_{12}p_1p_2)), \\ \gamma_2 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_2(\mathcal{H}-\mathcal{F}) - r_1(A_3\dot{p}_3 - B_{12}p_1p_2)). \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что

$$A_1p_1r_2 - A_2p_2r_1 = A_1p_1r_2 + A_2r_1\frac{A_1r_1}{A_2r_2}p_1 = \frac{A_1p_1}{r_2}\mathcal{R},$$

и подставим представление (7)–(9) в интеграл момента $\mathcal{M}$.

Мы получим

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = \frac{A_1p_1}{r_2}(A_3\dot{p}_3 - B_{12}p_1p_2) + \frac{A_3p_3}{r_2}(-A_1\dot{p}_1 + B_{23}p_2p_3) = \\ = \frac{A_1A_3}{r_2}(p_1\dot{p}_3 - \dot{p}_1p_3) + \frac{p_2}{r_2}(A_3B_{23}p_3^2 - A_1B_{12}p_1^2) = \\ = \frac{A_1A_3}{r_2}\left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{\cdot}p_1^2 + \frac{2B_{23}}{r_2}\mathcal{F}p_2 = \\ = \frac{A_1A_3}{r_2}k_1k_3\mathcal{F}\left(\frac{1-\varphi^2}{\varphi}\right)^{\cdot}\frac{\varphi^2}{(1+\varphi^2)^2} + \frac{2B_{23}}{r_2}k_2\mathcal{F}^{\frac{3}{2}}\frac{\varphi}{1+\varphi^2}.\end{aligned}$$

Наконец, поскольку $\left(\frac{1-\varphi^2}{\varphi}\right)^{\cdot} = -\dot{\varphi}\frac{1+\varphi^2}{\varphi^2}$, мы получаем

$$\dot{\varphi} = \nu\sqrt{\mathcal{F}}\varphi - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}(1+\varphi^2), \quad \nu = -\frac{\sqrt{2B_{23}B_{31}}}{\sqrt{A_1A_2A_3}}, \quad \kappa = \frac{\mathcal{M}\sqrt{\mathcal{R}}}{4A_3}. \tag{10}$$

**Замечание 1 ([1]).** Если $\mathcal{M} = 0$, то $\kappa = 0$ и уравнения (10) явно интегрируются.

Полагая $\varphi = \frac{\theta_1}{\theta_2}$, получим линейную систему для $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ :

$$\frac{1}{\theta_2^2}(\dot{\theta}_1\theta_2 - \theta_1\dot{\theta}_2) = \nu\sqrt{\mathcal{F}}\,\frac{\theta_1}{\theta_2} - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}\left(1 + \frac{\theta_1^2}{\theta_2^2}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1\theta_2 - \theta_1\dot{\theta}_2 = \nu\sqrt{\mathcal{F}}\theta_1\theta_2 - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}(\theta_1^2 + \theta_2^2) = \\ = \left(\frac{\nu}{2}\sqrt{\mathcal{F}}\theta_1 - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}\theta_2\right)\theta_2 - \left(-\frac{\nu}{2}\sqrt{\mathcal{F}}\theta_2 + \frac{\kappa}{\mathcal{F}}\theta_1\right)\theta_1 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\dot{\theta}_1 = (\nu/2)\sqrt{\mathcal{F}}\theta_1 - \dfrac{\kappa}{\mathcal{F}}\theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = \dfrac{\kappa}{\mathcal{F}}\theta_1 - (\nu/2)\sqrt{\mathcal{F}}\theta_2\end{cases} \tag{11}$$

**Замечание 2.** В работе [7] Некрасов свел динамические уравнения в случае Гесса к уравнению Риккати, для которого записал линейную систему дифференциальных уравнений. Однако мы предпочитаем не пользоваться этим результатом, поскольку неизвестная величина этой линейной системы связана с исходными переменными $(p, \gamma)$ дифференциальными соотношениями.

## 3. Способ нахождения асимптотик решений $(p, \gamma), \theta_1, \varphi$

Нахождение координат особых точек на временной плоскости **C** решений нелинейных дифференциальных уравнений не является задачей, имеющей стандартный способ решения. Также заранее не очевиден способ нахождения асимптотик в таких точках.

В работе [13] приведена асимптотика особых точек решений уравнений Эйлера-Пуассона. По своему характеру все особые точки образуют два класса: $\alpha$ и $\beta$-точки.

Асимптотика $\alpha$-точек в случае Гесса может быть однозначной ([14]), но, вообще говоря, имеет слагаемые вида $t^i \ln^j t,\ i, j \in \mathbf{Z}$. Все коэффициенты $\alpha$-точки эффективно вычисляются как функции исходных параметров тела $A_i, r_i,\ i = 1, 2, 3$. При этом общий вид асимптотики имеет 5 свободных параметров $\alpha_i,\ i = 1, \ldots 5$, что закономерно для системы (1) с 6 переменными.

Асимптотика $\beta$-точек также может быть однозначной ( [14]), но может и иметь ветвление за счет слагаемых вида $t^\nu, \nu \in \mathbf{C}$. Коэффициенты при $t^\nu$ эффективно вычисляются не всегда, в частности, когда асимптотика $\beta$-точки является частью ряда Лорана. К сожалению, именно такая ситуация имеет место в случае Гесса. Этим обстоятельством объясняется необходимость рассмотрения случая Гесса и с помощью уравнения Риккати для $\varphi$, и с помощью линейной системы уравнений относительно $\theta_1, \theta_2$.

Координаты особых точек особенно просто находятся для функции $\theta$, а асимптотика соответствующих особых точек — для функции $\varphi$.

Определяя соответствие особых точек для различных представлений решения задачи, мы можем получить необходимые нам свойства решения для каждого из представлений.

## 4. Компактификация фазового пространства решений $\varphi, \theta$

Поскольку функция $\mathcal{F}$ является эллиптической, то можно считать, что уравнение (10) для $\varphi$ и система (11) для $\theta$ заданы на **R**-двумерном торе $T^2$, являющимся голоморфным компактным многообразием. Однако в правой части (10), (11) вместе с $\mathcal{F}$ присутствует и $\sqrt{\mathcal{F}}$, что требует рассмотрения минимального накрытия, для которого правые части уравнений (10), (11) становятся однозначными.

Функция $\mathcal{F}$ имеет полюс второго порядка, значит, в окрестности точки $\mathcal{F} = \infty$ функция $\sqrt{\mathcal{F}}$ однозначна. Точки $\mathcal{F} = 0$ не могут принадлежать вещественной прямой, так как при $\mathcal{F}=0$ $A_3^2(\dot{\mathcal{F}})^2 = -\mathcal{M}^2\mathcal{R}<0$, если $\mathcal{M}\neq 0$.

Как было отмечено в замечании 1, случай $\mathcal{M}=0$ явно интегрируется, поэтому в данном случае не интересен для рассмотрения.

Точки, в которых $\mathcal{F}=0$, в силу вещественности $\mathcal{F}$ имеют сопряженные координаты, значит они отличны друг от друга и не являются кратными. Риманова поверхность функции $\sqrt{\mathcal{F}}$ согласно формуле Римана-Гурвица является поверхностью $S_2$ рода 2 (см. [11]; это можно видеть и из геометрии разветвленного накрытия).

Наконец, благодаря линейности уравнений для $\theta$ соответствующий им поток можно профакторизовать по однородному растяжению, после чего мы получаем голоморфное слоение с особенностями на компактном голоморфном многообразии $S_2\times \mathbf{C}P^1$ (см. также [15]). При этом очевидно соответствие между $(\theta_1:\theta_2)\in \mathbf{C}P^1$ и $\varphi=\theta_1/\theta_2$.

## 5. Асимптотика функций $\mathcal{F}, \sqrt{\mathcal{F}}, \mathcal{F}^{-1}$ в окрестностях точек $\mathcal{F}=0,\ \mathcal{F}=\infty$

Функция $\mathcal{F}$ является в общем случае вещественной эллиптической функцией, поэтому ее периоды имеют вид $\omega_1, i\omega_2, \quad \omega_i\in\mathbf{R}$. Кроме того, точки, в которых $\mathcal{F}=0$ или $\mathcal{F}=\infty$ являются сопряженными, поэтому далее, получая асимптотики функций $\mathcal{F},\varphi,\theta$ в этих точках, мы будем указывать только одну из них. Из дифференциального уравнения (6) стандартным образом получаем асимптотику особых точек $\mathcal{F}$.

**Предложение 1.** *Асимптотика функций $\mathcal{F}, \sqrt{\mathcal{F}}, \mathcal{F}^{-1}$ в точке $\mathcal{F}=\infty$ имеет вид:*

$$\mathcal{F} = -\frac{2A_3}{t^2}+\frac{2}{3}\mathcal{H}+\left(\frac{\sigma}{10}-\frac{2\mathcal{H}^2}{15A_3}\right)t^2+\ldots,\quad \sigma=\frac{\mathcal{H}^2-\mathcal{T}\mathcal{R}}{A_3},$$

$$\mathcal{F}^{-1} = -\frac{t^2}{2A_3}-\frac{\mathcal{H}}{6A_3^2}t^4-\frac{1}{5A_3^2}\left(\frac{\sigma}{8}+\frac{\mathcal{H}^2}{9A_3}\right)t^6+\ldots,$$

$$\sqrt{\mathcal{F}} = \frac{\lambda}{t}+\frac{\mathcal{H}}{3\lambda}t+\left(\frac{\sigma}{20\lambda}-\frac{\mathcal{H}^2}{15A_3\lambda}-\frac{\mathcal{H}^2}{18\lambda^3}\right)t^3+\ldots,\quad \lambda=i\sqrt{2A_3}.$$

*Асимптотика функций $\mathcal{F}, \sqrt{\mathcal{F}}, \mathcal{F}^{-1}$ в одной из сопряженных точек $\mathcal{F}=0$ имеет вид:*

$$\mathcal{F}=\mu t-\frac{\sigma}{2}t^2+\frac{2\mathcal{H}\mu}{3A_3}t^3+\ldots,\quad \mu=4i\kappa=\frac{i\mathcal{M}\sqrt{\mathcal{R}}}{A_3}$$

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{\mu t} + \frac{\sigma}{2\mu^2} + \left(\frac{\sigma^2}{4\mu^3} - \frac{2\mathcal{H}}{3A_3\mu}\right) t + \ldots,$$

$$\sqrt{\mathcal{F}} = \sqrt{\mu} t^{1/2} - \frac{\sigma}{4\sqrt{\mu}} t^{3/2} + \left(\frac{\sqrt{\mu}\mathcal{H}}{3A_3} - \frac{\sigma^2}{32\mu^{3/2}}\right) t^{5/2} + \ldots,$$

*Доказательство.* Как уже было отмечено, асимптотика функций $\mathcal{F}$, $\sqrt{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}^{-1}$ находится из (6). □

## 6. Асимптотика функции $\varphi$ в окрестностях точек $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{F} = \infty$

**Предложение 2.** *Функция $\varphi$ в окрестности точки $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{F} = 4i\kappa t + \ldots$ при $t \to 0$, имеет с точностью до комплексного сопряжения следующие асимптотики:*

$$\varphi = -i + ct^{1/2} + \frac{ic^2}{2} t - \left(\frac{ic\sigma}{16\kappa} + \frac{c^3}{4} + 2\nu i \sqrt{\kappa i}\right) t^{3/2} + \ldots, \tag{12}$$

*где $c$ — свободный параметр*

*либо*

$$\varphi = i + \nu i \sqrt{\kappa i}\, t^{3/2} + \ldots \tag{13}$$

*Доказательство.* Итак, согласно условию, при $t \to 0$ $\mathcal{F} = 4i\kappa t + \ldots$. Предположим, что при этом $1 + \varphi^2$ (см. (10)) не стремится к нулю, то есть $\varphi$ не стремится к $\pm i$. В этом случае $\nu\sqrt{\mathcal{F}}\varphi$ мало по сравнению с $-\frac{\kappa}{\mathcal{F}}(\varphi^2 + 1)$.

$$\dot{\varphi} = \frac{i}{4t}(\varphi^2 + 1) + \ldots, t \to 0 \Rightarrow$$

$$\varphi = \operatorname{tg}(\frac{i}{4}\ln(ct)) + \ldots = -i\frac{(ct)^{-1/4} - (ct)^{1/4}}{(ct)^{-1/4} + (ct)^{1/4}} \to -i, t \to 0.$$

Мы получаем противоречие, значит в сопряженных точках при $\mathcal{F} = 0$ $\varphi \to \mp i$.

Пусть при $t \to 0$ $\quad \mathcal{F} = 4i\kappa t + \ldots$. и $\varphi \to -i$.

Подставим $\varphi = -i + \varphi_1$ в уравнение (10):

$$\dot{\varphi}_1 = \nu\sqrt{\mu t}\varphi_1 + \frac{1}{2t}\varphi_1 + \ldots, t \to 0, \varphi_1 \to 0$$

и получим приближенное решение $\varphi_1$, а значит и $\varphi$ :

$$\varphi = -i + ct^{1/2} + \ldots, t \to 0,$$

$c$ — свободный параметр. Последующие итерации дают искомый результат.

Пусть при $t \to 0$ $\mathcal{F} = 4i\kappa t + \ldots$ и $\varphi \to i$. В этом случае мы не можем найти однопараметрическое семейство асимптотик, но одна искомая асимптотика все же имеется

$$\varphi = i + \nu i\sqrt{\kappa i}\, t^{3/2} + \ldots$$

Рассмотрим возмущение этого решения. Полагая

$$\varphi = i + \nu i\sqrt{\kappa i}\, t^{3/2} + \varepsilon\Phi(t)$$

и пренебрегая слагаемыми с $\varepsilon$ порядка выше 1, получаем $\Phi(t) = -ct^{-1/2} + \ldots$. Это означает, что при малом возмущении рассматриваемого решения $\varphi$ не стремится к $i$ при $t \to 0$.

Как уже было показано $\varphi \to -i$ , если $\varphi$ не стремится к $i$, значит, обе приведенные асимптотики исчерпывают все возможности для решения $\varphi$ при условии $\mathcal{F} = 4i\kappa t + \ldots,\ t \to 0$. □

**Предложение 3.** *Асимптотика функции $\varphi$ в окрестности точки $\mathcal{F} = \infty$ имеет вид*

$$\varphi = ct^{\lambda\nu} + \ldots + \frac{\kappa t^3}{2A_3(3 - \lambda\nu)} + \ldots$$

*Доказательство.* Предположим, что при $t \to 0$ $\mathcal{F} \to \infty$, тогда $\dot{\varphi} = \nu\sqrt{\mathcal{F}}\varphi + \ldots \Rightarrow \ln\varphi = \nu\lambda\ln t + \ldots \Rightarrow$

$$\varphi = ct^{\lambda\nu} + \ldots$$

и далее применяем стандартные итерации. □

## 7. Асимптотика функций $\theta_1, \theta_2$ в окрестностях точек $\mathcal{F} = 0,\ \mathcal{F} = \infty$

Итак, функции $\theta_1, \theta_2$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \frac{\nu}{2}\sqrt{\mathcal{F}}\theta_1 - \frac{\kappa}{\mathcal{F}}\theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = \frac{\kappa}{\mathcal{F}}\theta_1 - \frac{\nu}{2}\sqrt{\mathcal{F}}\theta_2. \end{cases}$$

Поскольку $\varphi = \theta_1/\theta_2$, то из второго уравнения этой системы следует

$$(\ln\theta_2)^{\cdot} = \frac{\kappa}{\mathcal{F}}\varphi - \frac{\nu}{2}\sqrt{\mathcal{F}}.$$

Необходимые асимптотики $\varphi, \mathcal{F}, \sqrt{\mathcal{F}}$ уже известны, поэтому не сложно получить и асимптотики $\theta_i$.

**Предложение 4.** *В окрестности точки $\mathcal{F} = 0$ функции $\theta_i$ с точностью до сопряжения имеют асимптотику*

$$\begin{cases} \theta_1 = -ic_1 t^{-1/4} + ic_2 t^{1/4} + \ldots, \\ \theta_2 = c_1 t^{-1/4} + c_2 t^{1/4} + \ldots, \end{cases}$$

*где $c_1, c_2$ — свободные параметры.*

**Замечание 3.** Функция $\varphi$ в окрестности точки $\mathcal{F} = 0$ имеет две различные асимптотики. Обе они соответствуют асимптотике функций $\theta_i$ из доказанного предложения: асимптотика (12) соответствует случаю $c_1 \neq 0$, асимптотика (13) — $c_1 = 0$.

**Предложение 5.** *В окрестности точки $\mathcal{F} = \infty$ функции $\theta_i$ имеют асимптотику*

$$\begin{cases} \theta_1 = c_1 t^{\nu\lambda/2} + c_1 \dfrac{\nu\mathcal{H}}{12\lambda} t^{2+\nu\lambda/2} + c_2 \dfrac{\kappa}{2A_3(3-\nu\lambda)} t^{3-\nu\lambda/2} + \ldots, \\ \theta_2 = c_2 t^{-\nu\lambda/2} - c_2 \dfrac{\nu\mathcal{H}}{12\lambda} t^{2-\nu\lambda/2} - c_1 \dfrac{\kappa}{2A_3(3+\nu\lambda)} t^{3+\nu\lambda/2} + \ldots, \end{cases}$$

*где $c_1, c_2$ — свободные параметры.*

## 8. Асимптотика $\alpha$-особых точек функций $(p, \gamma)$

Согласно [13, 16], (см. также [6] и [5]) асимптотика $\alpha$-точек решений уравнений Эйлера-Пуассона в случае Гесса имеет вид:

$$\begin{cases} p(t) = \widetilde{p}^{\,0} t^{-1} + \alpha_1 u_1 + \sum_2^4 \alpha_i v_i t + o(t), \\ \gamma(t) = \alpha_1 v_1 t^{-1} + \kappa_0 v_1 + \alpha_4 v\, \widetilde{p}^{\,0} + \alpha_5 v_{-1} t + o(t), \end{cases} \tag{14}$$

где $\widetilde{p}^{\,0}$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} A\, \widetilde{p}^{\,0} \times \widetilde{p}^{\,0} + A\, \widetilde{p}^{\,0} = 0, \\ \left\langle A\, \widetilde{p}^{\,0}, r \right\rangle = 0, \end{cases} \tag{15}$$

и имеет вид

$$\left( \pm i\sqrt{\frac{A_2 A_3}{-B_{12} B_{31}}}, \pm i\sqrt{\frac{A_1 A_3}{-B_{12} B_{23}}}, -\sqrt{\frac{A_1 A_2}{B_{23} B_{31}}} \right),$$

$v_1, v_{-1}$ — собственные векторы оператора $\xi \to \widetilde{p}^{\,0} \times \xi$ с собственными значениями 1 и -1 соответственно (в силу (15) $v_1 = A\, \widetilde{p}^{\,0}$),

$\{v_2, v_3\}$ — собственные векторы оператора $\mathbf{D} : \xi \to A^{-1}\Big(A\, \widetilde{p}^{\,0} \times \xi + A\xi \times \widetilde{p}^{\,0}\Big)$, с собственным значением 1,

$v_4 = -(\mathbf{D} - E)^{-1} A^{-1} (\widetilde{p}^{\,0} \times r)$ (в силу вырожденности оператора $\mathbf{D}$ вектор $v_4$ определен по модулю пространства $\{v_2, v_3\}$,

$u_1 = -\mathbf{D}^{-1} A^{-1} (v_1 \times r)$,

$\alpha_1, \ldots \alpha_5$ — свободные параметры.

## 9. Асимптотика $\beta$-особых точек функций $(p, \gamma)$

Согласно [13,16] (см. также [6] и [5]) асимптотика $\beta$-особых точек решений уравнений Эйлера-Пуассона имеет вид:

$$\begin{cases} p(t) & = \widetilde{p}^{\,0} t^{-1} + \beta_0 u_0 t^{\lambda_0 - 1} + \beta^0 u^0 t^{\lambda^0 - 1} + \beta_2 u_2 t + \beta_3 u_3 t^2 + \\ & + \beta_4 u_4 t^3 t + \ldots + \displaystyle\sum_{i+j \geq 2} \beta_0^i (\beta^0)^j \psi_{ij} t^{i\lambda_0 + j\lambda^0 - 1} + \ldots \\ \gamma(t) & = \widetilde{\gamma}^{\,0} t^{-2} + \beta_0 v_0 t^{\lambda_0 - 2} + \beta^0 v^0 t^{\lambda^0 - 2} + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 t + \\ & + \beta_4 v_4 t^2 + \ldots + \displaystyle\sum_{i+j \geq 2} \beta_0^i (\beta^0)^j \chi_{ij} t^{i\lambda_0 + j\lambda^0 - 2} + \ldots \end{cases} \tag{16}$$

здесь

$$\widetilde{p}^{\,0}_1 = \sqrt{\frac{(2A_2 - \varrho)(2A_3 - \varrho)}{B_{12} B_{31}}}, \sigma,$$

$\widetilde{\gamma}^{\,0}$ — собственный вектор оператора $\xi \to \widetilde{p}^{\,0} \times \xi$ с собственным значением $-2$, $\varrho$ находится из уравнения

$$\sum_{\sigma} r_1 (A_1 - \varrho) \sqrt{(2A_2 - \varrho)(2A_3 - \varrho) B_{23}} = 0, \tag{17}$$

$(u_k, v_k)$, $k = 2, 3, 4$, $(u_0, v_0)$, $\big(u^0, v^0\big)$ — собственные векторы оператора

$$\mathbf{H} : (Ap, \gamma) \to \Big(A\, \widetilde{p}^{\,0} \times p + Ap \times \widetilde{p}^{\,0} + \gamma \times r + Ap, \widetilde{\gamma}^{\,0} \times p + \gamma \times \widetilde{p}^{\,0} + 2\gamma\Big)$$

$$\lambda_0^{(0)} = \frac{1}{2} \overset{(+)}{-} \sqrt{\frac{1}{4} - S},$$

$$S = \frac{S_1}{S_2}, \tag{18}$$

$$S_1 = \frac{(2\langle A\gamma, \delta\rangle + \langle Ap, p\rangle)(\langle A\gamma, \delta\rangle + \langle Ap, p\rangle)}{\langle A\gamma, \gamma\rangle} - \frac{3\, \langle p, r\rangle^2}{\langle \gamma, r\rangle} - 2\, \langle A\delta, \delta\rangle + 2\, \langle \delta, r\rangle,$$

$$S_2 = \frac{\langle p, r\rangle^2}{2\langle \gamma, r\rangle} - \frac{\langle A\gamma, \delta\rangle^2}{\langle A\gamma, \gamma\rangle} + \langle A\delta, \delta\rangle,$$

в этой формуле для простоты мы заменили $\widetilde{p}^{\,0}, \widetilde{\gamma}^{\,0}$ на $p, \gamma$, а $\delta$ удовлетворяет соотношениям $p \times \delta + 2\delta = 0, \langle \delta, \gamma\rangle = 2$ — и, наконец, $\beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \beta_0,\ \beta^0$ — свободные параметры.

Для сходимости ряда, продолжающего асимптотику (16), надо положить $t = e^{i(\bar\lambda_0 - \bar\lambda^0)\theta}$, $\theta \to +\infty$.

В случае Гесса уравнение (17) можно решить, но удобнее сначала рассмотреть уравнение $\left\langle A\,\widetilde{p}^{\,0}, r\right\rangle = 0$ :

$$A_1^2 \frac{(2A_2 - \varrho)(2A_3 - \varrho)}{B_{12}B_{31}} r_1^2 = A_2^2 \frac{(2A_3 - \varrho)(2A_1 - \varrho)}{B_{23}B_{12}} r_2^2,$$

корни которого равны $2A_3$ и 0 и удовлетворяют (17).

Пусть вначале $\varrho = 2A_3$. Опуская простые выкладки, приведем все же промежуточные результаты. Итак, в рассматриваемом случае в (18) $p = (0, 0, \pm 2i)$, $\gamma = \gamma_1(1, \pm i, 0)$, $\gamma_1 = 2A_3(r_1 \pm ir_2)^{-1}$, $\delta = \gamma_1^{-1}(1, \mp i, 0)$, $\langle A\gamma, \delta\rangle = A_1 + A_2$, $\langle Ap, p\rangle = -4A_3$, $\langle \gamma, r\rangle = 2A_3$, $\langle p, r\rangle = 0$, $\langle A\gamma, \gamma\rangle = B_{12}\gamma_1^2$, $\langle A\delta, \delta\rangle = B_{12}\gamma_1^{-2}$, $\langle \delta, r\rangle = \mathcal{R}(2A_3)^{-1}$, $S = 2A_3\nu^2 \mp i\nu\sqrt{2A_3}$.

Итак,

$$\lambda_0 = \mp\nu i\sqrt{2A_3}, \quad \lambda^0 = 1 \pm \nu i\sqrt{2A_3}.$$

Пусть теперь $\varrho = 0$. В этом случае вектор $\widetilde{p}^{\,0}$ равен

$$2\left(\pm i\sqrt{\frac{A_2A_3}{-B_{12}B_{31}}}, \pm i\sqrt{\frac{A_1A_3}{-B_{12}B_{23}}}, -\sqrt{\frac{A_1A_2}{B_{23}B_{31}}}\right),$$

$\left\langle \widetilde{\gamma}^{\,0}, r\right\rangle = 0$, формула (18) упрощается и принимает вид $S = 6$; соответственно,

$$\lambda_0 = -2, \quad \lambda^0 = 3.$$

Формальный ряд, продолжающий асимптотику (16), является рядом Лорана, причем заранее неясно, как находить его коэффициенты и, тем более непонятно, будет ли он сходящимся. Заметим также, что в рассматриваемом случае полученный ряд для $(p, \gamma)$ не имеет неоднозначных слагаемых.

## 10. Соответствие особых точек решений $(p, \gamma), \theta, \varphi$

**Определение 1.** *Будем называть $\beta(\varrho)$-особыми точками $\beta$-особые точки, соответствующие корню $\varrho$ уравнения* (17).

**Предложение 6.** *Решения $(p,\gamma)$ имеют особые точки типа $\beta(2A_3)$, если и только если $\mathcal{F} \to \infty$.*

*Доказательство.* Необходимость. Пусть $\mathcal{F} \not\to \infty$. Тогда $p \to \infty$ только при условии $\varphi \to \pm i$, но тогда $(p_1 : p_2 : p_3) \to (\pm k_1 : \pm i k_2 : 2k_3)$, а значит, рассматриваемые особые точки не являются $\beta(2A_3)$-точками.

Достаточность. Пусть $\mathcal{F} \to \infty$. Согласно (7) $(p,\gamma) \to \infty$ и при этом $(p_1 : p_2 : p_3) = (k_1 : k_2 : (1-\varphi^2)/\varphi)$. Из асимптотики $\varphi$ в точке $\mathcal{F} = \infty$ следует, что если входить в особую точку по спирали $t = e^{i(\lambda_0 - \lambda^0)\theta}$, $\theta \to +\infty$, то $\varphi \to 0$ или $\varphi \to \infty$ в зависимости от знака направления вращения спирали, значит, $(1-\varphi^2)/\varphi \to \infty$ и $(p_1 : p_2 : p_3) \to (0 : 0 : 1)$. Ясно, что рассматриваемая особая точка не является ни $\alpha$-точкой, ни $\beta(0)$-точкой, а по теореме о полной классификации особых точек ( [15]) может быть только $\beta(2A_3)$-точкой. □

**Замечание 4.** Предложение можно было бы доказать и не ссылаясь на классификационную теорему, но тогда необходимо по формулам (7)–(9) более точно определить асимптотику $(p,\gamma)$ при $\mathcal{F} \to \infty$.

Дополнительным обстоятельством, подтверждающим предложение является наличие ветвления одинакового вида $(t^{\nu\sqrt{2A_3}})$ и для $\beta(2A_3)$-точки и для $\varphi$ при $\mathcal{F} \to \infty$.

**Предложение 7.** *Пусть $\varphi \to \pm i$, тогда если*

1) $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_0 \neq 0, \infty$, *решение $(p,\gamma)$ имеет $\alpha$-особую точку;*

2) $\mathcal{F} = 4i\kappa t + \ldots$, *при $t \to 0, \varphi \to -i$,*

1.1) $c \neq 0$ ($c$ *— свободный параметр представления* (12)), *решение $(p,\gamma)$ не имеет особых точек;*

1.2) $c = 0$, *решение $(p,\gamma)$ имеет $\alpha$-особую точку.*

3) $\mathcal{F} = 4i\kappa t + \ldots$, *при $t \to 0$, $\varphi \to i$, решение $(p,\gamma)$ имеет $\beta(0)$-особую точку.*

Для доказательства достаточно подставить асимптотики $\varphi$ в (7)–(9).

## 11. Однозначные решения для твердого тела Гесса

**Теорема 2.** *Все однозначные решения уравнений Эйлера-Пуассона* (1) *в случае Гесса имеют вид:*

$$\begin{cases} p_1(t) \equiv p_2(t) \equiv \gamma_3(t) \equiv 0, \\ p_3(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{F}}{A_3}}, \\ \gamma_1 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_1(\mathcal{H}-\mathcal{F}) + A_3 r_2 \dot{p}_3), \\ \gamma_2 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_2(\mathcal{H}-\mathcal{F}) - A_3 r_1 \dot{p}_3), \end{cases} \tag{19}$$

*где $\mathcal{F}$ есть эллиптическая функция, задаваемая уравнением*

$$A_3^2(\dot{\mathcal{F}})^2 = 2A_3\mathcal{T}\mathcal{R}\mathcal{F} - 2A_3\mathcal{F}(\mathcal{F}-\mathcal{H})^2, \tag{20}$$

*$\mathcal{H}, \mathcal{T}$ — значения интегралов энергии и тривиального интеграла (при этом интеграл $\mathcal{M}$ момента решения (19) равен нулю)*

*или находятся из решения линейной системы:*

$$\begin{cases} \dot\theta_1 = (\nu/2)\sqrt{\mathcal{F}_0}\theta_1 - \dfrac{\kappa}{\mathcal{F}_0}\theta_2, \\ \dot\theta_2 = \dfrac{\kappa}{\mathcal{F}_0}\theta_1 - (\nu/2)\sqrt{\mathcal{F}_0}\theta_2, \end{cases} \tag{21}$$

*где $\mathcal{F}_0$ — корень полинома $P_3(\mathcal{F}) = 2A_3\mathcal{T}\mathcal{R}\mathcal{F} - 2A_3\mathcal{F}(\mathcal{F}-\mathcal{H})^2 - \mathcal{M}^2\mathcal{R}$,*

$$\begin{cases} p_i = k_i\sqrt{\mathcal{F}_0}\,\dfrac{\theta_1\theta_2}{\theta_1^2+\theta_2^2}, \quad i = 1,2, \\ p_3 = k_3\sqrt{\mathcal{F}_0}\,\dfrac{\theta_1^2-\theta_2^2}{\theta_1^2+\theta_2^2}, \\ \gamma_1 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_1(\mathcal{H}-\mathcal{F}_0) + r_2(A_3\dot p_3 - B_{12}p_1p_2)), \\ \gamma_2 = \frac{1}{\mathcal{R}}(r_2(\mathcal{H}-\mathcal{F}_0) - r_1(A_3\dot p_3 - B_{12}p_1p_2)), \\ \gamma_3 = \frac{1}{r_2}(B_{23}p_2p_3 - A_1\dot p_1), \end{cases} \tag{22}$$

*где*

$$k_2 = -\frac{A_1r_1}{A_2r_2}k_1, \quad k_1 = 2\sqrt{\frac{2B_{23}}{-B_{12}A_1}}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{2}{A_3}}.$$

*Все решения, отличные от приведенных выше, имеют $\beta(2A_3)$-особые точки ветвления с асимптотикой, в которой имеются с точностью до коэффициента слагаемые $t^{n_1+n_2\nu i\sqrt{2A_3}}$, $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$.*

*Доказательство.* Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела (1) в случае Гесса и ее представление (10) с помощью уравнения Риккати. Будем считать, что значения первых интегралов $\mathcal{H}, \mathcal{M}, \mathcal{T}$ фиксированы.

Функция $\mathcal{F}$ может быть постоянной только, если она тождественно равна корню полинома правой части (20). Тогда мы получаем линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для нахождения $\theta_i$ и далее очевидным образом получаем однозначное решение задачи Гесса.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $\mathcal{F}$ не является константой. Начнем со случая общего положения, когда $\mathcal{F}$ — двоякопериодическая функция. Так функция $\mathcal{F}$ не является константой, то в некоторых точках она стремится в бесконечность. Как следует из Предложения 6 особые точки решения $\varphi$ при $\mathcal{F} \to \infty$ соответствуют

$\beta(2A_3)$-особым точкам функций $(p,\gamma)$. Почти все эти решения имеют ветвление $t^{n_1+n_2\nu i\sqrt{2A_3}}$. Исключение составляет решение $(p,\gamma)$, в асимптотике которого $\beta^0=\beta_0=0$, а оставшиеся параметры $\beta_2,\beta_3,\beta_4$ однозначно определяются значениями первых интегралов $\mathcal{H},\mathcal{M},\mathcal{T}$. Среди решений $\varphi$ единственное однозначное решение имеет асимптотику $\varphi=\frac{\kappa t^3}{2A_3(3-\lambda\nu)}+\ldots$ как это следует из Предложения 2. Следовательно, мы имеем два представления одного и того же решения.

Поскольку во всех $\beta(2A_3)$-точках асимптотика рассматриваемого решения одинакова, то это решение — двоякопериодично.

Сумма вычетов двоякопериодической вектор-функции $(p,\gamma)$ в параллелограмме периодов равна нулю ( [11]), значит, как это следует из асимптотик (14), (16) особых точек, сумма всех векторов $\widetilde{p}^{\,0}$ для всех особых точек также равна нулю. Для $\beta(2A_3)$-точек это условие выполнено, так как $\widetilde{p}^{\,0}=(0,0,\pm 2i)$. Для $\alpha$ и $\beta(0)$-точек это условие не выполнено, значит, таких точек не может быть в однозначном решении. Но в таком случае функции $p_1(t),p_2(t)$ не имеют особых точек и поэтому тождественно равны начальным значениям.

С помощью представления (7) выражаем $\varphi$ через $\mathcal{F}$

$$\varphi=\frac{\kappa_i\sqrt{\mathcal{F}}+\sqrt{\kappa_i^2\mathcal{F}-4p_{i0}^2}}{2p_{i0}},\quad i=1,2.$$

Если $p_{10},p_{20}\neq 0$, то подставляем полученное представление в (10) и убеждаемся в том, что ни при каких значениях первых интегралов тождества нет.

Если $p_{10}=p_{20}=0$, то мы получаем искомое решение, но только при условии $\mathcal{M}=0$. Заметим, что при этом условии функция $\mathcal{F}$ однозначна, так как $\mathcal{F}=0\Rightarrow\dot{\mathcal{F}}=0$.

Наконец рассмотрим случай, когда полином $P_3(\mathcal{F})=2A_3\mathcal{T}\mathcal{R}\mathcal{F}-2A_3\mathcal{F}(\mathcal{F}-\mathcal{H})^2-\mathcal{M}^2\mathcal{R}$ в правой части (6) имеет кратные корни. Если $M=0$, мы снова получаем решения (19), (20), только для $\mathcal{F}$ с кратным корнем. Пусть $M\neq 0$. Корни полинома $2A_3\mathcal{T}\mathcal{R}\mathcal{F}-2A_3\mathcal{F}(\mathcal{F}-\mathcal{H})^2$ равны 0, $\mathcal{H}+\sqrt{\mathcal{T}\mathcal{R}}$ и $\mathcal{H}-\sqrt{\mathcal{T}\mathcal{R}}$, при этом $\mathcal{H}+\sqrt{\mathcal{T}\mathcal{R}}\geq 0$. Поскольку коэффициент при $\mathcal{F}^3$ отрицателен, то полином $P_3(\mathcal{F})$ имеет один неположительный некратный корень и один положительный кратный корень. Физически возможно только движение, когда $P_3(\mathcal{F})=A_3^2(\dot{\mathcal{F}})^2\geq 0$ и $\mathcal{F}=\frac{1}{2}\langle Ap,p\rangle\geq 0$. Но в таком случае $\mathcal{F}$ тождественно равно кратному положительному корню, и мы получаем решения (21), (22)

Итак, рассмотрены все возможные случаи, значит, найдены все однозначные решения уравнений Эйлера-Пуассона. $\square$

**Замечание 5.** Все решения, полученные в теореме 1, хорошо известны и приведены в конечном виде в [17].

**Замечание 6.** Как показал Ляпунов [12] все решения задачи о движении тяжелого твердого тела являются однозначными только в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Для других случаев движения твердого тела было бы желательно не только находить однозначные решения, но и доказывать полноту соответствующих списков, подобно тому как это сделано выше.

## 12. Параметрическое отображение последования

**Определение 2.** *Рассмотрим слоение, заданное на многообразии $T^2 \times \mathbf{C}P^1$ факторизацией потока уравнений Эйлера-Пуассона в случае Гесса. Пусть $\gamma$ — путь на $T^2$, соединяющий две точки (возможно совпадающие), в которых $\mathcal{F} = 0$ или $\mathcal{F} = \infty$. Путь $\gamma$ в силу имеющегося слоения поднимается в расслоение $T^2 \times \mathbf{C}P^1 \to T^2$ и задает отображение $\Phi_\gamma : \mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}P^1$, которое мы будем называть параметрическим отображением последования.*

**Замечание 7.** В отличие от классического определения отображения последования данное определение относится к предельному отображению окрестностей особых точек. Записанное в координатах это отображение есть вектор-функция из пространства свободных параметров одной особой точки в соответствующее пространство другой особой точки.

Очевиден следующий факт.

**Предложение 8.** *Параметрическое отображение последования является аналитическим, в частности, для функции $\varphi$ — это есть дробно-линейное отображение.*

**Теорема 3.** *Для комплексного решения общего положения в случае Гесса существует предельное периодическое решение при $t \to \infty$.*

*Доказательство.* Рассмотрим параметрическое отображение последования за период функции $\mathcal{F}$ вдоль вещественной оси времени. Для функции $\varphi$ это будет дробно-линейное отображение; пусть оно имеет вид:

$$\varphi : c \to \frac{a_{11}c + a_{12}}{a_{21}c + a_{22}}\,.$$

Это отображение имеет две неподвижные точки, являющиеся корнями квадратного уравнения

$$a_{21}c^2 + (a_{22} - a_{11})c - a_{12} = 0$$

и равны

$$c_\infty = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2a_{21}}.$$

При бесконечном итерировании отображения $\Phi$ образ $\Phi^n c, n \in \mathbf{Z}^+$ точки $c$ будет стремиться к $c_{+\infty}$. Соответственно, при итерировании $\Phi^{-1}$ $\Phi^{-1}c \to c_{-\infty}$. Таким образом, предельным периодическим решением функции $\varphi$ будет периодическая функция $\varphi_+$ с постоянным свободным параметром асимптотики (12), равным $c_{+\infty}$ при $t \to +\infty$, и периодическая функция $\varphi_-$ с постоянным свободным параметром асимптотики $c_{-\infty}$ при $t \to -\infty$. □

## Литература


[1] W. Hess, *Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt* // Math. Ann., **37** (1890), N 2, 153–181.

[2] Н. Е. Жуковский, *Локсодромический маятник Гесса* // Труды отд-ния физ. наук общ-ва любит. естествознания, **5** (1893), вып. 2, 37–45.

[3] Б. К. Млодзеевский, П. А. Некрасов, *Об условиях существования асимптотических периодических движений в задаче Гесса* // Труды отд-ния физ. наук общ-ва любит. естествознания, **6** (1893), вып. 1, 43–52.

[4] П. А. Некрасов, *Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки* // Мат. сборник Кружка любителей мат. наук, **18** (1896), вып. 2, 161–274.

[5] Г. Г. Аппельрот, *По поводу §1 мемуара С. В. Ковалевской "Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe"* // Матем. сб. Кружка любителей мат. наук, **16** (1892), вып. 3, 483–507.

[6] С. В. Ковалевская, *Об одном свойстве системы дифференциальных уравнений, определяющей вращение твердого тела около неподвижной точки.* Научные труды. Изд-во АН СССР, Москва, 1948.

[7] П. А. Некрасов, *К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки* // Мат. сборник Кружка любителей мат. наук, **16** (1892), вып. 3, 508–517.

[8] С. А. Чаплыгин, *По поводу локсодромического маятника Гесса* // Труды отд-ния физ. наук общ-ва любит. естествознания, **7** (1894), вып. 1, 33–34.

[9] А. Брессан, *О прецессионных движениях твердого тела, относящихся к случаю Гесса* // Период. сб. перев. иностр. статей, Механика, **52** (1958), N 6, 153–158.

[10] А. М. Ковалев, *Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку* // Прикл. математика и механика, **32** (1968), вып. 6, 1111–1118.

[11] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций.* М.: Мир, 1979, с. 317.

[12] А. М. Ляпунов, *Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку* // Сообщения Харьковского мат. общ., **4** (1894), N 3, 1123–1140.

[13] А. В. Беляев, *Асимптотика решений уравнений Эйлера-Пуассона в особых точках решений* // Математическая физика. Анализ. Геометрия. **8** (2001), N 2, 128–142.

[14] A. V. Belyaev, *On single-valued solutions of the Euler-Poisson's equations* // Mat. Studii, **15** (2001), N 1, 93–104.

[15] A. V. Belyaev, *The factorization of the flow defined by the Euler-Poisson's equations* // Methods of Functional Analysis and Topology, **7** (2001), N 4, 18–30.

[16] A. V. Belyaev, *The characteristic system for the Euler-Poisson's equations* // Nonlinear boundary problems, National Academy of Ukraine Institute of Appl. Math and Mech., **9** (1999), 135–147.

[17] А. И. Докшевич, *Решения в конечном виде уравнений Эйлера-Пуассона.* К.: Наукова думка, 1992, с. 168.

## Сведения об авторах

**Александр Владимирович Беляев**

Донецкий институт рынка и
социальной политики,
бул. Шевченко, 4,
83050 Донецк,
Украина
*E-Mail:* `dimsp@mail.donbass.com`