Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 2, 281 – 294

Миноры линейной стохастической системы

Александр С. Чани

(*Представлена С. Я. Махно*)

Аннотация. Рассматриваются матричные линейные стохастические системы общего вида. Выводятся стохастические уравнения для миноров решений таких систем.

2000 MSC. 60H25, 60H10, 60G20.

Ключевые слова и фразы. Линейная стохастическая система, стохастический дифференциал, формула Ито, минор системы.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ выделено неубывающее семейство σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющее условию непрерывности справа. На $\Omega \times [0, T]$ определим $\mathcal{F}_t$-измеримый процесс

$$Y_t = A_t + B_t + F_t + G_t, \qquad Y_0 = 0, \tag{1}$$

принимающий значения в пространстве $(L(R^n), \mathfrak{M})$, $n \geq 1$, где $L(R^n)$ — множество всех вещественных $n \times n$-матриц, наделенное борелевской σ-алгеброй $\mathfrak{M}$ относительно евклидовой нормы $\|\cdot\|$. По поводу компонент процесса Y_t примем следующие соглашения:

1) A_t — непрерывный процесс ограниченной вариации;

2) B_t — непрерывный локальный мартингал с характеристиками $\langle B\rangle_t$ и $\langle B \otimes B\rangle_t$, которые определяются из условий, что

$$B_t^2 - \langle B\rangle_t$$

есть локальный $\mathcal{F}_t$-мартингал со значениями в пространстве $L(R^n)$, а процесс

$$B_t \otimes B_t - \langle B \otimes B\rangle_t$$

является локальным $\mathcal{F}_t$-мартингалом со значениями в пространстве $L(L(R^n))$, образованном всеми вещественными $n^2 \otimes n^2$-матрицами (символ $\otimes$ означает тензорное произведение матриц);

Статья поступила в редакцию 2.02.2004

ISSN 1810 – 3200.

3) $F_t = \int_0^t \int f(s, U)\mu(ds, dU)$ есть локальный мартингал, компенсирующий свои скачки; причем $\mu = \nu - \pi$; ν — квазинепрерывная мера скачков; π — дуальная предсказуемая проекция ν; функция $f(t, U)$ $\mathcal{F}_t$-согласована, непрерывна справа по t при фиксированном U, $\mathfrak{M}$-измерима по U при фиксированном t и

$$\int\limits_0^t \int \|f(s, U)\|^2 \pi(ds, dU) < \infty, \qquad t \in [0, T];$$

4) $G_t = \int_0^t \int g(s, U)\nu_1(ds, dU)$ является процессом ограниченной вариации; функция $g(t, U)$ $\mathcal{F}_t$-согласована и конечна; ν_1 — мера скачков, конечная с вероятностью 1 на $[0, T] \times L(R^n)$ и не имеющая общих атомов с мерой ν.

Рассмотрим линейную стохастическую систему вида

$$X_t = E + \int\limits_0^t dY_s X_{s-}, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

где E — единичная матрица из $L(R^n)$. В работе [1] доказано, что при выполнении соответствующих условий определитель решения уравнения (2) удовлетворяет линейному стохастическому дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} |X_t| = 1 + \int\limits_0^t |X_{s-}| [d\,\mathrm{Sp}(A_s + B_s) + 2^{-1} d(\mathrm{Sp}\langle B \otimes B\rangle_s - \mathrm{Sp}\langle B\rangle_s) + \\ + \int (|E + f(s, U)| - 1 - \mathrm{Sp}\, f(s, U))\pi(ds, dU) + \\ + \int (|E + f(s, U)| - 1)\mu(ds, dU) + \\ + \int (|E + g(s, U) - 1|)\nu_1(ds, dU)]. \end{aligned} \tag{3}$$

В данной работе получено стохастическое дифференциальное уравнение для произвольного минора p-го порядка матрицы X_t. При этом правая часть уравнения в отличие от правой части (3) наряду с линейными членами содержит нелинейные слагаемые. Их появление объясняется тем, что минор p-го порядка является существенно более общим функционалом, нежели определитель.

С одной стороны, полученный результат является естественным обобщением уравнения для детерминанта стохастической полугруппы как минора максимального порядка. При этом выясняется, что уравнение для минора произвольного порядка в отличие от уравнения (3) не имеет замкнутой формы, то есть коэффиценты уравнения зависят не только от самого минора, но и от ряда других подматриц стохастической полугруппы. С другой стороны, это обобщение можно рассматривать как первый шаг для вывода характеристического уравнения рассматриваемой стохастической полугруппы, так как коэффициенты такого уравнения являются известными линейными функционалами от миноров соответствующего порядка.

Для точной формулировки результата введем необходимые понятия и обозначения.

Условимся элементы произвольной квадратной матрицы Q порядка $n \times n$ обозначать той же буквой с индексами вверху: $Q = \{Q^{ij}\}_1^n$, а ее определитель $|Q|$ рассматривать как функцию n^2 аргументов, каждый из которых является элементом матрицы Q.

Символом $\operatorname{grad}|Q|$ будем обозначать матрицу порядка $n \times n$, для которой (i,j)-элементом является $|Q|'_{Q^{ij}}$. Для двух матриц Q_1 и Q_2 порядка $n \times n$ (Q_1, Q_2) означает их скалярное произведение

$$(Q_1, Q_2) = \sum_{i,j=1}^{n} Q_1^{ij} Q_2^{ij}.$$

Если $1 \leq k \leq n$, то $S_{k,n}$ — совокупность всех строго возрастающих последовательностей, составленных из чисел $1, 2, \ldots, n$ по k чисел в каждой. Пусть $\alpha_k = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in S_{k,n}$, $\beta_r = (j_1, j_2, \ldots, j_r) \in S_{r,n}$. Матрица, для которой (p,q)-элементом является $Q^{i_p j_q} (p = 1, 2, \ldots, k;$ $q = 1, 2, \ldots, r)$, называется подматрицей матрицы Q, расположенной в строках с номерами из α_k и в столбцах с номерами из β_r, и обозначается символом $Q[\alpha_k|\beta_r]$. Обозначение $Q(\alpha_k|\beta_r]$ используется для подматрицы, составленной из строк, не перечисленных в α_k, и столбцов β_r матрицы Q. Аналогично этому, подматрица $Q[\alpha_k|\beta_r)$ содержит строки из α_k и не содержит столбцы из β_r, а подматрица $Q(\alpha_k|\beta_r)$ образована строками и столбцами, не указанными в α_k и β_r.

Пусть теперь α_p и β_p — произвольные элементы множества $S_{p,n}$. При $p = 1$ мы имеем тривиальный случай

$$X_t^{ij} = \delta_{ij} + \int_0^t \sum_{k=1}^{n} X_{s-}^{kj} d[A_s^{ik} + B_s^{ik} + \int_0^s \int f^{ik}(v,U)\mu(dv,dU) + \\ + \int_0^s \int g^{ik}(v,U)\nu_1(dv,dU)], \quad (4)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. При этом правая часть уравнения зависит не только от X_t^{ij}, а является функцией от всех одномерных миноров матрицы X_t, находящихся в j-м столбце. Другими словами, при фиксированном j соотношения (4) нужно рассматривать как систему уравнений, связывающую миноры $\{X_t^{ij},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Для произвольного $1 \le p \le n$ в силу принятых обозначений из уравнения (2) имеем

$$X_t[\alpha_p|\beta_p] = E[\alpha_p|\beta_p] + \left(\int\limits_0^t dY_s X_{s-}\right)[\alpha_p|\beta_p] =$$

$$= E[\alpha_p|\beta_p] + \int\limits_0^t dY_s[\alpha_p|\alpha_n]X_{s-}[\alpha_n|\beta_p] =$$

$$= E[\alpha_p|\beta_p] + \int\limits_0^t dY_s[\alpha_p|\beta_p]X_{s-}[\beta_p|\alpha_p] + \int\limits_0^t dY_s[\alpha_p|\beta_p)X_{s-}(\beta_p|\alpha_p].$$

В частности, для главной подматрицы p-го порядка $X_t[\alpha_p|\alpha_p]$ уравнение имеет вид

$$X_t[\alpha_p|\alpha_p] = E[\alpha_p|\alpha_p] + \int\limits_0^t dY_s[\alpha_p|\alpha_p]X_{s-}[\alpha_p|\alpha_p] + \\ + \int\limits_0^t dY_s[\alpha_p|\alpha_p)X_{s-}(\alpha_p|\alpha_p].$$

В отличие от (2) в его правой части присутствует третье дополнительное слагаемое. Поэтому уже в этом частном случае нельзя получить уравнения для минора $|X_t[\alpha_p|\alpha_p]|$ простым применением формулы (3).

Сначала мы дадим вывод соответствующего уравнения, а затем сформулируем полученный результат в виде теоремы. Как и при выводе уравнения (3) для вычисления $d|X_t[\alpha_p|\beta_p]|$ воспользуемся формулой Ито ([2], с. 211, теорема 6). Условия применимости формулы Ито будут приведены в формулировке теоремы, а пока сделаем формальные преобразования.

Пусть $Q\begin{pmatrix} i_1, & \ldots, & i_k \\ j_1, & \ldots, & j_k \end{pmatrix}$ означает минор матрицы Q, образованный строками $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ и столбцами $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$, а

$\overline{Q}\begin{pmatrix} i_1, & \dots, & i_k \\ j_1, & \dots, & j_k \end{pmatrix}$ — его алгебраическое дополнение. Используя разложения Лапласа для определителя $|Q|$

$$\sum_{i=1}^{n} Q\binom{j}{i}\overline{Q}\binom{k}{i} = \sum_{i=1}^{n} Q\binom{i}{j}\overline{Q}\binom{i}{k} = \begin{cases} 0, \text{ если } j \neq k; \\ |Q|, \text{ если } j = k, \end{cases}$$

и

$$\sum_{1 \leq j < r \leq n}^{n} Q\begin{pmatrix} i & k \\ j & r \end{pmatrix} \overline{Q}\begin{pmatrix} l & p \\ j & r \end{pmatrix} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq l \text{ или } k \neq p; \\ |Q|, \text{ если } i = l \text{ и } k = p, \end{cases}$$

легко посчитать частные производные первого и второго порядков функции $|Q|$

$$|Q|'_{Q^{ij}} = \overline{Q}\binom{i}{j}; \tag{5}$$

$$|Q|''_{Q^{ij}Q^{kr}} = \begin{cases} 0, \text{ если } i = k \text{ или } j = r; \\ \overline{Q}\begin{pmatrix} i & k \\ j & r \end{pmatrix} \text{ если } i < k \text{ и } j < r; \\ -\overline{Q}\begin{pmatrix} i & k \\ j & r \end{pmatrix} \text{ если } i < k \text{ и } r < j. \end{cases} \tag{6}$$

Для минора p-го порядка $|Q[\alpha_p|\beta_p]|$ формулы (5), (6) имеют вид

$$|Q[\alpha_p|\beta_p]|'_{Q^{ij}} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \notin \alpha_p \text{ или } j \notin \beta_p; \\ \overline{Q}[\alpha_p|\beta_p]\binom{i}{j}, \text{ если } i \in \alpha_p \text{ и } j \in \beta_p; \end{cases} \tag{7}$$

$$|Q[\alpha_p|\beta_p]|''_{Q^{ij}Q^{kr}} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } \{i,k\} \not\subset \alpha_p, \text{ или } \{j,r\} \not\subset \beta_p, \text{ или } i = k, \text{ или } j = r; \\ \overline{Q}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} i & k \\ j & r \end{pmatrix} \text{ если } \{i,k\} \subset \alpha_p, \ \{j,r\} \subset \beta_p, \ i < k, \ j < r; \\ -\overline{Q}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} i & k \\ r & j \end{pmatrix} \text{ если } \{i,k\} \subset \alpha_p, \ \{j,r\} \subset \beta_p, \ i < k, \ r < j. \end{cases} \tag{8}$$

В силу (4) дифференциал произвольного элемента матрицы $X_t[\alpha_p|\beta_p]$ имеет вид

$$dX_t^{ij}[\alpha_p|\beta_p] = \sum_{k=1}^{n} X_{t-}^{kj} d[A_t^{ik} + B_t^{ik} + \int_0^t \int f^{ik}(s,U)\mu(ds,dU) +$$

$$+ \int_0^t \int g^{ik}(s,U)\nu_1(ds,dU)], \quad i \in \alpha_p, \ j \in \beta_p.$$

По формуле Ито имеем

$$
\begin{aligned}
d|X_t[\alpha_p|\beta_p]| = {}& \sum_i^{\alpha_p}\sum_j^{\beta_p}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\binom{i}{j}\sum_k^{\alpha_n} X_{t-}^{kj} d(A_t^{ik}+B_t^{ik})+\\
&+2^{-1}\sum_{i,k}^{\alpha_p}\sum_{j,r}^{\beta_p}|Q[\alpha_p|\beta_p]|''_{Q^{ij}Q^{kr}}\Big|_{Q[\alpha_p|\beta_p]=X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]}\times\\
&\times\sum_{l,m}^{\alpha_n} X_{t-}^{l_j} X_{t-}^{mr} d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t+\\
&+\int\Bigg(\Big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]+f(t,U)[\alpha_p|\alpha_n]X_{t-}[\alpha_n|\beta_p]\Big|-\Big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\Big|-\\
&-\sum_i^{\alpha_p}\sum_j^{\beta_p}\overline{X}_{t-}\binom{i}{j}\sum_k^{\alpha_n} X_{t-}^{kj} f^{ik}(t,U)\Bigg)\pi(dt,dU)+\\
&+\int\Big(\Big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]+f(t,U)[\alpha_p|\alpha_n]X_{t-}[\alpha_n|\beta_p]\Big|-\Big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\Big|\Big)\mu(dt,dU)+\\
&+\int\Big(\Big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]+g(t,U)[\alpha_p|\alpha_n]X_{t-}[\alpha_n|\beta_p]\Big|-\Big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\Big|\Big)\nu_1(dt,dU).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Здесь символы $\sum^{\alpha_p}$, $\sum^{\beta_p}$, $\sum^{\alpha_n}$ означают суммирование по множествам индексов α_p, β_p, α_n соответственно.

С помощью формул (7) и (8) преобразуем слагаемые в правой части (9) (обозначим их σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 и σ_5 соответственно) к более простому виду. Для первого слагаемого получим

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 = {}& \sum_i^{\alpha_p}\sum_j^{\beta_p}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\binom{i}{j}\sum_k^{\alpha_p} X_{t-}^{kj} d(A_t^{ik}+B_t^{ik})+\\
&+\sum_i^{\alpha_p}\sum_j^{\beta_p}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\binom{i}{j}\left(\sum_k^{\alpha_n}-\sum_k^{\alpha_p}\right)X_{t-}^{kj} d(A_t^{ik}+B_t^{ik})=\\
&=\sum_i^{\alpha_p}\left(\sum_j^{\beta_p}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\binom{i}{j}X_{t-}\binom{i}{j}\right)d(A_t^{ii}+B_t^{ii})+\\
&+\sum_i^{\alpha_p}\sum_{k\neq i}^{\alpha_p}\left(\sum_j^{\beta_p}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\binom{i}{j}X_{t-}\binom{k}{j}\right)d(A_t^{ik}+B_t^{ik})+\\
&+\sum_i^{\alpha_p}\sum_j^{\beta_p}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\binom{i}{j}\left(\sum_k^{\alpha_n}-\sum_k^{\alpha_p}\right)X_{t-}\binom{k}{j}d(A_t^{ik}+B_t^{ik}).
\end{aligned}
$$

Так как для любого индекса k из α_p, не равного i,

$$
\sum_j^{\beta_p}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\binom{i}{j}X_{t-}\binom{k}{j}=0,
$$

и для любого $i \in \alpha_p$

$$\sum_{j}^{\beta_p} \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\binom{i}{j} X_{t-}\binom{i}{j} = |X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]|,$$

то

$$\begin{aligned}\sigma_1 = |X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]|d\,\mathrm{Sp}(A_t[\alpha_p|\beta_p] + B_t[\alpha_p|\beta_p])+ \\ + \big(\mathrm{grad}\,|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]|,\ d(A_t + B_t)[\alpha_p|\alpha_p)X_{t-}(\alpha_p|\beta_p]\big).\end{aligned}$$

Преобразование σ_2 проведем в несколько этапов. Сначала заметим, что в σ_2 слагаемые по индексам i, j, k, r при $i = k$ или $j = r$ равны нулю в силу равенства нулю вторых производных функции $|Q|$. Оставшиеся слагаемые по тем же индексам сгруппируем следующим образом:

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\sum_{i\neq k}^{\alpha_p}\sum_{j\neq r}^{\beta_p} = \frac{1}{2}\Bigg[\sum_{i<k}^{\alpha_p}\Bigg(\sum_{j<r}^{\beta_p}+\sum_{j>r}^{\beta_p}\Bigg)+\sum_{i>k}^{\alpha_p}\Bigg(\sum_{j>r}^{\beta_p}+\sum_{j<r}^{\beta_p}\Bigg)\Bigg].$$

Отсюда в силу (7), (8) имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i<k}^{\alpha_p}\Bigg(\sum_{j<r}^{\beta_p}+\sum_{j>r}^{\beta_p}\Bigg)=\sum_{i<k}^{\alpha_p}\sum_{l,m}^{\alpha_n}\Bigg[\sum_{j<r}^{\beta_p}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} i & k \\ j & r\end{pmatrix} X_{t-}^{lj}X_{t-}^{mr} - \\ - \sum_{j>r}^{\beta_p}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} i & k \\ r & j\end{pmatrix} X_{t-}^{lj}X_{t-}^{mr}\Bigg]d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t = \\ = \sum_{i<k}^{\alpha_p}\sum_{l,m}^{\alpha_n}\Bigg[\sum_{j<r}^{\beta_p}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} i & k \\ j & r\end{pmatrix} \times \\ \times \big(X_{t-}^{lj}X_{t-}^{mr} - X_{t-}^{lr}X_{t-}^{mj}\big)\Bigg]d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t = \\ = \sum_{i<k}^{\alpha_p}\sum_{l<m}^{\alpha_n}\sum_{j<r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_n|\beta_p]\begin{pmatrix} l & m \\ j & r\end{pmatrix} \times \\ \times \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} i & k \\ j & r\end{pmatrix} d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t - \\ - \sum_{i<k}^{\alpha_p}\sum_{l>m}^{\alpha_n}\sum_{j<r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_n|\beta_p]\begin{pmatrix} m & l \\ j & r\end{pmatrix} \times \\ \times \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} i & k \\ j & r\end{pmatrix} d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t = \sigma_{21} - \sigma_{22}. \quad (10)\end{aligned}$$

В свою очередь

$$\sigma_{21} = \sum_{i<k}^{\alpha_p} \sum_{l<m}^{\alpha_p} \sum_{j<r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \begin{pmatrix} l & m \\ j & r \end{pmatrix} \times$$

$$\times \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \begin{pmatrix} i & k \\ j & r \end{pmatrix} d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t +$$

$$+ \sum_{i<k}^{\alpha_p} \left(\sum_{l<m}^{\alpha_n} - \sum_{l<m}^{\alpha_p} \right) \sum_{j<r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_n|\beta_p] \begin{pmatrix} l & m \\ j & r \end{pmatrix} \times$$

$$\times \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \begin{pmatrix} i & k \\ j & r \end{pmatrix} d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t =$$

$$= \left| X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \right| \sum_{i<k}^{\alpha_p} d\langle B^{ii}, B^{kk}\rangle_t + \sum_{i<k}^{\alpha_p} \left(\sum_{l<m}^{\alpha_n} - \sum_{l<m}^{\alpha_p} \right) \times$$

$$\times \sum_{j<r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_n|\beta_p] \begin{pmatrix} l & m \\ j & r \end{pmatrix} \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \begin{pmatrix} i & k \\ j & r \end{pmatrix} d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t.$$

Аналогичным образом преобразуем σ_{22}. Получим

$$\sigma_{22} = \sum_{i<k}^{\alpha_p} \sum_{l>m}^{\alpha_p} \sum_{j<r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \begin{pmatrix} m & l \\ j & r \end{pmatrix} \times$$

$$\times \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \begin{pmatrix} i & k \\ j & r \end{pmatrix} d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t +$$

$$+ \sum_{i<k}^{\alpha_p} \left(\sum_{l>m}^{\alpha_n} - \sum_{l>m}^{\alpha_p} \right) \sum_{j<r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_n|\beta_p] \begin{pmatrix} m & l \\ j & r \end{pmatrix} \times$$

$$\times \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \begin{pmatrix} i & k \\ j & r \end{pmatrix} d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t =$$

$$= \left| X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \right| \sum_{i<k}^{\alpha_p} d\langle B^{ik}, B^{ki}\rangle_t + \sum_{i<k}^{\alpha_p} \left(\sum_{l<m}^{\alpha_n} - \sum_{l<m}^{\alpha_p} \right) \times$$

$$\times \sum_{j<r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_n|\beta_p] \begin{pmatrix} l & m \\ j & r \end{pmatrix} \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \begin{pmatrix} i & k \\ j & r \end{pmatrix} d\langle B^{im}, B^{kl}\rangle_t.$$

Подставляя найденные выражения для σ_{21} и σ_{22} в правую часть равенства (10), находим

$$\sum_{i<k}^{\alpha_p} \left(\sum_{j<r}^{\beta_p} + \sum_{j>r}^{\beta_p} \right) = \left| X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \right| \sum_{i<k}^{\alpha_p} \left(d\langle B^{ii}, B^{kk}\rangle_t - d\langle B^{ik}, B^{ki}\rangle_t \right) +$$

$$+ \sum_{i<k}^{\alpha_p} \left(\sum_{l<m}^{\alpha_n} - \sum_{l<m}^{\alpha_p} \right) \sum_{j<r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_n|\beta_p] \begin{pmatrix} l & m \\ j & r \end{pmatrix} \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \begin{pmatrix} i & k \\ j & r \end{pmatrix} \times$$

$$\times \big(d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t - d\langle B^{im}, B^{kl}\rangle_t\big).$$

Теперь преобразуем вторую группу слагаемых из σ_2

$$\sum_{i>k}^{\alpha_p}\left(\sum_{j>r}^{\beta_p}+\sum_{j<r}^{\beta_p}\right) = \sum_{i>k}^{\alpha_p}\sum_{l,m}^{\alpha_n}\Bigg[\sum_{j>r}^{\beta_p}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix}k & i\\ r & j\end{pmatrix}\times$$

$$\times X_{t-}^{lj}X_{t-}^{mr} - \sum_{j<r}^{\beta_p}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix}k & i\\ j & r\end{pmatrix}X_{t-}^{lj}X_{t-}^{mr}\Bigg]d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t =$$

$$= \sum_{i>k}^{\alpha_p}\sum_{l,m}^{\alpha_n}\Bigg[\sum_{j>r}^{\beta_p}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix}k & i\\ r & j\end{pmatrix}\times$$

$$\times \big(X_{t-}^{lj}X_{t-}^{mr} - X_{t-}^{lr}X_{t-}^{mj}\big)\Bigg]d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t =$$

$$= \sum_{i>k}^{\alpha_p}\sum_{l>m}^{\alpha_n}\sum_{j>r}^{\beta_p}X_{t-}[\alpha_n|\beta_p]\begin{pmatrix}m & l\\ r & j\end{pmatrix}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix}k & i\\ r & j\end{pmatrix}\times$$

$$\times d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t - \sum_{i>k}^{\alpha_p}\sum_{l<m}^{\alpha_n}\sum_{j>r}^{\beta_p}X_{t-}[\alpha_n|\beta_p]\begin{pmatrix}l & m\\ r & j\end{pmatrix}\times$$

$$\times \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix}k & i\\ r & j\end{pmatrix}d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t = \sigma_{23} - \sigma_{24}.$$

Далее

$$\sigma_{23} = \sum_{i>k}^{\alpha_p}\sum_{l>m}^{\alpha_p}\sum_{j>r}^{\beta_p}X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix}m & l\\ r & j\end{pmatrix}\times$$

$$\times \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix}k & i\\ r & j\end{pmatrix}d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t +$$

$$+ \sum_{i>k}^{\alpha_p}\left(\sum_{l>m}^{\alpha_n}-\sum_{l>m}^{\alpha_p}\right)\sum_{j>r}^{\beta_p}X_{t-}[\alpha_n|\beta_p]\begin{pmatrix}m & l\\ r & j\end{pmatrix}\times$$

$$\times \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix}k & i\\ r & j\end{pmatrix}d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t =$$

$$= \big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\big|\sum_{i>k}^{\alpha_p}d\langle B^{ii}, B^{kk}\rangle_t +$$

$$+ \sum_{i>k}^{\alpha_p}\left(\sum_{l>m}^{\alpha_n}-\sum_{l>m}^{\alpha_p}\right)\sum_{j>r}^{\beta_p}X_{t-}[\alpha_n|\beta_p]\begin{pmatrix}m & l\\ r & j\end{pmatrix}\times$$

$$\times \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix}k & i\\ r & j\end{pmatrix}d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t. \quad (11)$$

Аналогичным образом

$$\sigma_{24} = \sum_{i>k}^{\alpha_p}\sum_{l<m}^{\alpha_p}\sum_{j>r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} l & m\\ r & j\end{pmatrix}\times$$

$$\times\, \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} k & i\\ r & j\end{pmatrix} d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t +$$

$$+\sum_{i>k}^{\alpha_p}\left(\sum_{l<m}^{\alpha_n}-\sum_{l<m}^{\alpha_p}\right)\sum_{j>r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_n|\beta_p]\begin{pmatrix} l & m\\ r & j\end{pmatrix}\times$$

$$\times\, \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} k & i\\ r & j\end{pmatrix} d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t =$$

$$= \big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\big|\sum_{i>k}^{\alpha_p} d\langle B^{ik}, B^{ki}\rangle_t + \sum_{i>k}^{\alpha_p}\left(\sum_{l>m}^{\alpha_n}-\sum_{l>m}^{\alpha_p}\right)\times$$

$$\times\sum_{j>r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_n|\beta_p]\begin{pmatrix} m & l\\ r & j\end{pmatrix}\overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} k & i\\ r & j\end{pmatrix} d\langle B^{im}, B^{kl}\rangle_t. \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что

$$\sum_{i>k}^{\alpha_p}\left(\sum_{j>r}^{\beta_p}+\sum_{j<r}^{\beta_p}\right) =$$

$$= \big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\big|\sum_{i>k}^{\alpha_p}\big(d\langle B^{ii}, B^{kk}\rangle_t - d\langle B^{ik}, B^{ki}\rangle_t\big)+$$

$$+\sum_{i>k}^{\alpha_p}\left(\sum_{l>m}^{\alpha_n}-\sum_{l>m}^{\alpha_p}\right)\sum_{j>r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_n|\beta_p]\begin{pmatrix} m & l\\ r & j\end{pmatrix}\times$$

$$\times\, \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} k & i\\ r & j\end{pmatrix}\big(d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t - d\langle B^{im}, B^{kl}\rangle_t\big).$$

Окончательно для σ_2 получаем следующее представление:

$$\sigma_2 = 2^{-1}\Bigg[\big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\big|\sum_{i,k}^{\alpha_p}\big(d\langle B^{ii}, B^{kk}\rangle_t - d\langle B^{ik}, B^{ki}\rangle_t\big)+$$

$$+\,2\sum_{i<k}^{\alpha_p}\left(\sum_{l<m}^{\alpha_n}-\sum_{l<m}^{\alpha_p}\right)\sum_{j<r}^{\beta_p} X_{t-}[\alpha_n|\beta_p]\begin{pmatrix} l & m\\ j & r\end{pmatrix}\times$$

$$\times\, \overline{X}_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} i & k\\ j & r\end{pmatrix}\big(d\langle B^{il}, B^{km}\rangle_t - d\langle B^{im}, B^{kl}\rangle_t\big)\Bigg] =$$

$$= 2^{-1}\big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\big| d\big(\mathrm{Sp}\langle B[\alpha_p,\beta_p]\otimes B[\alpha_p|\beta_p]\rangle_t - \mathrm{Sp}\langle B[\alpha_p|\beta_p]\rangle_t\big)+$$

$$+\, d\Phi_t(\alpha_p,\beta_p).$$

Для третьего слагаемого имеем

$$\sigma_3 = \int \bigg(\big| \big(E[\alpha_p|\alpha_p] + f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p] \big) X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] + \\ + f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p) X_{t-}(\alpha_p|\beta_p] \big| - \big| X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \big| - \\ - \sum_i^{\alpha_p} \sum_k^{\alpha_p} \bigg(\sum_j^{\beta_p} X_{t-}\binom{k}{j} \overline{X}_{t-}\binom{i}{j} \bigg) f^{ik}(t,U) - \\ - \sum_i^{\alpha_p} \sum_j^{\beta_p} \overline{X}_{t-}\binom{i}{j} \bigg(\sum_k^{\alpha_p} - \sum_k^{\alpha_p} \bigg) X_{t-}\binom{k}{j} f^{ik}(t,U) \bigg) \pi(dt,dU) = \\ = \int \bigg(\big| \big(E[\alpha_p|\alpha_p] + f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p] \big) X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] + \\ + f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p) X_{t-}(\alpha_p|\beta_p] \big| - \big| X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \big| - \big| X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \big| \sum_i^{\alpha_p} f^{ii}(t,U) - \\ - \sum_i^{\alpha_p} \sum_j^{\beta_p} \overline{X}_{t-}\binom{i}{j} \big(f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p) X_{t-}(\alpha_p|\beta_p] \big) \binom{i}{j} \bigg) \pi(dt,dU) = \\ = \int \Big(\big| \big(E[\alpha_p|\alpha_p] + f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p] \big) X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] + \\ + f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p) X_{t-}(\alpha_p|\beta_p] \big| - \big| X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \big| \big(1 + \operatorname{Sp} f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p] \big) - \\ - \big(\operatorname{grad} \big| X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \big|,\ f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p) X_{t-}(\alpha_p|\beta_p] \big) \Big) \pi(dt,dU).$$

Для σ_4 и σ_5 аналогично находим

$$\sigma_4 = \int \Big(\big| \big(E[\alpha_p|\alpha_p] + f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p] \big) X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] + \\ + f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p) X_{t-}(\alpha_p|\beta_p] \big| - \big| X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \big| \Big) \mu(dt,dU),$$

$$\sigma_5 = \int \Big(\big| \big(E[\alpha_p|\alpha_p] + g(t,U)[\alpha_p|\alpha_p] \big) X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] + \\ + g(t,U)[\alpha_p|\alpha_p) X_{t-}(\alpha_p|\beta_p] \big| - \big| X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \big| \Big) \nu_1(dt,dU).$$

Выражения, полученные для σ_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, дают возможность записать формулу (9) в следующем виде

$$d\big| X_t[\alpha_p|\beta_p] \big| = \big| X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \big| d\operatorname{Sp}(A_t + B_t)[\alpha_p|\beta_p] + \\ + \big(\operatorname{grad} \big| X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \big|, d(A_t + B_t)[\alpha_p|\alpha_p) X_{t-}(\alpha_p|\beta_p] \big) + \\ + 2^{-1} \big| X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] \big| d\big(\operatorname{Sp}\langle B[\alpha_p|\beta_p] \otimes B[\alpha_p|\beta_p] \rangle_t - \operatorname{Sp}\langle B[\alpha_p|\beta_p] \rangle_t \big) + \\ + d\Phi_t(\alpha_p,\beta_p) + \int \Big(\big| \big(E[\alpha_p|\alpha_p] + f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p] \big) X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] +$$

$$+ f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p)X_{t-}(\alpha_p|\beta_p]\big| - \big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\big|\big(1 + \operatorname{Sp} f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p]\big) -$$
$$- \big(\operatorname{grad}\big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\big|,\ f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p)X_{t-}(\alpha_p|\beta_p]\big)\Big)\pi(dt,dU) +$$
$$+ \int\Big(\big|\big(E[\alpha_p|\alpha_p] + f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p]\big)X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] +$$
$$+ f(t,U)[\alpha_p|\alpha_p)X_{t-}(\alpha_p|\beta_p]\big| - \big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\big|\Big)\mu(dt,dU) +$$
$$+ \int\Big(\big|\big(E[\alpha_p|\alpha_p] + g(t,U)[\alpha_p|\alpha_p]\big)X_{t-}[\alpha_p|\beta_p] +$$
$$+ g(t,U)[\alpha_p|\alpha_p)X_{t-}(\alpha_p|\beta_p]\big| - \big|X_{t-}[\alpha_p|\beta_p]\big|\Big)\nu_1(dt,dU).$$

Для применимости формулы Ито достаточно потребовать, чтобы для любого $t \in [0,T]$ с вероятностью 1

$$\int_0^t \int\bigg(\Big|(E[\alpha_p|\alpha_p] + f(s,U)[\alpha_p|\alpha_p])X_{s-}[\alpha_p|\beta_p] +$$
$$+ f(s,U)[\alpha_p|\alpha_p)X_{s-}(\alpha_p|\beta_p]\Big| - \big|X_{s-}[\alpha_p|\beta_p]\big|\bigg)^2\pi(ds,dU) < \infty \quad (13)$$

и

$$\int_0^t \int\Big|\big|(E[\alpha_p|\alpha_p] + f(s,U)[\alpha_p|\alpha_p])X_{s-}[\alpha_p|\beta_p] +$$
$$+ f(s,U)[\alpha_p|\alpha_p)X_{s-}(\alpha_p|\beta_p]\big| - |X_{s-}[\alpha_p|\beta_p]|(1 + \operatorname{Sp} f(s,U)[\alpha_p|\alpha_p]) -$$
$$- \Big(\operatorname{grad}|X_{s-}[\alpha_p|\beta_p]|,\ f(s,U)[\alpha_p|\alpha_p)X_{s-}(\alpha_p|\beta_p]\Big)\Big|\pi(ds,dU) < \infty. \quad (14)$$

Условия (13) и (14) являются записью условий (16) и (17) на с. 201 и 202 в [2], при которых имеет место формула Ито для функции $|Q[\alpha_p|\beta_p]|$ и процесса X_t.

Сформулируем полученный результат.

Теорема. *Пусть X_t является решением уравнения* (2), *в котором процесс Y_t имеет вид* (1) *с компонентами, удовлетворяющими условиям* 1)–4). *Если для любого $t \in [0,T]$ с вероятностью 1 выполняются неравенства* (13) *и* (14), *то минор p-го порядка $|X_t[\alpha_p|\beta_p]|$ с номерами строк α_p и с номерами столбцов β_p удовлетворяет уравнению*

$$|X_t[\alpha_p|\beta_p]| = |E[\alpha_p|\beta_p]| + \int_0^t\Big\{|X_{s-}[\alpha_p|\beta_p]|\,d\operatorname{Sp}(A_s + B_s)[\alpha_p|\beta_p] +$$
$$+ \Big(\operatorname{grad}|X_{s-}[\alpha_p|\beta_p]|, d(A_s + B_s)[\alpha_p|\alpha_p)X_{s-}(\alpha_p|\beta_p]\Big) +$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2^{-1}|X_{s-}[\alpha_p|\beta_p]|d\Big(\mathrm{Sp}\langle B[\alpha_p|\beta_p]\otimes B[\alpha_p|\beta_p]\rangle_s - \mathrm{Sp}\langle B[\alpha_p|\beta_p]\rangle_s\Big)+\\
&+\sum_{i<k}^{\alpha_p}\Bigg(\sum_{l<m}^{\alpha_n}-\sum_{l<m}^{\alpha_p}\Bigg)\sum_{j<r}^{\beta_p}X_{s-}[\alpha_n|\beta_p]\begin{pmatrix} l & m\\ j & r\end{pmatrix}\times\\
&\times\overline{X}_{s-}[\alpha_p|\beta_p]\begin{pmatrix} i & k\\ j & r\end{pmatrix}d\Big(\langle B^{il},B^{km}\rangle_s-\langle B^{im},B^{kl}\rangle_s\Big)\Big\}+\\
&+\int\limits_0^t\int\Big(\big|\big(E[\alpha_p|\alpha_p]+f(s,U)[\alpha_p|\alpha_p]\big)X_{s-}[\alpha_p|\beta_p]+\\
&+f(s,U)[\alpha_p|\alpha_p)X_{s-}(\alpha_p|\beta_p]\big| - |X_{s-}[\alpha_p|\beta_p]|\big(1+\mathrm{Sp}\,f(s,U)[\alpha_p|\alpha_p]\big)-\\
&-\big(\mathrm{grad}\,|X_{s-}[\alpha_p|\beta_p]|, f(s,U)[\alpha_p|\alpha_p)X_{s-}(\alpha_p|\beta_p]\big)\Big)\pi(ds,dU)+\\
&+\int\limits_0^t\int\Big(\big|\big(E[\alpha_p|\alpha_p]+f(s,U)[\alpha_p|\alpha_p]\big)X_{s-}[\alpha_p|\beta_p]+\\
&+f(s,U)[\alpha_p|\alpha_p)X_{s-}(\alpha_p|\beta_p]\big| - |X_{s-}[\alpha_p|\beta_p]|\Big)\mu(ds,dU)+\\
&+\int\limits_0^t\int\Big(\big|\big(E[\alpha_p|\alpha_p]+g(s,U)[\alpha_p|\alpha_p]\big)X_{s-}[\alpha_p|\beta_p]+\\
&+g(s,U)[\alpha_p|\alpha_p)X_{s-}(\alpha_p|\beta_p]\big| - |X_{s-}[\alpha_p|\beta_p]|\Big)\nu_1(ds,dU).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Замечание 1. В частном случае при $p = n$

$$
E[\alpha_p|\beta_p]=E,\quad X_t[\alpha_p|\beta_p]=X_t,\quad X_t(\alpha_p|\beta_p]=0,\quad \sum_{l<m}^{\alpha_n}-\sum_{l<m}^{\alpha_p}=0,
$$

в силу чего из уравнения (15) получаем уравнение (3) для определителя $|X_t|$.

Замечание 2. Условия (13) и (14), вообще говоря, не достаточны для того, чтобы имело место соответствующее уравнение для какого-либо другого минора стохастической полугруппы. Так, например, если у матрицы $f(s,U)$ первые две строки нулевые, то для любого минора второго порядка, построенного по этим двум строкам, неравенства (13) и (14) имеют место, так как левые части этих неравенств равны нулю. Для любого другого минора второго или более высокого порядка это уже не так.

Литература

[1] А. С. Чани, *Определитель линейной стохастической системы*, Сб. науч. тр. Теория случайных процессов и ее приложения, Наукова думка, Киев, 1990, 148–155.

[2] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*, 1982, 612 с.

Сведения об авторах

Александр Семёнович Чани

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
Розы Люксембург 74,
83114, Донецк,
Украина
E-Mail: chani@iamm.ac.donetsk.ua