Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 2, 219 – 235

# Неравенство Гарнака для нелинейного эллиптического уравнения с коэффициентами из Като класса

Игорь И. Скрыпник

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

**Аннотация.** Доказывается неравенство Гарнака для неотрицательных решений эллиптического уравнения вида

$$-\Delta_p u + \sum_{i=1}^{n} h_i(x) \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} + g(x)\,|u|^{p-2}u = 0,$$

где $h_i(x)$, $g(x)$ принадлежат Като классу.

**2000 MSC.** 35J70, 35J60.

**Ключевые слова и фразы.** Неравенство Гарнака, эллиптические уравнения, классы Като.

## 1. Введение

Работа посвящена доказательству неравенства Гарнака для общего квазилинейного эллиптического уравнения дивергентного вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\, a_i\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) = a_0\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big), \quad x \in B_1 \subset R^n. \tag{1.1}$$

Неравенство Гарнака хорошо известно для неотрицательных решений уравнения (1.1) при определенных условиях на коэффициенты уравнения ([8, 7]). В частности, для модельного уравнения

$$-\Delta_p u + \sum_{i=1}^{n} h_i(x) \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} + g(x)\,|u|^{p-2}u = 0 \tag{1.2}$$

в [8, 7] предполагается, что

$$|h_i(x)|^p,\ g(x) \in L^{\frac{n}{p-\delta}}(B_1). \tag{1.3}$$

*Статья поступила в редакцию* 12.11.2004

ISSN 1810 – 3200. 

Целью данной работы является неравенства Гарнака при более слабых условиях на коэффициенты, которые в случае модельного уравнения (1.2) формулируются следующим образом

$$\lim_{R\to 0}\sup_{x\in B_1}\int\limits_0^R\left\{\frac{1}{r^{n-p}}\int\limits_{B_r(x)\cap B_1}\big[|h_i(z)|^p+|g(z)|\big]\,dz\right\}^{\frac{1}{p-1}}\frac{dr}{r}=0,$$
$$i=1,\dots,n. \quad (1.4)$$

Отметим, что при $p=2$ условие (1.4) эквивалентно известному условию Като (см. [1, 3]). Для линейных уравнений ($p=2$) вида (1.2) с $h_i(x)\equiv 0$ неравенство Гарнака доказано в [1] вероятностным методом и в [3] с использованием функции Грина.

Для модельного нелинейного уравнения вида (1.2) $p\neq 2$ при $h_i(x)\equiv 0$ и функции $g(x)$, удовлетворяющей условию (1.4), неравенство Гарнака доказано в [2].

Доказательство неравенства Гарнака в данной статье основано на получении априорных оценок решения сверху и снизу. При этом используются пробные функции, подставляемые в интегральное тождество, близкие к использованным в [5].

## 2. Формулировка предположений и основных результатов

Рассмотрим неотрицательные решения уравнения

$$\sum_{i=1}^n\frac{d}{dx_i}a_i\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=a_0\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad x\in B_1=\{|x|<1\}. \quad (2.1)$$

Предполагаем, что функции $a_i(x,u,\xi)$, $i=0,\dots,n$, $x\in B_1, u\in R^1$, $\xi\in R^n$ удовлетворяют условию Каратеодори и выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^n a_i(x,u,\xi)\,\xi_i\geq \nu_1|\xi|^p-g_1(x)|u|^p-f_1(x),\ 1<p<n, \quad (2.2)$$

$$|a_i(x,u,\xi)|\leq \nu_2|\xi|^{p-1}+g_2(x)|u|^{p-1}+f_2(x),\ i=1,\dots,n, \quad (2.3)$$

$$|a_0(x,u,\xi)|\leq h(x)|\xi|^{p-1}+g_3(x)|u|^{p-1}+f_3(x) \quad (2.4)$$

с неотрицательными функциями $f_i(x), g_i(x), h(x)$. Доопределим эти функции на $R^n$, полагая равными нулю вне $B_1$.

Для формулировки условий на функции $h(x)$, $g_i(x)$, $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ введем в рассмотрение классы $K_p, \widetilde{K}_p$, обобщающие для $p \neq 2$ известный Като класс.

Говорим, что неотрицательная функция $g(x) \in L_1(B_1)$ принадлежит $K_p$, если

$$\sup_{x\in B_1} \int\limits_0^1 \left\{ \frac{1}{r^{n-p}} \int\limits_{B_r(x)} g(z)dz \right\}^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} < \infty. \tag{2.5}$$

Говорим также, что неотрицательная функция $g(x) \in L_1(B_1)$ принадлежит $\widetilde{K}_p$, если

$$\sup_{x\in B_1} \int\limits_0^1 \left\{ \frac{1}{r^{n-p}} \int\limits_{B_r(x)} g(z)dz \right\}^{\frac{1}{p}} \frac{dr}{r} < \infty. \tag{2.6}$$

Отметим легко проверяемое вложение $\widetilde{K}_p \subset K_p$.

В дальнейшем предполагаем, что

$$g_1(x),\ f_1(x),\ g_2^{\frac{p}{p-1}}(x),\ f_2^{\frac{p}{p-1}}(x) \in \widetilde{K}_p, \tag{2.7}$$

$$h^p(x),\ g_3(x),\ f_3(x) \in K_p. \tag{2.8}$$

Под решением уравнения (2.1) понимаем функцию $u(x) \in W^1_{p,loc}(B_1)$, удовлетворяющую условию

$$\int\limits_{B_1} \Big[ g_3(x)|u|^{p-1} + g_2^{\frac{p}{p-1}}(x)|u|^p \Big]\, \psi(x)dx < \infty$$

и тождеству

$$\int\limits_{B_1} \Big[ \sum_{i=1}^n a_i\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big)\varphi \Big] dx = 0 \tag{2.9}$$

для любой ограниченной функции $\varphi(x) \in W^1_p(B_1)$ с носителем в $B_1$ и любой функции $\psi(x) \in C_0^\infty(B_1)$.

Для формулировки результатов введем обозначения

$$f(R)=\sup_{x_0\in B_1}\ \sup_{x\in B_R(x_0)}\Bigg\{\int\limits_0^R\Big\{\frac{1}{r^{n-p}}\int\limits_{B_r(x)}[f_1(z)+f_2^{\frac{p}{p-1}}(z)]\,dz\Big\}^{\frac{1}{p}}\frac{dr}{r}+$$

$$+\Bigg[\int\limits_0^R\Big\{\frac{1}{r^{n-p}}\int\limits_{B_r(x)}[f_1(z)+f_2^{\frac{p}{p-1}}(z)]\,dz\Big\}^{\frac{1}{p-1}}\frac{dr}{r}\Bigg]^{\frac{p-1}{p}}+$$

$$+\int\limits_0^R\Big\{\frac{1}{r^{n-p}}\int\limits_{B_r(x)}f_3(z)\,dz\Big\}^{\frac{1}{p-1}}\frac{dr}{r}\Bigg\},\tag{2.10}$$

$$g(R)=\sup_{x_0\in B_1}\ \sup_{x\in B_R(x_0)}\Bigg\{\int\limits_0^R\Big\{\frac{1}{r^{n-p}}\int\limits_{B_r(x)}[g_1(z)+g_2^{\frac{p}{p-1}}(z)]\,dz\Big\}^{\frac{1}{p}}\frac{dr}{r}+$$

$$+\int\limits_0^R\Big\{\frac{1}{r^{n-p}}\int\limits_{B_r(x)}g_3(z)\,dz\Big\}^{\frac{1}{p-1}}\frac{dr}{r}\Bigg\},\tag{2.11}$$

$$h(R)=\sup_{x_0\in B_1}\ \sup_{x\in B_R(x_0)}\int\limits_0^R\Big\{\frac{1}{r^{n-p}}\int\limits_{B_r(x)}h^p(z)\,dz\Big\}^{\frac{1}{p-1}}\frac{dr}{r}.\tag{2.12}$$

**Теорема 2.1.** *Пусть $u(x)$ — неотрицательное решение уравнения* (2.1). *Предположим, что выполнены неравенства* (2.2)–(2.4) *и условия* (2.7), (2.8).

*Пусть $\nu_3$ — такая постоянная, что*

$$f(R)+g(R)+h(R)\le\nu_3\quad \text{при}\quad 0<R<\frac{1}{4}.\tag{2.13}$$

*Тогда для любого $q\in\left(0,\frac{n(p-1)}{n-p}\right)$ существуют постоянные $K_1,\ \tau_0(q)$, зависящие лишь от $n,\ p,\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ q$ такие, что выполнена оценка*

$$\int\limits_{B_R(x_0)}[u(x)+\alpha\,f(R)]^q\,dx\le K_1R^n\inf_{B_{\frac{R}{2}}(x_0)}[u(x)+\alpha\,f(R)]^q\tag{2.14}$$

*и для любой точки $x_0\in B_1$, как только $B_{4R}(x_0)\subset B_1$,*

$$g(R)+h(R)\le\tau_0(q),\quad \alpha\ge\tau_0^{-1}(q).\tag{2.15}$$

При доказательстве теоремы 2.1 будем использовать

**Лемма 2.1.** *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют* $R_0 = R_0(\varepsilon) < 1$ *и* $\tau(\varepsilon)$, *зависящие лишь от* $n$, $p$, $\varepsilon$, *такие, что из неравенства*

$$\sup_{x\in B_1(0)} \int\limits_0^{R_0} \left\{ \frac{1}{r^{n-p}} \int\limits_{B_r(x)} H(z)\,dz \right\}^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} \le \tau(\varepsilon) \tag{2.16}$$

*следует оценка*

$$\int\limits_{B_R(x_0)} H(x)\,|\varphi(x)|^p\,dx \le \varepsilon \int\limits_{B_R(x_0)} \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right|^p dx \tag{2.17}$$

*для любой функции* $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(B_R(x_0))$, *если* $R \le R_0, B_{4R_0}(x_0) \subset B_1(0)$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы в [2].

**Теорема 2.2.** *Пусть* $u(x)$ — *неотрицательное решение уравнения* (2.1). *Предположим, что выполнены неравенства* (2.2)–(2.4) *и условия* (2.7), (2.8). *Тогда существуют положительные постоянные* $K_2$, $\tau_*$, *зависящие лишь от* $n$, $p$, $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$, *такие, что для* $R$, $\alpha$, *удовлетворяющих неравенству*

$$g(R) + h(R) \le \tau_*, \quad \alpha \ge \tau_*^{-1} \tag{2.18}$$

*выполнена оценка*

$$\max_{x\in B_R(x_0)} [u(x) + \alpha\, f(R)] \le K_2 \min_{x\in B_R(x_0)} [u(x) + \alpha\, f(R)] \tag{2.19}$$

*для любой точки* $x_0 \in B_1$, *такой, что* $B_{4R}(x_0) \subset B_1$.

## 3. Доказательство теоремы 2.1

Пусть $x_0$ — некоторая точка из $B_1(0)$, $R < \frac{1-|x_0|}{4}$ и зафиксируем $x_1 \in B_{\frac{R}{2}}(x_0)$. Определим функцию $\xi(x)$, равную единице в $B_{\frac{r}{2}}(x_1)$, нулю вне $B_r(x_1)$, $\xi(x) \in C_0^\infty(B_r(x_1))$, $r \le R$, $|\frac{\partial\xi}{\partial x}| \le \frac{4}{r}$.

Определим также при положительных $\alpha, l, \delta$

$$v(x) = [u(x) + \alpha\, f(R)]^{-1}, \quad \alpha > 0, \quad L = B_r(x_0) \cap \{v(x) > l\},$$

$$\lambda = \frac{(p-1)(n-1)}{p(n-p+1)}, \quad k = p + \frac{(p^2-1)(1+\lambda)}{p-1-\lambda}. \tag{3.1}$$

В дальнейшем через $C_i$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие лишь от $n$, $p$, $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$.

**Лемма 3.1.** *Пусть выполнены все условия* (2.2)–(2.4)*. Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_L \left\{ \int\limits_l^{v(x)} \Big(1+\frac{s-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda} ds + v(x)\Big(1+\frac{v(x)-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda} \right\} \Big|\frac{\partial v}{\partial x}\Big|^p \xi^k(x)\,dx \le$$

$$\le C_1\delta^p r^{-p} \int\limits_L v(x)\Big(1+\frac{v(x)-l}{\delta}\Big)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi^{k-p}(x)\,dx +$$

$$+ C_1 \int\limits_L v^p(x) \int\limits_l^{v(x)} \Big(1+\frac{s-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda} ds\, H_1(x)\xi^k(x)\,dx +$$

$$+ C_1 \int\limits_L v^{p+1}(x)\Big(1+\frac{v(x)-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda} H_2(x)\xi^k(x)\,dx, \quad (3.2)$$

*где*

$$H_1(x) = g_1(x) + g_3(x) + h^p(x) + \\ + f_1(x) f^{-p}(R)\alpha^{-p} + f_3(x)\, f^{1-p}(R)\alpha^{1-p}, \quad (3.3)$$

$$H_2(x) = g_1(x) + g_2^{\frac{p}{p-1}}(x) + [f_1(x) + f_2^{\frac{p}{p-1}}(x)]\, f^{-p}(R)\alpha^{-p}. \quad (3.4)$$

*Доказательство.* Подставим в интегральное тождество (2.9) функцию

$$\varphi(x) = v^{2p-1}(x)\left[\int\limits_l^{v(x)} \Big(1+\frac{s-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda} ds\right]_+ \xi^k(x), \quad k>0.$$

Используя неравенства (2.2)–(2.4), получаем

$$\int\limits_L v^{2p}(x) \int\limits_l^{v(x)} \Big(1+\frac{s-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda} ds \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \xi^k(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_L v^{2p+1}(x) \left(1+\frac{v(x)-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \xi^k(x)\,dx \le C_2 \sum_{j=1}^5 I_j, \quad (3.5)$$

где

$$I_1 = \int\limits_L v^{2p}(x) \int\limits_l^{v(x)} \Big(1+\frac{s-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda} ds\, [g_1(x)u^p(x) + f_1(x)]\,\xi^k(x)\,dx,$$

$$I_2 = \int\limits_L v^{2p+1}(x)\,\left(1+\frac{v(x)-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda}[g_1(x)u^p(x)+f_1(x)]\,\xi^k(x)\,dx,$$

$$I_3 = \frac{1}{r}\int\limits_L v^{2p-1}(x)\int\limits_l^{v(x)}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda}ds\Bigg[\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1}+$$

$$+g_2(x)u^{p-1}(x)+f_2(x)\Bigg]\xi^{k-1}(x)\,dx,$$

$$I_4 = \int\limits_L h(x)\,v^{2p-1}(x)\int\limits_l^{v(x)}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda}ds\,\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1}\xi^k(x)\,dx,$$

$$I_5 = \int\limits_L v^{2p-1}(x)\int\limits_l^{v(x)}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda}ds[g_3(x)u^{p-1}(x)+f_3(x)]\,\xi^k(x)\,dx.$$

Далее будем использовать легко проверяемое неравенство

$$\int\limits_l^{v(x)}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda}ds \le C_3\,\delta. \tag{3.6}$$

Используя определение функции $v(x)$, неравенства Юнга и (3.6), имеем

$$I_1 \le \int\limits_L v^p(x)\int\limits_l^{v(x)}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda}ds[g_1(x)+f_1(x)f^{-p}(R)\alpha^{-p}]\,dx, \tag{3.7}$$

$$I_2 \le C_4\int\limits_L v^{p+1}(x)\left[1+\frac{v(x)-l}{\delta}\right]^{-1-\lambda}[g_1(x)+f_1(x)f^{-p}(R)\alpha^{-p}]\,dx, \tag{3.8}$$

$$C_2 I_3 \le \frac{1}{4}\int\limits_L v^{2p+1}(x)\left(1+\frac{v(x)-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p\xi^k(x)\,dx+$$

$$+C_4\frac{\delta^p}{r^p}\int\limits_L v(x)\left(1+\frac{v(x)-l}{\delta}\right)^{(1+\lambda)(p-1)}\xi^{k-p}(x)\,dx+$$

$$+C_4\int\limits_L v^{p+1}(x)\left[1+\frac{v(x)-l}{\delta}\right]^{-1-\lambda}\left[g_2^{\frac{p}{p-1}}(x)+f_2^{\frac{p}{p-1}}(x)f^{-p}(R)\alpha^{-p}\right]dx, \tag{3.9}$$

$$C_2 I_4 \le \frac{1}{4} \int\limits_L v^{2p}(x) \int\limits_l^{v(x)} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \xi^k(x)\,dx +$$

$$+ C_4 \int\limits_L v^p(x) \int\limits_l^{v(x)} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds\; h^p(x)\,\xi^k(x)\,dx, \quad (3.10)$$

$$I_5 \le C_4 \int\limits_L v^p(x) \int\limits_l^{v(x)} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds\,[g_3(x)+f_3(x) f^{1-p}(R)\alpha^{1-p}]\,dx. \quad (3.11)$$

Теперь оценка (3.2) является непосредственным следствием неравенств (3.5), (3.7)–(3.11).

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\delta}\left[\int\limits_l^{v(x)} s^{\frac{1}{p}} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-\frac{1}{p}-\frac{\lambda}{p}} ds\right]_+ . \quad (3.12)$$

□

**Лемма 3.2.** *Пусть выполнены условия* (2.2)–(2.4), (2.7), (2.8). *Тогда существует число* $\theta_1 \in (0,1)$, *зависящее лишь от* $n$, $p$, $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$, *такое, что для* $\alpha$, $R$, *удовлетворяющих неравенству*

$$g(R)+h(R) < \theta_1, \quad \alpha > \theta_1^{-1} \quad (3.13)$$

*справедлива оценка*

$$\int\limits_L \left|\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}\right|^p \xi^k(x)\,dx \le$$

$$\le C_5\, r^{-p} \int\limits_L v(x) \left(1+\frac{v(x)-l}{\delta}\right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi^{k-p}(x)\,dx +$$

$$+ C_5\, l^p\, \delta^{1-p} \int\limits_L H_1(x)\,\xi^k(x)\,dx + C_5\, l^{p+1}\,\delta^{-p} \int\limits_L H_2(x)\,\xi^k(x)\,dx. \quad (3.14)$$

*Доказательство.* Используя неравенства (3.2), (3.6) и определение функции $\Phi(x)$, заключаем, что для доказательства леммы достаточно получить следующие оценки

$$2^{p-1} C_1 I_8 \le \frac{1}{4} I_6 + C_6 I_7, \qquad 2^p C_1 I_9 \le \frac{1}{4} I_6 + C_6 I_7, \quad (3.15)$$

где

$$I_6 = \int\limits_L \Big\{ \int\limits_l^{v(x)} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds +$$

$$+ v(x)\left(1+\frac{v(x)-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} \Big\} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^p \xi^k(x)\,dx,$$

$$I_7 = \delta^p r^{-p} \int\limits_L v(x)\left(1+\frac{v(x)-l}{\delta}\right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi^{k-p}(x)\,dx,$$

$$I_8 = \int\limits_L (v(x)-l)^p \int\limits_l^{v(x)} \left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds\, H_1(x)\xi^k(x)\,dx,$$

$$I_9 = \int\limits_L (v(x)-l)^{p+1}\left(1+\frac{v(x)-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} H_2(x)\xi^k(x)\,dx.$$

Покажем, что второе неравенство в (3.15) следует из леммы 2.1. Условие (2.16) для функции $H_2$ следует из (3.13) при достаточно малом $\theta_1$, так как

$$\int\limits_0^R \left\{\frac{1}{r^{n-p}} \int\limits_{B_r(x)} H_2(z)\,dz\right\}^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} \le C_6\ [g(R)+\alpha^{-\frac{p}{p-1}}]. \tag{3.16}$$

Поэтому при $C_6\ [g(R)+\alpha^{-\frac{p}{p-1}}] \le \tau(\varepsilon)$ имеем

$$I_9 \le \varepsilon \int\limits_{B_r(x_0)} \left|\frac{\partial}{\partial x}\left\{(v(x)-l)^{\frac{p+1}{p}}\left(1+\frac{v(x)-l}{\delta}\right)^{-\frac{1+\lambda}{p}} \xi^{\frac{k}{p}}(x)\right\}\right|^p dx$$

и дальше, оценивая последний интеграл, приходим к неравенству (3.15) для $I_9$ при соответствующем выборе $\varepsilon$.

Для доказательства первого неравенства в (3.15) введем в рассмотрение вспомогательную функцию $w(x)$ как решение задачи

$$-\Delta_p w = H_1(x), \quad w(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(B_R(x_0)), \tag{3.17}$$

где $\Delta_p$ — $p$-лапласиан. Условия (2.7), (2.8) обеспечивают включение $H_1(x) \in [\overset{\circ}{W}{}^1_p(B_R)(x_0)]^*$, так что существование $w(x)$ следует немедленно из теории монотонных отображений. Для $w(x)$ справедлива оценка

$$|w(x)| \le C_7 \left[g(R)+h(R)+\alpha^{-\frac{p}{p-1}}+\alpha^{-1}\right], \tag{3.18}$$

следующая из [5].

Используя определение решения задачи (3.17), имеем

$$I_8=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{L}\Big|\frac{\partial w}{\partial x}\Big|^{p-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{(v(x)-l)^p\int\limits_{l}^{v(x)}\Big(1+\frac{s-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda}ds\,\xi^k(x)\right\}dx. \tag{3.19}$$

Вычисляя производную фигурной скобки и применяя неравенство Юнга, переходим к оценке

$$2^{p-1}C_1\,I_8\le\frac{1}{8}\,I_6+C_8(I_7+I_{10}), \tag{3.20}$$

где

$$I_{10}=\int\limits_{L}(v(x)-l)^p\int\limits_{l}^{v(x)}\Big(1+\frac{s-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda}ds\Big|\frac{\partial w}{\partial x}\Big|^{p}\xi^k(x)\,dx.$$

Снова используя интегральное тождество для решения задачи (3.16), получаем

$$I_{10}=\int\limits_{L}w(x)\,(v-l)^p\int\limits_{l}^{v(x)}\Big(1+\frac{s-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda}ds\,H_1(x)\xi^k(x)dx-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{L}\Big|\frac{\partial w}{\partial x}\Big|^{p-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\,w\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{(v-l)^p\int\limits_{l}^{v(x)}\Big(1+\frac{s-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda}ds\,\xi^k(x)\right\}dx.$$

Оценивая последний интеграл аналогично оценке правой части (3.18), приходим к следующему неравенству

$$I_{10}\le C_9\,\max\{|w(x)|\,\big|x\in B_R(x_0)\}\cdot[I_8+I_6+I_7+I_{10}]. \tag{3.21}$$

Используя оценку (3.18), можем выбрать столь малым число $\theta_1$, чтобы неравенства (3.13), (3.20), (3.21) обеспечивали выполнение первой оценки в (3.15). Тем самым закончено доказательство леммы 3.2. $\square$

Введем в рассмотрение последовательности $R_j=R\,2^{-j}$, $j=0,1,\ldots$,

$$\begin{aligned}&\xi_j(x)=1 \text{ в } B_{j+1}=B_{R_{j+1}}(x_1),\\ &\xi_j(x)=0 \text{ вне } B_j,\ 0\le\xi_j(x)\le1,\\ &\xi_j(x)\in C_0^\infty(B_j).\end{aligned}$$

Пусть $l_0 = 0$ и определим для любого $j \geq 1$

$$\kappa = \frac{1}{R_j^n} \int\limits_{L_j} \frac{v(x)}{l_{j+1}} \left(\frac{v(x) - l_j}{l_{j+1} - l_j}\right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x)\, dx, \tag{3.22}$$

$L_j = B_j \cap \{v(x) > l_j\}$, $\kappa$ – некоторое достаточно малое число, которое мы определим позже. Равенство (3.22) определяет $l_{j+1}$, если $l_j$ нам известно. Задав $l_0$, мы тем самым определим последовательность $\{l_j\}$.

Положим также

$$\delta_j = l_{j+1} - l_j, \quad \Phi_j(x) = \left[\int\limits_{l_j}^{v(x)} s^{\frac{1}{p}} \left(1 + \frac{s - l_j}{\delta_j}\right)^{-\frac{1}{p} - \frac{\lambda}{p}} ds\right]_+.$$

**Лемма 3.3.** *Пусть выполнены условия теоремы* (2.2)–(2.4), (2.7), (2.8) *и неравенство* (3.13). *Тогда существует* $\kappa$, *зависящее лишь от* $n$, $p$, $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$, *такое, что для любого* $j \geq 1$ *справедлива оценка*

$$\delta_j \leq \frac{1}{2}\,\delta_{j-1} + C_{10}\left\{R_j^{p-n}\, l_j^{p-1} \int\limits_{B_j} H_1(x)\, \xi_j(x)\, dx\right\}^{\frac{1}{p-1}} +$$

$$+ C_{10}\left\{R_j^{p-n}\, l_j^{p} \int\limits_{B_j} H_2(x)\, \xi_j(x)\, dx\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{3.23}$$

*Доказательство.* Предположим, что $\delta_j \geq \frac{1}{2}\,\delta_{j-1}$, в противном случае мы получим (3.23) немедленно.

Представим $L_j$ в виде

$$L_j = L_j' \cup L_j'', \quad L_j' = \left\{\frac{v(x) - l_j}{\delta_j} \leq \varepsilon\right\} \cap L_j, \quad L_j'' = L_j \setminus L_j',$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$ и будет выбрано в дальнейшем. Имеем

$$\frac{1}{R_j^n} \int\limits_{L_j'} v(x) \left(\frac{v(x) - l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x)\, dx \leq$$

$$\leq \frac{2^n}{R_{j-1}^n}\, \varepsilon^{(1+\lambda)(p-1)} \int\limits_{L_{j-1} \cap \{v > l_j\}} v(x)\, \xi_j^{k-p}(x)\, dx \leq$$

$$\leq \frac{2^n}{R_{j-1}^n}\, \varepsilon^{(1+\lambda)(p-1)} \int\limits_{L_{j-1}} v(x) \left(\frac{v(x) - l_{j-1}}{\delta_{j-1}}\right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_{j-1}^{k-p}(x)\, dx \leq$$

$$\leq 2^n\, \varepsilon^{(1+\lambda)(p-1)}\, \kappa\, l_j. \tag{3.24}$$

Далее воспользуемся просто проверяемым неравенством

$$\Phi(x) \geq C_{11}(\varepsilon)\, v^{\frac{1}{p}}(x) \Big(\frac{v(x)-l}{\delta}\Big)^{1-\frac{1+\lambda}{p}} \tag{3.25}$$

при $v(x)-l \geq \delta\varepsilon$ с постоянной $C_{11}(\varepsilon)$, зависящей от известных параметров и $\varepsilon$.

Используя теорему вложения, получаем в силу выбора $\lambda$

$$\frac{1}{R_j^n} \int\limits_{L_j''} v(x) \left(\frac{v(x)-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x)\, dx \leq$$

$$\leq C_{12}(\varepsilon)\, l_j^{-\frac{p\lambda}{p-1-\lambda}} R_j^{-n} \int\limits_{L_j} [\Phi_j(x)]^{p\frac{(1+\lambda)(p-1)}{p-1-\lambda}} \xi_j^{k-p}(x)\, dx \leq$$

$$\leq C_{13}(\varepsilon)\, l_j^{-\frac{p\lambda}{p-1-\lambda}} \Bigg[ R_j^{p-n} \int\limits_{L_j} \left|\frac{\partial \Phi_j(x)}{\partial x}\right|^p \xi_j^{(k-p)\frac{p-1-\lambda}{(p-1)(1+\lambda)}}\, dx +$$

$$+ R_j^{-n} \int\limits_{L_j} \Phi_j^p(x)\, \xi_j^{(k-p)\frac{p-1-\lambda}{(p-1)(1+\lambda)}-p}\, dx \Bigg]^{\frac{(1+\lambda)(p-1)}{p-1-\lambda}}. \tag{3.26}$$

Используя лемму 3.2, получим из (3.26)

$$R_j^{-n} \int\limits_{L_j''} v(x) \left(\frac{v(x)-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_j^{k-p}(x) \leq$$

$$\leq C_{14}(\varepsilon)\, l_j^{-\frac{p\lambda}{p-1-\lambda}} \Bigg[ R_j^{-n} \int\limits_{L_j} v(x) \left(1+\frac{v(x)-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi_j(x)\, dx +$$

$$+ R_j^{p-n}\, \delta_j^{1-p}\, l_j^p \int\limits_{B_j} H_1(x)\, \xi_j(x)\, dx +$$

$$+ R_j^{p-n}\, \delta_j^{-p}\, l_j^{p+1} \int\limits_{B_j} H_2(x)\, \xi_j(x)\, dx \Bigg]^{\frac{(1+\lambda)(p-1)}{p-1-\lambda}}, \tag{3.27}$$

так как $k$ удовлетворяет условию $(k-p)\frac{p-1-\lambda}{(p-1)(1+\lambda)} = p+1$.

Здесь также была использована непосредственно проверяемая оценка

$$\Phi_j(x) \leq C_{15}\, v^{\frac{1}{p}}(x) \Big(1+\frac{v(x)-l_j}{\delta_j}\Big)^{\frac{(1+\lambda)(p-1)}{p}} \quad \text{при} \quad x \in L_j. \tag{3.28}$$

Аналогично (3.24) в силу неравенства $\delta_j \geq \frac{1}{2}\,\delta_{j-1}$ имеем

$$R_j^{-n}\int\limits_{L_j} v(x)\left(1+\frac{v(x)-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(p-1)}\xi_j(x)\,dx \leq$$

$$\leq 2^n\,R_{j-1}^{-n}\int\limits_{L_{j-1}\cap\{v>l_j\}} v(x)\left(3\,\frac{v(x)-l_{j-1}}{\delta_{j-1}}\right)^{(1+\lambda)(p-1)}\xi_{j-1}^{k-p}(x)\,dx \leq$$

$$\leq 2^n\,3^{(1+\lambda)(p-1)}\,\kappa\,l_j. \quad (3.29)$$

Используя равенство (3.12) и оценки (3.24), (3.27), (3.29), получаем

$$\kappa \leq 2^n\,\varepsilon^{(1+\lambda)(p-1)}\,\kappa + C_{16}(\varepsilon)\,\kappa^{\frac{(1+\lambda)(p-1)}{p-1-\lambda}} +$$

$$+\,C_{16}\,(\varepsilon)\left\{\delta_j^{-p}l_j^{-1}R_j^{p-n}\int\limits_{B_j}[\delta_j\,l_j^p\,H_1(x)+l_j^{p+1}\,H_2(x)]\,\xi_j(x)\,dx\right\}^{\frac{(1+\lambda)(p-1)}{p-1-\lambda}}. \quad (3.30)$$

Выбирая сначала $\varepsilon$, а затем $\kappa$, так, чтобы выполнялись равенства

$$2^n\,\varepsilon^{(1+\lambda)(p-1)} = \frac{1}{4}, \quad C_{16}(\varepsilon)\,\kappa^{\frac{\lambda p}{p-1-\lambda}} = \frac{1}{4},$$

получаем из (3.30), что выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\delta_j^{1-p}\,l_j^{p-1}\,R_j^{p-n}\int\limits_{B_j}H_1(x)\,\xi_j(x)\,dx \geq \frac{1}{2}\left[\frac{\kappa}{4\,C_{16}(\varepsilon)}\right]^{\frac{p-1-\lambda}{(1+\lambda)(p-1)}},$$

$$\delta_j^{-p}\,l_j^{p}\,R_j^{p-n}\int\limits_{B_j}H_2(x)\,\xi_j(x)\,dx \geq \frac{1}{2}\left[\frac{\kappa}{4\,C_{16}(\varepsilon)}\right]^{\frac{p-1-\lambda}{(1+\lambda)(p-1)}}.$$

Отсюда следует, что $\delta_j$ удовлетворяет неравенству (3.23), что и заканчивает доказательство леммы 3.2. □

**Лемма 3.4.** *Пусть выполнены условия* (2.2)–(2.4), (2.7), (2.8). *Тогда существует* $\theta_2 \in (0,\theta_1)$, *зависящее лишь от* $n,\ p,\ \nu_1,\ \nu_2\ ,\nu_3$, *такое, что при* $g(R)+h(R)<\theta_2,\ \alpha>\theta_2^{-1}$ *справедлива оценка*

$$\max_{B_R(x_0)} v(x) \leq C_{17}\left\{R^{-n}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} v^{p\lambda-1-\lambda}(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p\lambda-1-\lambda}}. \quad (3.31)$$

*Доказательство.* Просуммируем (3.23) по $j = 1, 2, \ldots, J$. Используя неравенство (3.16) и аналогичную оценку для $H_1$, получаем

$$l_{J+1} \leq \delta_0 + C_{18}\,[g(R) + h(R) + \alpha^{-\frac{p}{p-1}}]\, l_J. \tag{3.32}$$

Выбирая $\theta_2 \in (0, \theta_1)$ так, чтобы

$$C_{18}\,(\theta_2 + \theta_2^{-\frac{p}{p-1}}) < \frac{1}{2}, \tag{3.33}$$

и $x_1$ так, чтобы $v(x_1) = \max\limits_{B_R(x_0)} v(x)$, получим (3.31) из (3.32) и определения последовательности $l_j,\ j = 0, 1, 2, \ldots$. □

**Лемма 3.5.** *Пусть выполнены условия* (2.2)–(2.4), (2.7), (2.8) *и пусть* $\xi(x)$ *— срезывающая функция, определенная в начале раздела. Тогда для любого* $K > p$ *существуют положительные постоянные* $\tau(K)$, $C_{19}(K)$, *зависящие только от известных параметров и* $K$, *такие, что при* $0 < s \leq K,\ p \leq k \leq K$ *выполнено неравенство*

$$\int\limits_{B_r(x_1)} v^{s+1}(x) \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \xi^k(x)\,dx \leq C_{19}\,(K)\, r^{-p} \int\limits_{B_r(x_1)} v^{s+1-p}(x)\, \xi^{k-p}(x)\,dx, \tag{3.34}$$

*как только* $g(R) + h(R) \leq \tau(K),\ \alpha \geq \tau^{-1}(K),\ r \leq R$.

*Доказательство.* Подставим в интегральное тождество (2.9) функцию

$$\varphi(x) = v^s(x)\,\xi^k(x)$$

и получим

$$\int\limits_{B_r(x_1)} v^{s+1}(x) \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \xi^k(x)\,dx \leq$$

$$\leq C_{20}(K)\, r^{-p} \int\limits_{B_r(x_1)} v^{s+1-p}(x)\,\xi^{k-p}(x)\,dx +$$

$$+\, C_{20}(K) \int\limits_{B_r(x_1)} v^{s+1-p}(x)\,(H_1(x) + H_2(x))\,\xi^k(x)\,dx, \tag{3.35}$$

где $H_1(x), H_2(x)$ определены в (3.3), (3.4).

При $s = p-1,\ k = p$ в силу условий (2.7), (2.8), получим из (3.35) неравенство

$$\int\limits_{B_r(x_1)} \left|\frac{\partial}{\partial x}\ \ln v(x)\right|^p dx \leq C_{21}\, r^{n-p}, \tag{3.36}$$

которое обеспечивает возможность применения леммы Йона-Ниренберга для функции $\ln v(x)$.

При любом $s > p-1$, в силу леммы 2.1 получим

$$C_{20}(K) \int\limits_{B_r(x_1)} v^{s+1-p}(x)\,(H_1(x)+H_2(x))\,\xi^k(x)\,dx \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left\{ \int\limits_{B_r(x_1)} v^{s+1}(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^p \xi^k(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + r^{-p} \int\limits_{B_r(x_1)} v^{s+1-p}(x)\ \xi^{k-p}(x)\,dx \right\},$$

если $\tau(K)$ достаточно мало. Отсюда и из (3.35) получим (3.34).

Теперь из лемм 3.4, 3.5, используя лемму Йона-Ниренберга и конечное число итераций мозеровского типа, получим теорему 2.1. $\square$

## 4. Доказательство теоремы 2.2

Пусть $\alpha, l, \delta, \lambda, k, \xi(x)$ те же числа и функция, что и при доказательствн леммы 1. Обозначим

$$\bar{u}(x) = u(x) + \alpha\, f(R), \quad E = B_r(x_0) \cap \{\bar{u}(x) > l\}.$$

**Лемма 4.1.** *Предположим, что выполнены условия* (2.2)–(2.4). *Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_E \left\{ \int\limits_l^{\bar{u}(x)} \Big(1+\frac{s-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda} ds + \bar{u}(x)\Big(1+\frac{\bar{u}(x)-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda} \right\} \Big|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\Big|^p \xi^k(x)\,dx \le$$

$$\le C_{22}\Big(\frac{\delta}{r}\Big)^p \int\limits_E \bar{u}(x)\Big(1+\frac{\bar{u}(x)-l}{\delta}\Big)^{(1+\lambda)(p-1)} \xi^{k-p}(x)\,dx +$$

$$+ C_{22}\int\limits_E \bar{u}^p(x) \int\limits_l^{\bar{u}(x)} \Big(1+\frac{s-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda} ds\, H_1(x)\,\xi^k(x)\,dx +$$

$$+ C_{22}\int\limits_E \bar{u}^{p+1}(x)\Big(1+\frac{\bar{u}(x)-l}{\delta}\Big)^{-1-\lambda} H_2(x)\,\xi^k(x)\,dx \quad (4.1)$$

*с функциями* $H_1(x) < H_2(x)$, *определенными равенствами* (3.3), (3.4).

Для доказательства достаточно подставить в интегральное тождество (2.9) функцию

$$\varphi(x) = \bar{u}(x)\left[\int\limits_{l}^{\bar{u}(x)}\left(1+\frac{s-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} ds\right]_{+} \cdot \xi^{k}(x)$$

и оценить возникающие интегралы аналогично доказательству леммы 3.1.

Заметим, что неравенство (4.1) получается из (3.2) заменой $v(x), L$ на $\bar{u}(x), E$ соответственно. Заметим также то, что при доказательстве лемм 3.2–3.4 использовалось для функции $v(x)$ только неравенство (3.2) и не использовалось конкретное представление этой функции. Следовательно, аналоги лемм 3.2–3.4 справедливы и для функции $\bar{u}(x)$, и мы получаем следующее утверждение.

**Лемма 4.2.** *Предположим, что выполнены условия* (2.2)–(2.4), (2.7), (2.8)*. Тогда при* $R, \alpha$*, удовлетворяющих условию леммы* 3.4*, справедлива оценка*

$$\max_{B_R(x_0)} \bar{u}(x) \leq C_{23}\left\{R^{-n}\int\limits_{B_{2R}(x_0)} \bar{u}^{p\lambda-1-\lambda}(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p\lambda-1-\lambda}}. \tag{4.2}$$

Теперь оценка (2.19) является непосредственным следствием неравенств (2.14), (4.2), так как $0 < p\lambda - 1 - \lambda < \frac{n(p-1)}{n-p}$. Этим закончено доказательство теоремы 4.2.

## Литература


[1] M. Aizermann and B. Simon, *Brownian motion and Harnack's inequality for Schrödinger operators* // Comm. Pure Appl. Math., (1982), No 35, 209–271.

[2] M. Biroli, *Schrödinger type and relaxed Dirichlet problems for the sup-elliptic p-Laplacian* // Potential Analysis, (2001), No 15, 1–16.

[3] F. Chiarenza, E. Fabes, N. Carofalo, *Harnack's inequality for Schrödinger operators and continuity of solutions* // Proceed of A. M. S., **98** (1986), No 3, 415–425.

[4] V. A. Liskevich, I. V. Skrypnik, *On global behavior of positive solutions to nonlinear Schrödinger equations*, в печати.

[5] J. Maly, P. W. Ziemer, *Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations*, A.M.S., 1997.

[6] J. Moser, *A new proof o de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations* // Comm. Pure and Appl. Math., **13** (1960), No 3, 457–468.

[7] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasilinear elliptic equations* // Acta. Math., (1964), No 111, 247–302.

[8] N. S. Trudinger, *On Harnack type inequality and their applications to quasilinear elliptic equations* // Comm. Pure and Appl. Math., (1967), No 20, 721-747.

## Сведения об авторах

**Игорь Игоревич Скрыпник**

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
Розы Люксембург 74,
83114, Донецк,
Украина